Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Lorenza Tonetto

Un modello non lineare, strutturato secondo l'età, per una popolazione infettata da macroparassiti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 551–554.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_551_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 551-554

Un modello non lineare, strutturato secondo l'età, per una popolazione infettata da macroparassiti.

LORENZA TONETTO

I modelli di epidemia *a densità*, nel contesto dei quali si colloca questa tesi, compaiono in riferimento ad infezioni dovute a macroparassiti (ad esempio zecche, elminti etc.) che si propagano in una popolazione di individui, i cosiddetti «ospiti». Per tali malattie la severità dell'infezione, come pure l'abilità nel diffonderla, dipendono essenzialmente dal numero di parassiti posseduti dall' ospite. Nella modellizzazione questo fatto conduce all'introduzione di un'infinità numerabile di variabili, p_n per ogni n numero naturale, p_n denotando il numero di individui con n parassiti. Il capostipite riconosciuto dei modelli a densità è quello di Kostizin (1934) che, in una versione particolarizzata, dà origine al seguente sistema infinito di equazioni differenziali ordinarie:

$$(1) \quad \begin{cases} p_0'(t) = -(\mu+\varphi)\, p_0(t) + \sigma p_1(t) + bN(t) \\ p_i'(t) = -(\mu+\varphi+i(\alpha+\sigma))\, p_i(t) + \sigma(i+1)\, p_{i+1}(t) + \varphi p_{i-1}(t) \end{cases} \qquad i \geq 1.$$

dove

$$N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t)$$

denota il numero totale di ospiti, b e μ sono rispettivamente i tassi di fertilità e di mortalità naturale degli ospiti, α è il tasso addizionale di mortalità per ogni parassita posseduto, σ il tasso di mortalità dei parassiti e ϕ il tasso di infezione. Nel 1982 Hadeler e Dietz introducono la struttura di età: il modello di base è quello classico di popolazione con struttura di età, con tasso di mortalità dipendente dall'età, ma tasso di fertilità non dipendente né dalla struttura d'età né dalla totalità della popolazione. Si tratta di un sistema infinito di equazioni alle derivate parziali con condizioni al bordo e iniziali, per il quale esistenza e unicità di una soluzione locale vengono provate facendo ricorso alla funzione generatrice. Il modello studiato nella tesi in oggetto prende le mosse dal modello di Hadeler e Dietz in [4] che viene modificato permettendo la dipendenza della fertilità dall'età e dalla totalità della popolazione e specificando diversamente il tasso di infezione. Più precisamente, per ogni $i = 0, 1, 2 \ldots$, $p_i = p_i(a, t)$ è una funzione di due variabili, l'età a e il tempo t, tale che, se $0 \leq a_1 < a_2$, l' integrale

$$\int_{a_1}^{a_2} p_i(a, t)\, da$$

fornisce il numero di ospiti che al tempo t hanno età compresa tra a_1 e a_2 e possiedono i parassiti.

Con $N(t)$ e $P(t)$ indichiamo rispettivamente il numero totale di ospiti e il numero totale di parassiti al tempo t

$$N(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p_i(a, t)\, da \quad \text{e} \quad P(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \int_0^{+\infty} p_i(a, t)\, da. \tag{2}$$

Si assume che gli ospiti nascano secondo un tasso di fertilità $\beta(a, \mathbf{p}) = \psi(N)\,\beta_0(a)$, dove $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ e ψ soddisfa $\psi(0) = 1$, $\psi' < 0$, $\psi(\infty) = 0$, e che muoiano secondo un tasso di mortalità naturale $\mu(a) = \mu_0(a)$ al quale si deve aggiungere il tasso di mortalità addizionale $\alpha > 0$ per ogni parassita in carico. I parassiti muoiono ad un tasso $\sigma > 0$.

L'epidemia si diffonde tra gli ospiti secondo un tasso ϕ dato da

$$\phi(t) = \frac{hP(t)}{c + N(t)} \tag{3}$$

con h e c costanti.

Sotto queste ipotesi la dinamica della popolazione è governata dal seguente sistema infinito

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} p_i(a, t) = -\dfrac{\partial}{\partial a} p_i(a, t) - (\mu(a) + \phi(t) + i(\alpha + \sigma))\, p_i(a, t) \\ \qquad\qquad + \sigma(i+1)\, p_{i+1}(a, t) + \phi(t)\, p_{i-1}(a, t) \quad i \geqslant 0 \\ p_0(0, t) = \psi(N(t)) \displaystyle\int_0^{+\infty} \beta_0(a) \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(a, t)\, da \\ p_i(0, t) = 0 \quad i > 0 \\ p_i(a, 0) = h_i(a) \quad i \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

dove $p_{-1}(a, t) \equiv 0$, e le funzioni $h_i \geqslant 0$, che danno la distribuzione iniziale della popolazione, sono tali che

$$\int_0^{+\infty} h_0(a)\, da + \sum_{i=1}^{+\infty} i \int_0^{+\infty} h_i(a)\, da < +\infty.$$

Dalla condizione al bordo segue facilmente che esiste una soluzione stazionaria in assenza di parassiti se e solo se esiste $K > 0$ tale che $\psi(K) = 1/R_0$ dove $R_0 = \int_0^{+\infty} \beta_0(a)\, e^{-\int_0^a \mu(s)\, ds}\, da$ cioè, viste le ipotesi sulla funzione ψ, se e solo se $R_0 > 1$, assunzione che viene fatta. Il valore K (che è unico) è detto *capacità portante* del sistema.

Per analizzare il problema si è scelto l'approccio astratto con la teoria dei semigruppi di operatori: il sistema 4 è stato trasformato in un problema di Cauchy astratto

$$\begin{cases} p'(t) = A(p(t) + H(p(t))) + F(p(t)) \\ p(0) = p^0. \end{cases} \tag{5}$$

ambientato nello spazio di Banach $X := \{p = (p_i(a))_{i \in \mathbb{N}}: p_i \in L^1(0, +\infty)\ \forall i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{\infty} |p_i(a)|\, da < \infty\}$ con la norma

$$\|p\| := \int_0^{\infty} |p_0(a)|\, da + \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{\infty} |p_i(a)|\, da.$$

A è un operatore lineare su X che si prova essere il generatore di un C_0-semigruppo e^{tA}, mentre H e F sono operatori non lineari su X, H essendo a valori nel *dominio generalizzato* o *classe di Favard* di A, F_A, entrambi localmente Lipschitz. Il primo risultato è del tutto generale ed è una lieve estensione del teorema di esistenza e unicità in [3]:

TEOREMA 1. – *Siano X uno spazio di Banach, $A : D(A) \to X$ un operatore lineare con dominio $D(A) \subset X$, generatore di un C_0-semigruppo e^{tA}. Siano $H : X \to F_A$ e $F : X \to X$ localmente Lipschitz. Allora*

a) per ogni $p^0 \in X$ esiste un'unica soluzione mild di (5) *i.e. un'unica funzione continua $t \to p(t)$ soddisfacente l'equazione integrale*

$$p(t) = e^{tA} p^0 + A \int_0^t e^{(t-s)A} H(p(s))\, ds + \int_0^t e^{(t-s)A} F(p(s))\, ds; \tag{6}$$

b) de $[0, t_{max})$ è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione, allora $t_{max} = +\infty$ oppure $\lim_{t \to t_{max}^-} \|p(t)\| = +\infty$;

c) se H e F sono differenziabili con continuità $(p^0 + H(p^0)) \in D(A)$ allora $p(t)$ è una soluzione classica di (5), *i.e. $p(t) + H(p(t)) \in D(A)$ per ogni $t \in [0, t_{max})$, $p(t)$ è differenziabile e soddisfa l'equazione $p'(t) = A(p(t) + H(p(t))) + F(p(t))$.*

Poiché, con riferimento al nostro problema, si prova che una soluzione mild con dato iniziale positivo resta sempre positiva e che H e F sono differenziabili con continuità nel cono positivo di X, si riesce a concludere che, se il dato iniziale p_0 è positivo e sufficientemente regolare (cioè $p_0 + H(p_0) \in D(A)$), la soluzione mild collegata è in realtà soluzione classica. Si conclude quindi che, a patto di restringersi ad un insieme opportuno di dati iniziali, il problema (5) dà origine ad un semigruppo non lineare $T(t)$.

Il secondo risultato fornisce la linearizzazione del problema (5) attorno ad un equilibrio, nelle ipotesi generali del Teorema 1.

Sia p^* un arbitrario ma fissato equilibrio dell'equazione in (5). Siano $H'(p^*)$ e $F'(p^*)$ le derivate secondo Fréchet di H e F in p^* e per $p \in X$ tale che $p + H'(p^*)p \in D(A)$ si definisca

$$Bp := A(I + H'(p^*))\,p + F'(p^*)\,p. \tag{7}$$

TEOREMA 2. – *L'operatore lineare B definito in* (7) *genera un C_0-semigruppo che è la derivata secondo Fréchet in p^* del semigruppo non lineare $T(t)$, i.e. e^{tB} è tale che*

$$\lim_{p \to p^*} \frac{\|T(t)\,p - p^* - e^{tB}(p - p^*)\|}{\|p - p^*\|} = 0,$$

e la convergenza è uniforme per $t \in [0, T]$, $T > 0$.

Di seguito si analizza la stabilità dell'equilibrio senza parassiti (unico, corrispondente alla soluzione stazionaria senza parassiti di (4)) nelle ipotesi semplificative di mortalità e fertilità costanti, $\mu(a) \equiv \mu$ e $\beta_0(a) \equiv \beta$. Utilizzando un risultato di Desch e Schappacher in [1], si prova che tale equilibrio è esponenzialmente asintoticamente stabile se sussiste una certa relazione tra i parametri del sistema. Di più, se tale relazione non vale si mostra che l'equilibrio è instabile. Infine, si prova che l'instabilità dell'equilibrio senza parassiti è equivalente all'esistenza di equilibri positivi (cioè con $\phi > 0$).

BIBLIOGRAFIA

[1] DESCH W., SCHAPPACHER W., *Linearized stability for nonlinear semigroups*, Differential equations in Banach spaces - Lecture Notes in Math., **1223** (1986), 61-73.

[2] DESCH W., SCHAPPACHER W., *Some generation results for perturbed semigroups*, Semigroup theory and applications - Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **116** (1989), 125-152.

[3] DESCH W., SCHAPPACHER W., ZHANG K. P., *Semilinear evolution equations*, Houston J. Math., 4 (1989), 527-552.

[4] HADELER K. P., DIETZ K., *Nonlinear hyperbolic partial differential equations for the dynamics of parasite populations*, Comput. Math. Appl., **9** (1983), 415-430.

Dipartimento di Matematica, Università di Trento
e-mail: tonetto@science.unitn.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Trento) - Ciclo XII
Direttore di ricerca prof. Andrea Pugliese