BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ANDREA SCOZZARI

Problemi di localizzazione di cammini e alberi su reti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 547–550.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_547_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 547-550

Problemi di localizzazione di cammini e alberi su reti.

ANDREA SCOZZARI

1. – Introduzione.

I problemi di localizzazione trattano tradizionalmente il problema di individuare in modo «opportuno» un insieme di punti di servizio. Il termine «opportuno» si riferisce al criterio con il quale i centri o le attività di servizio vengono individuati. I criteri principalmente utilizzati nella letteratura sono la minimizzazione della somma delle distanze da ogni cliente all'insieme dei servizi localizzati (criterio *minisum*) o la minimizzazione della massima distanza tra l'insieme dei punti di servizio al cliente più lontano (criterio *minimax*). Nella tesi si considerano modelli di localizzazione su *grafi* in cui i clienti sono schematizzati attraverso i vertici del grafo, mentre le attività possono essere collocate sia sui vertici che lungo gli spigoli della rete.

In particolare si considera il problema di localizzare, dato un grafo, attività che hanno la forma di un *cammino* o di un *albero* con l'obiettivo di minimizzare la somma delle distanze dai vertici del grafo all'attività individuata. Si parla allora del problema del cammino o del sottoalbero mediano. Come mostrato nell'articolo di Hakimi [3] i problemi di localizzazione di cammini o alberi su grafi arbitrari sono NP-Completi. I problemi di cammino mediano e del sottoalbero mediano sono però polinomialmente risolubili su grafi con topologia ad albero. In questa tesi si considerano tre differenti problemi di localizzazione su alberi ed un quarto problema di localizzazione di cammini mediani su grafi a griglia. Scopo della tesi è quello di definire, per i primi tre problemi, nuovi e più efficienti algoritmi rispetto a quelli attualmente presenti in letteratura mentre per il quarto problema l'obiettivo è studiarne la complessità computazionale cercando casi speciali per cui il problema può essere risolubile in tempo polinomiale.

2. – Il problema dell'l-core.

Dato un albero $T = (V, E)$ con $|V| = n$ l'insieme dei suoi vertici ed E l'insieme degli spigoli, il problema di trovare un l-core su T consiste nel trovare un cammino di lunghezza al più l che minimizza la somma delle distanze da esso ai vertici di T. Questo problema può essere considerato una generalizzazione del problema di trovare un *core* di un grafo ovvero un cammino mediano senza limitazioni sulla lunghezza e per il quale esistono in letteratura algoritmi lineari che lo risolvono quando il grafo è un albero [4]. Un problema simile all'l-core è presente nell'articolo di Peng e Lo [5] in cui il vincolo sulla lunghezza del cammino da localizzare è però un vincolo di uguaglianza. Gli autori forniscono un algoritmo ricorsivo di complessità $O(n \log n)$. La differenza col nostro problema non è banale in quanto si può far vedere attraverso esempi che, dato l, un cammino di lunghezza inferiore ad l può essere migliore di uno di lunghezza esattamente l. Inoltre, differentemente dal lavoro [5] in cui il problema è trattato solo su alberi non pesati il nostro problema è risolto sia sul alberi non pesati che su alberi pesati.

Le procedure di risoluzione adottate necessitano di una fase di pre-processamento dell'albero radicato in un dato vertice. Tale fase consiste nel visitare livello per livello, dalle foglie alla radice prima e dalla radice alle foglie poi, l'albero in modo tale da associare a ciascun vertice delle quantità che saranno successivamente utilizzate negli algoritmi risolutivi. Le quantità che ci interessano sono ad esempio la cardinalità di un sottoalbero dell'albero radicato o la somma delle distanze da ciascun vertice a tutti gli altri. Questa fase viene chiamata una sola volta all'interno degli algoritmi e non inficia la complessità totale di questi, dato che la fase di pre-processamento può essere implementata in tempo lineare nel numero di vertici di T.

Nella tesi, per alberi non pesati è presentato un algoritmo di complessità $O(nl)$ mentre per gli alberi pesati un algoritmo ricorsivo di complessità $O(n \log^2 n)$. Nel primo caso l'idea di base è che per ciascuno spigolo $e \in E$ si trova il miglior cammino di lunghezza al più l e che contiene e come spigolo terminale. Il miglior cammino tra quelli trovati è l-core di T. Nel caso pesato, la ricorsione dell'algoritmo viene effettuata prima radicando l'albero nel centroide e poi ricercando il miglior cammino che passa per esso. Se questo non è l-core allora l'l-core deve necessariamente appartenere ad uno dei sottoalberi radicati nei figli del centroide. L'algoritmo quindi procede ricorsivamente su questi sottoalberi. Trovare il miglior cammino che passa per il centroide di un sottoalbero richiede un tempo $O(n \log n)$. La scelta del centroide per la ricorsione fa si che la profondità dell'albero della ricorsione sia $O(\log n)$ per cui la complessità dell'algoritmo è $O(n \log^2 n)$. Si fa notare il fatto che nel caso di alberi non pesati integrando la nostra procedura con quella descritta in [5] si ottiene un algoritmo combinato di complessità $O(n \min\{l, \log n\})$.

3. – Il problema del (k, l)-core.

I problemi di localizzazione di alberi mediani si ritrovano nelle applicazioni sulle reti di telecomunicazione dove lo scopo è quello di individuare data una rete, una sottorete ad alta velocità (dorsale) i cui vertici sono i server a cui i clienti si devono collegare. Minimizzare la somma delle distanze implica minimizzare il costo di accesso dai clienti ai server. Tuttavia, anche se la rete di telecomunicazione è descritta da un albero, trovare un sottoalbero mediano di costo prefissato rimane un problema NP-difficile. Nella tesi il vincolo di costo (o di lunghezza) è introdotto sul diametro del sottoalbero da localizzare. Gli algoritmi polinomiali che sono stati costruiti risolvono anche una generalizzazione di un altro problema presente nella letteratura che è quello del k-tree core, ovvero trovare un sottoalbero mediano con esattamente k foglie [6]. Con il vincolo aggiuntivo del diametro si definisce allora il problema del (k, l)-core. In [6] gli autori presentano un algoritmo di tipo greedy che risolve il problema del k-tree core in tempo $O(n)$. Anche in questo caso la nostra generalizzazione è affrontata sia su alberi non pesati che su alberi pesati. Avvalendoci della fase di pre-processamento così come introdotta per il problema precedente, si sono sviluppati due algoritmi uno, per alberi non pesati, di complessità $O(n^2)$ ed il secondo, per alberi pesati, di complessità $O(n^2 \log n)$. Quest'ultimo algoritmo è una procedura di tipo ricorsivo dove la regola di ricorsione è la stessa di quella adottata per l-core.

In entrambi i casi si è utilizzata una strategia greedy simile a quella descritta in [6] la cui correttezza abbiamo dimostrato discende dal teorema di Edmonds e Rado dopo aver provato che la struttura soggiacente al nostro problema è un matroide.

4. – Il problema del p-Path core.

I due problemi descritti in precedenza si riferiscono al caso della localizzazione di una sola attivtà sia essa un cammino od un albero. Come per i classici problemi di localizzazione di singoli punti, può essere necessario individuare, dato un grafo, $p > 1$ cammini od alberi. In [3] è dimostrato che il problema su alberi è NP-difficile se p è un input variabile mentre è risolubile in tempo polinomiale per p fissato.

Il terzo problema affrontato nella tesi consiste quindi nel trovare p cammini mediani che siano vertici disgiunti, senza vincoli aggiuntivi sul costo associato a ciascuno di essi. Il problema su alberi nel caso $p = 2$ è stato introdotto per la prima volta in [2] in cui gli autori presentano un algoritmo di complessità $O(nDiam(T))$ dove $Diam(T)$ è il diametro dell'albero. Il loro algoritmo si basa su un teorema che fornisce una interessante relazione tra un core ed un 2-Path core di un albero, ossia: dato un 2-Path core $\{P, Q\}$ si hanno due casi; (a) uno dei due cammini è anche un core dell'albero; (b) I due vertici terminali del core sono rispettivamente un vertice terminale di P ed un vertice terminale di Q.

Basandosi su questo teorema, si è costruito un algoritmo per il caso $p = 2$ avente complessità $O(\max\{n, Diam^2(T)\})$. Tale complessità è nel caso peggiore la stessa che si ottiene in [2]. Tuttavia, essendo la lunghezza media del diametro limitata da $O(\sqrt{n})$, nel caso medio l'algoritmo ha un tempo di risoluzione di $O(n)$. Successivamente si è considerato il caso $p = 3$ per cui si è costruito un algoritmo ricorsivo di complessità $O(n \max\{n, Diam^2(T)\})$ nel caso peggiore, e quindi di complessità $O(n^2)$ nel caso medio. Estendendo quest'ultimo algoritmo al caso $p > 3$ il problema del p-Path core ammette una procedura risolutiva di complessità $O(n^{p-2} \max\{n, Diam^2(T)\})$ ($O(n^{p-1})$ nel caso medio).

5. – Il Problema del Cammino Mediano su Grafi a Griglia.

In questa sezione della tesi si vuole studiare il problema del cammino mediano su grafi più generali rispetto agli alberi. Per tale problema esistono in letteratura algoritmi pseudopolinomiali su grafi serie-parallelo. Sia data allora una griglia $G = (V, E)$, con $|V| = n$, con associati pesi sia sugli spigoli che sui vertici. Siamo interessati al problema di localizzare un cammino che minimizza la somma delle distanze e di lunghezza minore od uguale ad L. Tale problema si dimostra essere NP-difficile attraverso una trasformazione dal problema del cammino Hamiltoniano su griglie. Si sono quindi considerate versioni più «ristrette» del problema. Sia data una griglia rettangolare e siano assegnati due punti ad esempio su i due angoli opposti di G. Si noti che ogni vertice della griglia può essere individuato attraverso le coordinate della riga e della colonna a cui appartiene. Si vuole trovare un cammino mediano tra questi due punti di lunghezza fissata. Anche questo problema è NP-difficile.

Alla luce di questi risultati si è introdotta una nuova nozione di distanza che chiamiamo *distanza verticale* ovvero supponiamo che, dato un cammino P ed un vertice $v \notin P$, la distanza minima da v a P sia la lunghezza del cammino da v al più vicino vertice di P che giace sulla stessa colonna di v. Sebbene si sia introdotta la nuova distanza, si dimostra che il problema di trovare un cammino P tra i due fissati punti, che minimizza la somma delle distanze verticali da P a tutti i vertici di G e di lunghezza al più L rimane NP-difficile (riduzione dal problema del Subset Sum). Il problema diventa polinomiale se invece di considerare il vincolo sulla lunghezza si considera il vincolo sulla cardinalità del cammino. Allora il problema di trovare un cammino che minimizza la somma delle distanze verticali di minima cardinalità tra due punti è risolubile in tempo $O(n)$ con un algoritmo di programmazione dinamica. Un ulteriore generalizzazione si ha quando si desidera che la cardinalità sia minore od uguale ad un dato valore l, per il quale esiste un algoritmo di programmazione dinamica di complessità $O(nl)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BECKER R. I., LARI I., SCOZZARI A. e STORCHI G., *Finding the l-core of a Tree,* apparirà in Discrete Applied Mathematics.

[2] BECKER R. I. e PERL Y., *Finding the Two-core of a Tree,* Discrete Applied Mathematics, **11** (1985), 103-113.

[3] HAKIMI S. L., SCHMEICHEL E. F. e LABBÈ M., *On Locating Path or Tree Shaped Facilities on Networks,* Networks, **23** (1993), 543-555.

[4] MORGAN C. A. e SLATER P. J., *A Linear Algorithm for a Core of a Tree,* Journal of Algorithms, **1** (1980), 247-258.

[5] PENG S. e LO W., *Efficient Algorithms for Finding a Core of a Tree with a Specified Length,* Journal of Algorithms, **20** (1996), 445-458.

[6] SHIOURA A. e UNO T., *A Linear Time Algorithm for Finding a k-Tree Core*, Journal of Algorithms, **23** (1997), 281-290.

Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
e-mail: scozzar@rosd.sta.uniroma1.it
Dottorato in Ricerca Operativa (sede amministrativa: Roma «La Sapienza») - Ciclo XIII
Direttore di Ricerca: Prof. Giovanni Storchi, Università di Roma «La Sapienza»