Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Daniela Visetti

Un problema agli autovalori per un sistema di equazioni quasilineari ellittiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 563–565.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_563_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 563-565

Un problema agli autovalori per un sistema di equazioni quasilineari ellittiche.

DANIELA VISETTI

In questa tesi si considera il seguente sistema di equazioni non lineari:

$$(P_\varepsilon) \qquad -\Delta u + V(x)u + \varepsilon(-\Delta_p u + W'(u)) = \mu u$$

dove u è una funzione da $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^{n+1}$ con $n \geq 3$, ε è un parametro positivo e $p \in \mathbf{N}$ con $p > n$. Il problema (P_ε) è studiato sia nel caso in cui Ω sia un dominio liscio e limitato, sia nel caso in cui Ω sia tutto $\mathbf{R}^n$. In $\mathbf{R}^n$ viene studiato anche il caso simmetrico.

La funzione V è reale, $V: \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, e W' rappresenta il gradiente della funzione $W: \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\xi_\star\} \to \mathbf{R}$, dove $\xi_\star$ è un punto di $\mathbf{R}^{n+1}$ diverso dall'origine.

Il motivo della scelta del presente problema agli autovalori (P_ε) merita alcune spiegazioni. Si consideri l'equazione di Schrödinger non lineare

$$(1) \qquad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + V(x)\,\psi + \varepsilon N(\psi)$$

dove $\psi: \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ed $N(\psi)$ è un operatore differenziale non lineare. Le soluzioni stazionarie dell'equazione (1)

$$\psi(x, t) = u(x)\, e^{-i\mu t},$$

con $u: \Omega \to \mathbf{R}$, sono in corrispondenza con le soluzioni del seguente problema non lineare agli autovalori

$$(2) \qquad -\Delta u + V(x)\, u + \varepsilon N(u) = \mu u$$

a condizione che si abbia

$$(3) \qquad N(u(x)e^{-i\mu t}) = e^{-i\mu t} N(u(x))\,.$$

È possibile estendere l'operatore non lineare

$$(4) \qquad N(u) = -\Delta_p u + W'(u)$$

alle funzioni complesse in modo da verificare (3).

La scelta dell'operatore (4) è motivata da una congettura proposta da Derrick in un articolo del 1964 ([1]). Derrick cercava un modello per rappresentare particelle elementari nello spazio (in $\mathbf{R}^n$, con $n > 1$) e per questo motivo considerò una generalizzazione dell'equazione di sine-Gordon in una dimensione. Più precisamente considerò l'equazione

$$-\Delta\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2}f'(\varphi) = 0,$$

dove f' è il gradiente di una funzione f C^1 reale e non negativa e la funzione φ ha dominio $\mathbf{R}^n$ con $n > 2$. Con un semplice argomento di riscalamento dimostrò che questa equazione non possiede soluzioni statiche non banali. Presentò inoltre alcune congetture per risolvere questo problema: una delle proposte fu di considerare potenze più alte delle derivate nella Lagrangiana. Tale congettura è stata studiata da Benci, Fortunato e Pisani in un articolo del 1998 ([2]): dimostrarono che il sistema di equazioni

$$-\Delta\varphi - \Delta_6\varphi + W'(\varphi) = 0, \tag{5}$$

dove $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ e $W : \mathbf{R}^4\{\xi_\star\} \to \mathbf{R}$ è una funzione singolare, ammette una soluzione non banale con l'energia concentrata intorno all'origine e con un comportamento particellare. Le funzioni dello spazio delle configurazioni (e conseguentemente le soluzioni del problema) sono caratterizzate da un invariante topologico, detto carica topologica, che assume valori interi: anche da questo punto di vista c'è un'analogia con il caso dell'equazione di sine-Gordon. Si può dunque dire che l'esistenza di queste soluzioni concentrate è garantita da vincoli topologici.

* * * * *

Questa tesi dà un risultato di esistenza e molteplicità di soluzioni per il problema (P_ε). L'idea è considerare il problema (P_ε) come una perturbazione del problema lineare (P_0). In termini dei funzionali energia associati, si passa dal funzionale non simmetrico J_ε al funzionale simmetrico J_0. Perturbazioni non simmetriche di un problema simmetrico, che preservano valori critici, sono state studiate da molti autori (per brevità si omette qui la bibliografia su questo argomento).

Il risultato d'esistenza è quindi un risultato di preservazione per il funzionale J_ε di certi valori critici del funzionale J_0, vincolato sulla sfera unitaria di $L^2(\Omega, \mathbf{R}^{n+1})$.

Poiché la carica topologica divide il dominio Λ del funzionale energia J_ε in componenti connesse Λ_q con $q \in \mathbf{Z}$, le soluzioni si trovano in ogni componente connessa e in due modi diversi: come minimi e come punti critici di min-max del funzionale energia vincolato sulla sfera unitaria di $L^2(\Omega, \mathbf{R}^{n+1})$. Il numero di soluzioni è finito, ma può essere reso grande a piacere, purché il parametro ε sia sufficientemente piccolo e il punto singolare $\xi_\star$ sia sufficientemente lontano dall'origine di $\mathbf{R}^{n+1}$:

Dato $q \in \mathbf{Z}$, per ogni $\xi_\star = (\xi_0, 0)$ (con $\xi_0 > 0$ e $0 \in \mathbf{R}^n$) e per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $\mu_1(\varepsilon)$ e $u_1(\varepsilon)$ rispettivamente autovalore e autofunzione del problema (P_ε), tali che la carica topologica di $u_1(\varepsilon)$ sia q.

Inoltre, dato $q \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ e dato $k \in \mathbf{N}$, consideriamo $\xi_\star = (\xi_0, 0)$ con ξ_0 suffi-

cientemente grande e $0 \in \mathbf{R}^n$. *Siano* λ_j *gli autovalori del problema lineare* (P_0). *Allora per* ε *abbastanza piccolo e per ogni* $j \leqslant k$ *con* $\lambda_{j-1} < \lambda_j$, *esistono* $\mu_j(\varepsilon)$ *e* $u_j(\varepsilon)$ *rispettivamente autovalore e autofunzione del problema* (P_ε), *tali che la carica topologica di* $u_j(\varepsilon)$ *sia* q.

* * * * *

Questa tesi si divide in quattro parti.

La prima parte è dedicata ad argomenti classici e introduttivi, o noti in generale. Inizialmente vengono presentate sia le motivazioni fisiche che quelle matematiche per studiare le onde solitarie: il problema concreto che diede origine allo studio delle onde solitarie e dei solitoni, la congettura di Derrick e la relazione con la Meccanica Quantistica e Bohmiana. Poi viene introdotta la carica topologica, dovuta a Benci, Fortunato e Pisani. Infine si richiamano argomenti di base quali i teoremi di immersione di Sobolev, la teoria spettrale per i problemi lineari e risultati classici nello studio dei punti critici.

Le parti seguenti contengono il lavoro originale. La parte seconda affronta il problema (P_ε) su un dominio liscio e limitato Ω di $\mathbf{R}^n$, la parte terza su tutto $\mathbf{R}^n$ ed infine la parte quarta presenta il problema su $\mathbf{R}^n$, ma in un contesto simmetrico. Ognuna di queste parti comprende la definizione di opportuni spazi di funzioni, lo studio delle proprietà di compattezza del funzionale e lo studio del problema lineare agli autovalori associato. Dopo questi preliminari si perviene direttamente al primo risultato di esistenza, mentre per poter esibire il secondo risultato d'esistenza è necessario costruire dei valori critici, con metodi di min-max, partendo da alcune funzioni appositamente scelte.

BIBLIOGRAFIA

[1] Derrick C. H., *Comments on Nonlinear Wave Equations as Model for Elementary Particles,* Journal of Mathematical Physics, **5** (1964), 1252-1254.

[2] Benci V., Fortunato D. e Pisani L., *Soliton-like solution of a Lorentz invariant equation in dimension 3,* Reviews in Mathematical Physics **10** (1998), 315-344.

[3] Benci V., D'Avenia P., Fortunato D. e Pisani L., *Solitons in several space dimensions: Derrick's problem and infinitely many solutions,* Archive for Rational Mechanics and Analysis **154** (2000), 297-324.

Dipartimento di Matematica «L. Tonelli», Università di Pisa
e-mail: visetti@dm.unipi.it.
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XII
Direttori di ricerca: Prof. Vieri Benci
Prof. Anna Maria Micheletti, Università di Pisa