Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Andrea Ziggioto

Comportamento asintotico dello spettro di operatori multi-quasi-ellittici di tipo Schrödinger

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2001), n.3 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 567–569.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_3_567_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IV-A, Dicembre 2001, 567-569

Comportamento asintotico dello spettro di operatori multi-quasi-ellittici di tipo Schrödinger.

ANDREA ZIGGIOTO

Nella nostra tesi abbiamo studiato il comportamento asintotico dello spettro di una certa classe di operatori differenziali in $\mathbb{R}^n$ di tipo ipoellittico, con simbolo divergente a $+\infty$.

Lo studio del comportamento asintotico degli autovalori di operatori differenziali fu iniziato da Hermann Weyl all'inizio del ventesimo secolo per l'operatore di Laplace in un dominio limitato ed esteso poi in varie direzioni da molti autori negli anni seguenti.

Per quanto concerne l'operatore di Schrödinger con potenziale divergente a $+\infty$ (e, più generalmente, con un simbolo ipoellittico divergente a $+\infty$), sono stati adottati due metodi: il metodo della proiezioni spettrali approssimate ed il metodo dell'operatore iperbolico. Noi abbiamo seguito il primo metodo, che più generale, sebbene i risultati ottenuti siano meno precisi.

Il metodo delle approssimazioni spettrali approssimate fu introdotto da Tulovskiĭ e Shubin nel 1973 (vedi [5]) e migliorato ed esteso da molti autori. Tra di essi, Feĭgin ottenne una formula asintotica con stima del resto per la funzione di conteggio di un operatore differenziale di tipo ipoellittico con coefficienti dalla crescita più che esponenziale.

Questo risultato venne migliorato da Dencker (vedi [3]) nell'ambito del calcolo di Weyl-Hörmander con metriche e pesi localmente temperati, generalizzando in questo modo anche risultati precedenti di Hörmander (vedi [4]).

Sfortunatamente, questo metodo dà una stima del resto che non è sempre infinitesima, come dimostrato da Buzano in [1] con un esempio di operatore di Schrödinger, per una opportuna scelta del potenziale.

Pertanto, abbiamo trovato una ampia classe di operatori di tipo ipoellittico di tipo Schrödinger per i quali la stima del resto nella formula asintotica (chiamata anche formula di Weyl) è sempre infinitesima.

Questi operatori di tipo Schrödinger sono la somma di una operatore multi-quasi-ellittico a coefficienti variabili e un potenziale verificante una condizione tauberiano.

Per questi operatori troviamo una stima esplicita del resto della formula di Weyl:

$$R_\varepsilon(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-\varepsilon}) \quad \text{quando} \quad \tau \to +\infty,$$

per un opportun $\varepsilon > 0$.

Inoltre, otteniamo anche una semplificazione nella formula di Weyl, dal momento che riusciamo a sostituire il simbolo totale con il simbolo principale dell'operatore.

Oltre a questo, abbiamo anche migliorato il risultato generale di Dencker sostituendo la sua ipotesi

$$1 + |x| + |\xi| \leq p^{n_0}$$

per un opportuno $n_0 > 0$ (dove p è il simbolo dell'operatore) con l'ipotesi più debole di integrabilità:

$$p^{-n_0} \in L^1.$$

I nostri risultati son un parziale miglioramento rispetto a quelli contenuti nell'articolo [2], scritto in collaborazione con Buzano.

Le tecniche che abbiamo utilizzato al fine di ottenere i nostri risultati sono essenzialmente le seguenti due:

1. il calcolo di Weyl-Hörmander per operatori pseudodifferenziali, usando la generalizzazione data da Dencker per le metriche e i pesi localmente temperati;

2. tecniche di interpolazione, al fine di trascurare i termini di ordine inferiore dell'operatore nelle nostre stime.

Il nostro lavoro è suddiviso in tre parti. Un capitolo preliminare riguarda l'esposizione di alcuni importanti risultati circa il calcolo di Weyl-Hörmander, che abbiamo usato in seguito.

Nel secondo capitolo abbiamo iniziato il nostro argomento principale, cioè la teoria spettrale, descrivendo il comportamento asintotico dello spettro di operatori differenziali di tipo ipoellittico. In questo capitolo sviluppiamo gli strumenti necessari per dimostrare la formula di Weyl. Perciò, dopo aver richiamato alcuni fatti generali riguardanti la teoria spettrale negli spazi di Hilbert, introduciamo gli operatori di classe traccia e diamo una stima della norma di classe traccia. Qui anche descriviamo in dettaglio il metodo delle proiezioni spettrali approssimate.

Nell'ultimo capitolo, dopo aver dato alcune definizioni e risultati sui pesi multi-quasi-ellittici, abbiamo introdotto la nostra classe di operatori di tipo Schrödinger. Poi, in base ai risultati ottenuti nel secondo capitolo, abbiamo ricavato la formula di Weyl per questi operatori, usando le sopra menzionate tecniche di interpolazione.

Abbiamo concluso il nostro lavoro con alcune considerazioni circa il caso particolare e molto importante degli operatori quasi-ellittici. Per questo tipo di operatori, la formula di Weyl viene ad avere una forma esplicita, perché il cosiddetto termine di Weyl (che esprime il volume del simbolo) può essere calcolato direttamente. Inoltre si ottiene anche un miglioramento nella stima del resto.

Illustriamo i nostri riusltati presentando un esempio molto semplice di operatore multi-quasi-ellittico di tipo Schrödinger in $\mathbb{R}^2$, che non è quasi-ellittico:

$$P = D_x^6 + D_x^4 D_y^2 + D_y^4 + (1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

È facile dimostrare che questo operatore verifica tutte le ipotesi del nostro teorema principale. Dopo semplici calcoli, otteniamo la seguente formula di Weyl:

$$\mathcal{N}(\tau; P) = W(\tau; p_0)\{1 + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{3}{11}\varepsilon})\}, \quad \text{quando} \quad \tau \to +\infty,$$

dove

$$W(\tau; p_0) = \int_{\xi^6 + \xi^4\eta^2 + \eta^4 + (1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)^{1/2} \leq \tau} dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

e

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{18}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BUZANO E., *Some remarks on the Weyl asymptotics by the approximate spectral projection method,* Boll. U.M.I. (2000), 1-15.

[2] BUZANO E., ZIGGIOTO A., *Weyl formula for multi-quasi-elliptic operators of Schrödinger-type,* Accettato per la pubblicazione in Annali di Matematica Pura e Applicata (2000).

[3] DENCKER N., *The Weyl calculus with locally temperate metrics and weights,* Archiv för Math., **24** (1986), 59-79.

[4] HÖRMANDER L., *On the asymptotic distribution of the eigenvalues of pseudodifferential operators in* $\mathbb{R}^n$, Archiv för Math., **17** (1979, 297-313.

[5] TULOVSKIĬ V. N., SHUBIN M. A., *On the asymptotic ditribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in* $\mathbb{R}^n$, Math.USSR Sbornik, **21** (1973), 565-583.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: ziggioto@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Buzano, Università di Torino