
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIA GRAZIA MARINARI

Sugli ideali di Borel

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 4-B (2001),
n.1, p. 207–237.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_1_207_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sugli ideali di Borel.

MARIA GRAZIA MARINARI

Summary. – *In this note we study some algebraic properties of Borel Ideals in the ring of polynomials over an effective field of characteristic zero by using a suitable partial order relation defined on the set of terms of each degree. In particular, in the three variable case, we characterize all the 0-dimensional Borel ideals corresponding to an admissible h -vector and their minimal free resolutions.*

Introduzione.

Gli ideali *di Borel* sono particolari ideali monomiali di $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ (ampiamente studiati a partire dal lavoro fondamentale di F. Macaulay) e la loro importanza è rivelata da un noto teorema di A. Galligo ([12]) secondo il quale, in caratteristica 0, per ogni ideale $\alpha \subseteq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ e cambiamento generico di coordinate, l'ideale iniziale è di Borel e non varia. Tale ideale è chiamato *ideale iniziale generico* di α ed è denotato $gin(\alpha)$.

Recentemente G. Floystad e M. Green in ([10], [11]) hanno evidenziato come $gin(\alpha)$ contenga alcune notevoli informazioni geometriche sulla varietà $\mathcal{V}(\alpha)$ definita da α .

Lo scopo di questo lavoro è quello di studiare alcune proprietà algebriche degli ideali di Borel e di fornire una loro caratterizzazione nel caso in cui $n = 3$. Per fare questo ci serviremo di una relazione di ordine parziale $<$ sull'insieme dei termini (= monomi monici) di $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, introdotta in [16], e del concetto di *j -predecessore* u_j di un termine $t = X_j u_j$ (la cui rilevanza nel campo dell'algebra computazionale è stata sottolineata, per esempio, in [9] e [15]).

Precisamente, dopo avere richiamato nel §1 le principali notazioni usate, nei §2 e §3 si studiano i predecessori dei sottinsiemi e ideali di Borel di $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Infine nei §4, §5, §6 viene fornita un'ampia caratterizzazione degli ideali di Borel di $\mathbf{k}[X, Y, Z]$ attraverso l'analisi degli h -vettori ammissibili. Vengono in particolare date condizioni necessarie e sufficienti affinché due ideali di Borel $\alpha, \mathfrak{b} \subseteq \mathbf{k}[X, Y, Z]$ abbiano la stessa risoluzione (libera minimale) numerica. E inoltre, dato un h -vettore ammissibile h ,

(*) L'autore ha usufruito di finanziamenti MURST e GNSAGA (CNR).

viene caratterizzato l'ideale di Borel, corrispondente ad h , che ha i migliori numeri di Betti possibili.

Molti dei risultati contenuti in questo lavoro sono maturati *a latere* durante la preparazione di [16], per questo un sincero ringraziamento va a L. Ramella, soprattutto per il suo criticismo e diffidenza che hanno portato a chiarire alcune intuizioni non troppo riflettute. Rilevante è stato anche l'apporto di T. Mora che ha originato tutto il lavoro sugli ideali di Borel e ha ispirato le idee di base.

1. - Notazioni.

Per le notazioni si rimanda a [15] e [16].

Ricordiamo solo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{T}(n) := \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ denota il *semi-gruppo* (moltiplicativo) *dei termini* (= monomi monici) sui simboli X_1, \dots, X_n e X^a significa $X_1^{a_1} \cdot \dots \cdot X_n^{a_n}$ con $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$.

Inoltre, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{T}(i) := \langle X_1, \dots, X_i \rangle \subseteq \mathbf{T}(n)$ e $\mathbf{T}'(i, n) := \langle X_{n-i+1}, \dots, X_n \rangle \subseteq \mathbf{T}(n)$.

Salvo esplicito avviso contrario $<$ indica uno qualsiasi tra i due ordini di termini *deg-lex* o *deg-rev-lex* per cui $X_1 < \dots < X_n$.

Similmente, $\mathbf{P}(n) := \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ denota l'*anello dei polinomi in n indeterminate* su un campo effettivo \mathbf{k} di caratteristica 0; $\mathfrak{m}(n) := (X_1, \dots, X_n)$; inoltre per ogni $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)_d \subseteq \mathbf{P}(n)$ indica la parte omogenea di grado d e per ogni $M \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(n))$, $M_d := M \cap \mathbf{P}(n)_d$.

In particolare, se $\alpha \subseteq \mathbf{P}(n)$ è un ideale omogeneo, per ogni $d \in \mathbb{N}^*$, si considera $\mathcal{N}(\alpha)_d := \mathbf{T}(n)_d \setminus T(\alpha)$, dove $T(\alpha)$ denota l'ideale di semigruppo generato dai termini direttivi degli elementi di α .

Se $n = 3$ anziché $\mathbf{T}(3)$, $\mathbf{P}(3)$, $\mathfrak{m}(3)$, $\mathbf{T}(2)_d$ e $\mathbf{T}'(2, 3)_d$ scriveremo semplicemente \mathbf{T} , \mathbf{P} , \mathfrak{m} , \mathbb{T}_d , \mathbb{T}'_d e X, Y, Z invece di X_1, X_2, X_3 .

Per ogni $t = X^a \in \mathbf{T}(n)$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $a_j > 0$, l'unico $u_j \in \mathbf{T}(n)$ con $t = X_j u_j$ è chiamato *j -predecessore* di t .

Per ogni $A \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(n))$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ l'*insieme dei j -predecessori degli elementi di A* è $Pd_j(A) := \{u_j \in \mathbf{T}(n) : \exists t \in A, t = X_j u_j\}$, mentre l'*insieme dei predecessori di A* è $Pd(A) := \bigcup_{j=1}^n Pd_j(A)$.

Poiché per ogni $t \in \mathbf{T}(n)$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ tali che t abbia j -predecessore u_j risulta $\text{grado}(u_j) = \text{grado}(t) - 1$ e poiché ogni $A \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(n))$ può essere pensato come $A = \bigsqcup_{d \in \mathbb{N}} A_d$, vale $Pd(A) = \bigsqcup_{d \in \mathbb{N}} Pd(A_d)$.

Se $\alpha \subseteq \mathbf{P}(n)$ è un ideale monomiale di grado iniziale $d > 1$, generato in gradi $\leq s + 1$ e con sistema minimale di generatori $G(\alpha) \subseteq \mathbf{T}(n)$, per ogni $l \in \{2, \dots, n\}$ e $j \in \{d, \dots, s + 1\}$ poniamo:

nei quali, (cf. [16] Rem. 2.6. b)) è possibile leggere tutti i termini di \mathbf{T}_d , ordinati rispetto ai diversi ordinamenti. Più precisamente, partendo da sinistra in alto e muovendosi contro le frecce lungo le righe (risp. lungo le colonne) si legge (in senso crescente) deg-lex (risp. deg-rev-lex) con $X < Y < Z$. Viceversa, partendo da destra in basso e muovendosi secondo le frecce lungo le righe (risp. lungo le colonne) si legge (in senso crescente) deg-rev-lex (risp. deg-lex) con $X > Y > Z$.

Notiamo anche che, se per ogni $d \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{1, \dots, d+1\}$ indichiamo con $l_{i,d}$ (risp. $c_{i,d}$) la i -ma riga dall'alto (risp. la i -ma colonna da destra) del «triangolo» corrispondente a \mathbf{T}_d , si ha $l_{1,d} = \mathbb{T}_d$ (risp. $c_{1,d} = \mathbb{T}'_d$) e vale

$$\#l_{i,d} = \#c_{i,d} = d + 1 - (i - 1) = d + 2 - i.$$

Inoltre, per ogni $a \in \{1, \dots, d+1\}$ si ha

$$\begin{aligned} \# \bigcup_{j=1}^a l_{j,d} &= \# \bigcup_{j=1}^a c_{j,d} = \sum_{i=1}^a (d + 2 - i) = a(d + 2) - a/2(2d + 4 - a - 1) = \\ &= a/2(2d - a + 3). \end{aligned}$$

$$\text{Risulta infine } \mathbf{T}_d \setminus \bigsqcup_{i=1}^a l_{i,d} = Z^a \mathbf{T}_{d-a} \text{ e } \mathbf{T}_d \setminus \bigsqcup_{i=1}^a c_{i,d} = X^a \mathbf{T}_{d-a}.$$

2. – Sottinsiemi e ideali di Borel.

In questo § richiamiamo le definizioni di sottinsieme di Borel (con grado assegnato) di $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ e di ideale di Borel di $\mathbf{P}(\mathbf{n})$, illustrandone alcune proprietà generali.

DEFINIZIONE 2.1. – Per ogni $d \in \mathbb{N}^*$,

1) Si dice sottinsieme di Borel di grado d un $B \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n})_d)$ con la proprietà che se $X_1^{a_1} \dots X_i^{a_i} \dots X_j^{a_j} \dots X_n^{a_n} \in B$, allora per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ con $a_j > 0$, risulta $X_1^{a_1} \dots X_i^{a_i+1} \dots X_j^{a_j-1} \dots X_n^{a_n} \in B$ per ogni $i < j$.

2) Si dice segmento lex di grado d un $L \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n})_d)$ con la proprietà che se $t \in L$ allora risulta $\tau \in L$ per ogni $\tau \in \mathbf{T}(\mathbf{n})_d$ tale che $\tau <_{lex} t$. In modo simile si definisce il segmento r-lex di grado d , $A \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n})_d)$.

OSSERVAZIONE 2.2. – a) Ogni $B \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n})_d)$ di Borel è stabile rispetto a « \rightarrow » viceversa ogni $A \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n})_d)$ stabile rispetto a « \rightarrow » è di Borel.

b) I segmenti lex ed r-lex sono sottinsiemi di Borel di $\mathbf{T}(\mathbf{n})_d$, inoltre, per ogni $\omega \in \left\{1, \dots, \binom{n+d-1}{n-1}\right\}$, esiste un unico segmento lex (risp. r-lex) $L_{n,\omega,d}$ (risp. $A_{n,\omega,d}$) contenente ω elementi.

c) Se $n = 3$ scriveremo semplicemente $L_{\omega, d}$ (risp. $A_{\omega, d}$). Inoltre, per ogni $a \in \{1, \dots, d + 1\}$, risulta $\bigcup_{j=1}^a l_{i, d} = L_{a/2(2d-a+3), d}$ mentre $\bigcup_{j=1}^a c_{i, d} = \mathbf{T}_d \setminus A_{\binom{d-a+2}{2}, d}$. In particolare, se $a = d + 1$, risulta $\bigcup_{j=1}^a l_{i, d} = \bigcup_{j=1}^a c_{i, d} = \mathbf{T}_d$.

DEFINIZIONE 2.3. – Un ideale monomiale $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$ si dice di Borel (risp. segmento lex, segmento r-lex) se, per ogni $d \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{N}(\mathfrak{b})_d$ è di Borel (risp. segmento lex, segmento r-lex) (cf. [16] Def. 2.9.).

OSSERVAZIONE 2.4. – a) Per ogni ideale di Borel $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$ di grado iniziale $d > 1$ risulta $\nu_{n, d} = 1$ e $\nu_{n, j} = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N} \setminus \{d\}$, si ha infatti $X_n^d \in \mathfrak{b}$ e $X_n^j \notin \mathfrak{b}$ per ogni $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$ (cf. [16] Rem. 2.10. a)).

b) È stato provato da Macaulay che per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, n, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ esiste un (unico) ideale segmento lex (0-dimensionale) $\mathcal{L}(h)$ che ha h come h -vettore (vedi, per esempio, [4] Th. 4.2.10.). Gli ideali segmento r-lex (0-dimensionali) $A(h)$ esistono invece solo per una classe ristretta di h -vettori ammissibili h (cf. [6] Prop. 3.3. e Prop. 3.6., [16] Prop. 2.13.). Per questo, soprattutto in [6], sono state introdotte diverse generalizzazioni della nozione di segmento r-lex.

DEFINIZIONE 2.5. – 1) Un ideale monomiale $\alpha \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$ è detto definitivamente segmento r-lex se esiste $D \in \mathbb{N}^*$ tale che $\mathcal{N}(\alpha)_d$ sia segmento r-lex (eventualmente \emptyset) per ogni $d \geq D$.

2) Un ideale monomiale $\alpha \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$ con grado iniziale $d' > 1$ e sistema minimale di generatori $G(\alpha) \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{n})$, è detto quasi segmento r-lex se:

(a) $\mathbf{T}(\mathbf{n})_{d'} \setminus G(\alpha)_{d'} = A_{n, \omega, d'}$ con $\omega = \binom{n + d' - 1}{n - 1} - \#G(\alpha)_{d'}$

(b) per ogni $d > d'$ con $G(\alpha)_d \neq \emptyset$, posto $\tau_d = \min_{r\text{-lex}} \{\tau \in G(\alpha)_d\}$, si ha $\alpha_d \supseteq \{t \in \mathbf{T}(\mathbf{n})_d : t \geq_{r\text{-lex}} \tau_d\}$.

3) Un ideale monomiale $\alpha \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$ con grado iniziale $d > 1$ è detto inizialmente segmento r-lex se $\mathcal{N}(\alpha)_d$ è segmento r-lex.

OSSERVAZIONE 2.6. – a) Ogni ideale segmento r-lex è quasi segmento r-lex (cf. [6] Prop. 4.4.) e definitivamente segmento r-lex.

b) Ogni ideale quasi segmento r-lex è inizialmente segmento r-lex.

c) Ogni ideale 0-dimensionale è banalmente un ideale definitivamente segmento r-lex (basta applicare [6] Cor. 2.15.).

ESEMPIO 2.7. – 1) Sia $h = (1, 3, 6, 7, 8, 4)$, poiché $h_3 = 7 < \binom{3+2}{2}$ e $h_4 >$

h_3 , non esiste $A(h)$ (cf. [16] Prop. 2.13.). D'altra parte, l'ideale 0-dimensionale $\alpha = (Z^3, YZ^2, Y^2Z, Y^5, XY^4, X^2Y^3, X^3Z^2, X^3YZ, X^4Y^2, X^5Z, X^5Y, X^6)$ è quasi segmento r -lex e ha h come h -vettore. Infatti, con la notazione di Def. 2.5.2, risulta $d' = 3$ e $\mathcal{N}(\alpha)_3 = \Lambda_{7,3}$, si ha poi $G(\alpha)_4 = \emptyset$ e $\mathcal{N}(\alpha)_4 = \{X^4, X^3Y, X^3Z, X^2Y^2, X^2YZ, X^2Z^2, XY^3, Y^4\} \neq \Lambda_{8,4}$, $\mathcal{N}(\alpha)_5 = \{X^5, X^4Y, X^4Z, X^3Y^2\} = \Lambda_{4,5}$ e, per ogni $\tau \geq_{r\text{-lex}} X^3YZ$, vale $\tau \in \alpha_5$; inoltre $\mathcal{N}(\alpha)_i = \emptyset \forall i \geq 6$ (ossia sono soddisfatte le condizioni di Def. 2.5.2.).

2) L'ideale $\alpha = (Z^3, YZ^2, Y^2Z, Y^5)$ è quasi-segmento r -lex ma non è definitivamente segmento r -lex. Si ha infatti $G(\alpha)_d = \emptyset \forall d \neq 3, 5$; risulta inoltre da sopra che $\mathcal{N}(\alpha)_3 = \Lambda_{7,3}$ e $\mathcal{N}(\alpha)_4 \neq \Lambda_{8,4}$. Poiché $\mathcal{N}(\alpha)_5 = \{X^5, X^4Y, X^4Z, X^3Y^2, X^3YZ, X^3Z^2, X^2Y^3, XY^4\} \neq \Lambda_{8,5}$ e $\mathcal{N}(\alpha)_{5+j} = X^j \mathcal{N}(\alpha)_5$ per ogni $j \in \mathbb{N}^*$, chiaramente $\mathcal{N}(\alpha)_d$ non è segmento r -lex per ogni $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$. D'altra parte, è altresì chiaro che $\{t \in \mathbf{T}_5: t \geq Y^5\} = \{Y^5, Y^4Z, Y^3Z^2, Y^2Z^3, YZ^4, Z^5\} \subseteq \alpha_5$.

3) Per $h' = (1, 3, 6, 7, 9, 4)$ non esistono ideali quasi segmento r -lex. Infatti, poiché $h'_3 = 7$, un eventuale siffatto ideale $\alpha' \subseteq \mathbf{P}$ dovrebbe avere $G(\alpha')_3 = \{Z^3, YZ^2, Y^2Z\}$, risulterebbe quindi necessariamente $\#(\mathbf{T}_4 \setminus \{X, Y, Z\} \setminus \{Z^3, YZ^2, Y^2Z\}) = \#(\mathbf{T}_4 \setminus \{Z^4, YZ^3, Y^2Z^2, Y^3Z, XZ^3, XYZ^2, XY^2Z\}) = 15 - 7 = 8 < 9 = h'_4$. Peraltro, gli ideali $\mathfrak{b} = (Z^3, YZ^2, XZ^2, Y^4Z, Y^5, XY^3Z, XY^4, X^2Y^2Z, X^2Y^3, X^3YZ, X^4Y^2, X^5Z, X^5Y, X^6)$ e $\mathcal{L}(h') = (Z^3, YZ^2, XZ^2, Y^4Z, Y^5, XY^3Z, XY^4, X^2Y^2Z, X^3YZ, X^4Z, X^3Y^3, X^4Y^2, X^5Y, X^6)$ hanno h' come h -vettore e sono (ovviamente) definitivamente segmento r -lex.

Notazione 1. Per ogni $d \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \left\{1, \dots, \binom{n+d-1}{n-1}\right\}$ l'insieme dei sottinsiemi di Borel di $\mathbf{T}(\mathbf{n})_d$ aventi ω elementi è denotato:

$$B(n, \omega, d)$$

Se $n = 3$ scriveremo semplicemente $B(\omega, d)$.

OSSERVAZIONE 2.8. - Se $d = 0$ si ha $\mathbf{T}(\mathbf{n})_0 = \{1\}$ e quindi $B(n, 1, 0) = \{\mathbf{T}(\mathbf{n})_0\} = \{\{1\}\}$; in generale, per ogni $d \in \mathbb{N}^*$, $B(n, 1, d) = \{\{X_1^d\}\}$ e $B\left(n, \binom{n+d-1}{n-1}, d\right) = \{\mathbf{T}(\mathbf{n})_d\}$. Inoltre $B(n, 2, d) = \{\{X_1^d, X_1^{d-1}X_2\}\}$, $B\left(n, \binom{n+d-1}{n-1} - 2, d\right) = \{\mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus \{X_{n-1}X_n^{d-1}, X_n^d\}\}$, $B\left(n, \binom{n+d-1}{n-1} - 1, d\right) = \{\mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus \{X_n^d\}\}$.

Si ha altresì $\#B(n, \omega, d) = 1$ se e solo se $\omega \in \left\{1, 2, \binom{n+d-1}{n-1} - 2, \binom{n+d-1}{n-1} - 1, \binom{n+d-1}{n-1}\right\}$ e per tali valori risulta necessariamente $L_{n, \omega, d} = \Lambda_{n, \omega, d}$.

Notazione 2. Per ogni $d \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \left\{1, \dots, \binom{n+d-1}{n-1}\right\}$ e $B \in B(n, \omega, d)$ poniamo

$$B_{(1)} := \mathbf{T}(\mathbf{n})_{d+1} \setminus \{X_1, \dots, X_n\} \{ \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B \}$$

(n.b. se $\omega = \binom{n+d-1}{n-1}$ si ha $B = \mathbf{T}(\mathbf{n})_d$ e $B_{(1)} = \mathbf{T}(\mathbf{n})_{d+1}$).

PROPOSIZIONE 2.9. – Per ogni $d \in \mathbb{N}$, $\omega \in \left\{1, \dots, \binom{n+d-1}{n-1} - 1\right\}$ e $B \in B(n, \omega, d)$ risulta

$$B_{(1)} = \bigsqcup_{i=0}^{n-2} X_{i+1} (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d).$$

DIM. – Osserviamo innanzi tutto che l'unione al secondo membro è disgiunta (cf. [16] Rem. 1.2.) e proviamo che per ogni $i \in \{0, \dots, n-2\}$ risulta $X_{i+1} (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d) \cap \{X_1, \dots, X_n\} \{ \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B \} = \emptyset$. Osserviamo preliminarmente che, essendo B di Borel, se $t \in \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B$ ha j -predecessore $u_j \in \mathbf{T}(\mathbf{n})_{d-1}$ allora $u_j X_{j+h} \in \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B$ per ogni $h \in \{0, \dots, n-j\}$. Se esistesse $\tau \in X_{i+1} (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d) \cap \{X_1, \dots, X_n\} \{ \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B \}$ dovrebbe essere $\tau = X_{i+1} t$ con $t \in B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d$ e $\tau = X_j u_j$ con $u_j \in \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B$. Ora, dire $\tau \in X_{i+1} (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d)$ significa dire che τ non è divisibile per X_1, \dots, X_i , deve quindi essere necessariamente $j \geq i+1$. Se $j = i+1$, l'equazione $X_{i+1} t = X_{i+1} u_{i+1}$ dà $t = u_{i+1} \in (\mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B) \cap (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d) = \emptyset$, non può pertanto essere $j = i+1$. Se $j = i+1+h$ per qualche $h \in \mathbb{N}^*$, l'equazione $X_{i+1} t = X_{i+1+h} u_{i+1+h}$ implica che $X_{i+1} | u_{i+1+h}$ e quindi che $t = X_{i+1+h} u_{i+1+h} / X_{i+1} \in \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B$, per quanto osservato in precedenza; ma allora $t \in (\mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B) \cap (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d) = \emptyset$. Pertanto, per ogni $i \in \{0, \dots, n-2\}$ risulta $X_{i+1} (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d) \subseteq B_{(1)}$.

D'altra parte, poiché $B \subset \mathbf{T}(\mathbf{n})_d$, si ha $X_n^{d+1} \in \{X_1, \dots, X_n\} \{ \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B \}$, quindi ogni $\tau \in B_{(1)}$ ha j -predecessore per qualche $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Per ogni $\tau \in B_{(1)}$ sia $i_\tau \in \{1, \dots, n-1\}$ il minimo tra i $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tali che τ abbia j -predecessore. Chiaramente $t := \tau / X_{i_\tau} \notin \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B$ (perché altrimenti sarebbe $X_{i_\tau} t \in \{X_1, \dots, X_n\} \{ \mathbf{T}(\mathbf{n})_d \setminus B \}$). D'altra parte, per la scelta di i_τ risulta $t \in (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - i_\tau - 1, \mathbf{n})_d)$ e quindi $\tau \in X_{i_\tau} (B \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - i_\tau - 1, \mathbf{n})_d)$. Questo conclude la dimostrazione.

COROLLARIO 2.10. – Se $n = 3$, nelle stesse ipotesi di Prop. 2.9, si ha

$$B_{(1)} = XB \sqcup Y(B \cap \mathbf{T}'_d).$$

COROLLARIO 2.11. – Se $X_2^d \notin B$, nelle stesse ipotesi di Prop. 2.9, si ha

$$B_{(1)} = X_1 B.$$

DIM. – Discende immediatamente da Prop. 2.9. in quanto le ipotesi $X_2^d \notin B$ e $B \in B(n, \omega, d)$ assicurano che $B \subseteq \mathbf{T}(n)_d \setminus \mathbf{T}'(n-1, n)_d = X_1 \mathbf{T}(n)_{d-1}$ dal momento che $X_2^{d-\sum_{i=3}^n a_i} X_3^{a_3} \dots X_n^{a_n} \in B$ per qualche $(a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{(n-2)} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ implicherebbe $X_2^d \in B$ a causa della stabilità di B rispetto a « \rightarrow ».

OSSERVAZIONE 2.12. – a) Si ricava da Cor. 2.10 che per ogni $B \in B(\omega, d)$ vale $\#B_{(1)} = \omega + \#(B \cap \mathbb{T}'_d)$ e da questo discende in particolare che $\#(A_{\omega, d})_{(1)} \leq \#B_{(1)}$ in quanto si ha $\#(A_{\omega, d} \cap \mathbb{T}'_d) \leq \#(B \cap \mathbb{T}'_d)$, per ogni $B \in B(\omega, d)$.

b) Nelle stesse ipotesi di a) risulta $B_{(1)} \in B(\omega + \#(B \cap \mathbb{T}'_d), d+1)$. Per quanto già osservato in a) dobbiamo solo verificare che $B_{(1)}$ è stabile rispetto a « \rightarrow ». In virtù di Cor. 2.10, per ogni $\tau \in B_{(1)}$ vale o $\tau \in XB$ o $\tau \in Y(B \cap \mathbb{T}'_d)$. Se $\tau = Xt$, per qualche $t \in B$, per ogni $\tau' \in \mathbf{T}_{d+1}$ tale che $\tau' < \tau$ deve essere $\tau' = Xt'$ con $t' < t$, vale quindi $\tau' \in XB$ perché per ipotesi B è stabile rispetto a « \rightarrow ». Se $\tau = Yt$, con $t \in B \cap \mathbb{T}'_d$, poiché $Yt \mapsto Xt$ oppure $Yt \mapsto Yt'$ con $t' < t$, ogni $\tau' \in \mathbf{T}_{d+1}$ tale che $\tau' < \tau$ o è della forma $\tau' = Xt'$ con $t' \leq t$ o è della forma $\tau' = Yt'$ con $t' \in (B \cap \mathbb{T}'_d)$ tale che $t' < t$, cioè ancora $\tau' \in B_{(1)}$.

c) Più in generale, per ogni $B \in B(n, \omega, d)$ risulta $\#B_{(1)} = \omega + \sum_{i=1}^{n-2} \#(B \cap \mathbf{T}'(n-i, n)_d)$ e si prova in modo simile a b) che $B_{(1)} \in B(n, \#B_{(1)}, d+1)$.

Notazione 3. Per ogni $d \in \mathbb{N}$, $\omega \in \left\{1, \dots, \binom{n+d-1}{n-1}\right\}$, $B \in B(n, \omega, d)$, $i \in$

\mathbb{N}^* poniamo iterativamente

$$B_{(i)} := \mathbf{T}(n)_{d+i} \setminus \{X_1, \dots, X_n\} \{ \mathbf{T}(n)_{d+i-1} \setminus B_{(i-1)} \},$$

con $B_{(0)} := B$ (n.b. se $\omega = \binom{n+d-1}{n-1}$, risulta $B = \mathbf{T}(n)_d$ e $B_{(i)} = \mathbf{T}(n)_{d+i}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$).

OSSERVAZIONE 2.13. – a) Per ogni $B \in B(\omega, d)$, si ricava dal Cor. 2.10 che $B_{(1)} \cap \mathbb{T}'_{d+1} = Y(B \cap \mathbb{T}'_d)$ e quindi che $B_{(2)} = XB_{(1)} \sqcup Y(B_{(1)} \cap \mathbb{T}'_{d+1}) = X^2 B \sqcup XY(B \cap \mathbb{T}'_d) \sqcup Y^2(B \cap \mathbb{T}'_d)$, cosicché $B_{(2)} \cap \mathbb{T}'_{d+2} = Y^2(B \cap \mathbb{T}'_d)$. Pertanto, iterativamente, al variare di $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} B_{(i)} &= XB_{(i-1)} \sqcup Y(B_{(i-1)} \cap \mathbb{T}'_{d+i-1}) = \dots \\ &= X^i B \sqcup X^{i-1} Y(B \cap \mathbb{T}'_d) \sqcup X^{i-2} Y^2(B \cap \mathbb{T}'_d) \sqcup \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \sqcup XY^{i-1}(B \cap T'_d) \sqcup Y^i(B \cap T'_d) = \\ & = X^i B \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^i X^{i-j} Y^j (B \cap T'_d) \right), \end{aligned}$$

con $B_{(i)} \cap T'_{d+i} = Y^i(B \cap T'_d)$. Inoltre $B_{(i)} \in B(\omega + i\#(B \cap T'_d), d + i)$ infatti, da quanto appena visto discende che $\#B_{(i)} = \omega + i\#(B \cap T'_d)$; mentre che $B_{(i)}$ sia un sottinsieme di Borel di T_{d+i} discende, come in Oss. 2.12. b), dall'analogha proprietà di $B_{(i-1)}$, ottenuta iterativamente da B .

b) Più in generale, per ogni $B \in B(n, \omega, d)$, $B_{(i)}$ è sottinsieme di Borel di $T(n)_{d+i}$, la sua cardinalità risulta, però, alquanto più difficile da calcolare (cf. Oss. 2.12 c)).

3. - Predecessori e ideali di Borel.

In questo § dopo avere evidenziato la peculiarità dell'insieme dei predecessori di un ideale di Borel, viene illustrato un procedimento per costruire un ideale di Borel 0-dimensionale a partire da un'opportuna collezione di sottinsiemi di Borel di $T(n)$.

OSSERVAZIONE 3.1. - a) Dato $t = X^a \in T(n)$, per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $a_j = 0$, chiaramente non esiste j -predecessore di t .

b) Per ogni $t = X^a \in T(n) \setminus \{1\}$ esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che t ammetta j -predecessore u_j (infatti, dire $t \neq 1$ significa precisamente dire che $a_j > 0$ per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$).

Un $t = X^a \in T(n) \setminus \{1\}$ ammette j -predecessore per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ se e solo se $a_j > 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, mentre ammette solo il j -predecessore u_j per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$ se e solo se $a_j > 0$ e $a_i = 0$ per ogni $i \neq j$.

c) Se $t = X_1^{a_1} \dots X_i^{a_i} \in T(i)$, allora t ammette j -predecessori al più per $j \in \{1, \dots, i\}$, mentre se $t = X_{n-i+1}^{a_{n-i+1}} \dots X_n^{a_n} \in T'(i, n)$, allora t al più ammette j -predecessori per $j \in \{n - i + 1, \dots, n\}$.

d) Se $t = X^a \in T(n) \setminus \{1\}$ ammette sia j -predecessore $u_j \in T(n)$ che i -predecessore $u_i \in T(n)$ per qualche $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, allora risulta $u_i \neq u_j$ (se infatti fosse $u_i = u_j$ sarebbe $t = u_i X_i = u_j X_i$, assurdo perché per ipotesi si ha $t = u_j X_j$).

ESEMPIO 3.2. - 1) Sia $A = \{X_1 X_2, X_1 X_3^2, X_2^2 X_3\} \subset T(n)$. Risulta $Pd_1(A) = \{X_2, X_3^2\}$, $Pd_2(A) = \{X_1, X_2 X_3\}$, $Pd_3(A) = \{X_1 X_3, X_2^2\}$ e quindi $Pd(A) = \{X_1, X_2, X_1 X_3, X_2^2, X_2 X_3, X_3^2\}$. In particolare si ha $Pd_1(A) \subset Pd(A)$, $Pd(A) \not\subset A$ e $Pd(A)$ non è ideale di ordine.

2) Sia $A = \{1, X_1, X_2, X_3, X_1^2, X_1X_2, X_1X_3, X_1^3\} \subset \mathbf{T}(\mathbf{n})$. Risulta $Pd_1(A) = \{1, X_1, X_2, X_3, X_1^2\}$, $Pd_2(A) = \{1, X_1\}$, $Pd_3(A) = \{1, X_1\}$ e quindi $Pd(A) = Pd_1(A)$, $Pd(A) \subset A$ e $Pd(A)$ è un ideale di ordine.

PROPOSIZIONE 3.3. – Se $N \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{n})$ è ideale di ordine, anche $Pd(N)$ è tale.

DIM. – Siano $t \in Pd(N)$ ed $s \in \mathbf{T}(\mathbf{n})$ tale che $t = s \cdot u$ per qualche $u \in \mathbf{T}(\mathbf{n})$. L'ipotesi $t \in Pd(N)$ significa che esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\tau = X_j t \in N$. Risulta $\tau = X_j u \cdot s$ e quindi in particolare $X_j s \in N$ perché per ipotesi $\tau \in N$ e $X_j s \mid \tau$ con N ideale di ordine. Ma, da $X_j s \in N$ discende allora che $s \in Pd(N)$ (in quanto j -predecessore di $X_j s$) e quindi $Pd(N)$ è ideale di ordine.

COROLLARIO 3.4. – Per ogni ideale $\alpha \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$, $Pd(\mathcal{N}(\alpha))$ è ideale di ordine.

DIM. – È una conseguenza immediata di Prop. 3.3 e del fatto che $\mathcal{N}(\alpha) := \mathbf{T}(\mathbf{n}) \setminus \mathbf{T}(\alpha)$.

OSSERVAZIONE 3.5. – Non vale il viceversa di Prop. 3.3. Per esempio, se $A = \{X_1, X_1X_2, X_1X_3\}$ risulta $Pd(A) = \{1, X_1, X_2, X_3\}$ ossia $Pd(A)$ è un ideale di ordine di $\mathbf{T}(\mathbf{n})$, per ogni $n \geq 3$, mentre A non è tale (e.g. in quanto $X_2 \mid X_1X_2$ ma $X_2 \notin A$).

PROPOSIZIONE 3.6. – Se $B \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{n})_d$ è un sottinsieme di Borel, allora

$$Pd(B) = Pd_1(B).$$

DIM. – Poiché per definizione $Pd_1(B) \subseteq Pd(B)$, basta far vedere che per ogni $u \in Pd(B)$ risulta $u \in Pd_1(B)$. Ora, dire $u \in Pd(B)$ significa che esistono $j \in \{1, \dots, n\}$, $t \in B$ con $t = X_j u$, ossia $t = X_1^{a_1} \dots X_j^{a_j} \dots X_n^{a_n} \in B$, con $a_j > 0$ e $u = X_1^{a_1} \dots X_j^{a_j-1} \dots X_n^{a_n} \in Pd(B)$. D'altra parte, $t \in B$ con $B \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{n})_d$ sottinsieme di Borel, significa in particolare che $t' = X_1^{a_1+1} \dots X_j^{a_j-1} \dots X_n^{a_n} \in B$ e quindi u può anche essere pensato come 1-predecessore di t' , cioè proprio $u \in Pd_1(B)$ come voluto.

OSSERVAZIONE 3.7. – Naturalmente dato $A \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{n})_d$ può essere $Pd(A) = Pd_1(A)$ senza che A sia sottinsieme di Borel di $\mathbf{T}(\mathbf{n})_d$.

Per esempio, se $A = \{X_1^2, X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3\} \subset \mathbf{T}(\mathbf{n})_2$, è chiaro che A non è un sottinsieme di Borel in quanto $X_2X_3 \mapsto X_2^2 \notin A$ e tuttavia $Pd(A) = \{X_1, X_2, X_3\} = Pd_1(A)$.

PROPOSIZIONE 3.8. – Un $N \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n}))$ è ideale di ordine se e solo se $Pd(N) \subseteq N$.

DIM. – Sia $N \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n}))$ un ideale di ordine, poiché per ogni $u \in Pd(N)$ esistono $j \in \{1, \dots, n\}$, $t \in N$ con $t = X_j u$, risulta in particolare che $u | t$. Dall'essere N un ideale di ordine discende allora che $u \in N$, vale quindi $Pd(N) \subseteq N$. Supponiamo viceversa che valga $Pd(N) \subseteq N$ e deduciamone che allora N è un ideale di ordine. Siano $t \in N$ ed $s \in \mathbf{T}(\mathbf{n})$ tali che $t = u \cdot s$ per qualche $u \in \mathbf{T}(\mathbf{n}) \setminus \{1\}$. Sia $u = X_{j_1}^{a_{j_1}} \dots X_{j_r}^{a_{j_r}}$ con $a_{j_i} > 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$, cosicché vale $X_{j_i} | t$ e quindi $t/X_{j_i} \in N$, in quanto per ipotesi $Pd(N) \subseteq N$. Si ha inoltre $t/X_{j_i} = u \cdot s/X_{j_i} = u/X_{j_i} \cdot s$ con grado $(u/X_{j_i}) = \text{grado}(u) - 1$.

Ripetendo lo stesso ragionamento, a partire da $t/X_{j_i} \in N$ e $u/X_{j_i} \in Pd(N)$, si arriva a $X_{j_h} | t'$ per qualche $h \in \{1, \dots, r\}$ e $t' = t/X_{j_1}^{a_{j_1}} \dots X_{j_h}^{a_{j_h}-1} \dots X_{j_r}^{a_{j_r}} \in N$. Pertanto, essendo $s = t'/X_{j_h}$ abbiamo per l'appunto che $s \in N$, in quanto j_h -predecessore di $t' \in N$.

COROLLARIO 3.9. – *Un $\mathfrak{J} \in \mathcal{P}(\mathbf{T}(\mathbf{n}))$ è ideale di semigruppato se e solo se*

$$Pd(\mathcal{N}(\mathfrak{J})) \subseteq \mathcal{N}(\mathfrak{J}).$$

DIM. – È una conseguenza immediata di Prop. 3.8 in quanto \mathfrak{J} è un ideale di semigruppato se e solo se $\mathcal{N}(\mathfrak{J})$ è un ideale di ordine (vedi, per esempio, [15] § 3).

COROLLARIO 3.10. – *Se $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$ è un ideale di Borel allora*

$$Pd_1(\mathcal{N}(\mathfrak{b})) = Pd(\mathcal{N}(\mathfrak{b})) \subseteq \mathcal{N}(\mathfrak{b}).$$

DIM Discende immediatamente da Prop. 3.8 tenuto conto di Def. 2.1 nonché di Prop. 3.6 e Cor. 3.4.

OSSERVAZIONE 3.11. – Non vale il viceversa di 3.10, per esempio l'ideale $\alpha = (X_3^2, X_2^2, X_1^3, X_1^2 X_2, X_1^2 X_3, X_1 X_2 X_3)$ soddisfa $Pd_1(\mathcal{N}(\alpha)) = Pd(\mathcal{N}(\alpha)) \subseteq \mathcal{N}(\alpha)$ ma non è ideale di Borel.

TEOREMA 3.12. – *Fissato $d \in \mathbb{N}^*$, siano*

$$B_h := \mathbf{T}(\mathbf{n})_h, \text{ per ogni } h \in \{0, \dots, d-1\},$$

$$B_d \in B(n, \omega, d) \text{ per qualche } \omega \in \left\{1, \dots, \binom{n+d-1}{n-1} - 1\right\},$$

$B_{d+j} \subseteq (B_{d+j-1})_{(1)}$ un sottinsieme di Borel di $\mathbf{T}(\mathbf{n})_{d+j}$, per ogni $j \in \{1, \dots, s-d\}$,

$$B_l = \emptyset, \text{ per ogni } l > s.$$

Allora $N := \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ è un ideale di ordine.

DIM. – Grazie a Prop. 3.8 è sufficiente dimostrare che vale $Pd(N) \subseteq N$. Poniamo $N_k := \bigsqcup_{i=0}^k B_i$, cosicché valgono $N_k \subseteq N_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $N_{s+j} = N$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, e proviamo che si ha $Pd(N_k) \subseteq N_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Chiaramente per ogni $j \in \{0, \dots, d-1\}$ non ci sono problemi in quanto in tal caso risulta $Pd(N_j) = Pd\left(\bigsqcup_{i=0}^j B_i\right) = \bigsqcup_{i=0}^j Pd(B_i) = \bigsqcup_{i=0}^{j-1} B_i := N_{j-1} \subseteq N_j$ dal momento che si ha $B_i = \mathbf{T}(\mathbf{n})_i = X_1 \mathbf{T}(\mathbf{n})_{i-1} \sqcup \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{1}, \mathbf{n})_i$ e quindi $Pd(B_i) = Pd_1(B_i) = \mathbf{T}(\mathbf{n})_{i-1}$ per ogni $i \in \{1, \dots, d-1\}$.

Inoltre, essendo $B_d \in B(n, \omega, d)$, vale $Pd(B_d) = Pd_1(B_d)$ (cf. Prop. 3.6) e quindi $Pd_1(B_d) \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{n})_{d-1} = B_{d-1}$. Risulta pertanto $Pd(N_d) = Pd\left(\bigsqcup_{i=0}^d B_i\right) = \bigsqcup_{i=0}^d Pd(B_i) \subseteq \bigsqcup_{i=0}^d B_i := N_{d-1} \subseteq N_d$.

Rimane dunque soltanto da provare che si ha $Pd(N_{d+j}) \subseteq N_{d+j}$ per ogni $j \in \{1, \dots, s-d\}$ e per questo chiaramente è sufficiente provare che $Pd(N_{d+1}) \subseteq N_{d+1}$. Poiché per definizione $N_{d+1} = N_d \sqcup B_{d+1}$, risulta $Pd(N_{d+1}) = Pd(N_d) \sqcup Pd(B_{d+1})$. Noi sappiamo già che $Pd(N_d) \subseteq N_d$, basta pertanto controllare $Pd(B_{d+1})$. Ora, l'ipotesi $B_{d+1} \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{n})_{d+1}$ sottinsieme di Borel implica che $Pd(B_{d+1}) = Pd_1(B_{d+1})$, inoltre, cf. Prop. 2.9, l'ipotesi

$$B_{d+1} \subseteq (B_d)_{(1)} = X_1 B_d \bigsqcup_{i=1}^{n-2} X_{i+1} (B_d b \cap \mathbf{T}'(\mathbf{n} - \mathbf{i}, \mathbf{n})_d)$$

implica che $Pd_1(B_{d+1}) = B_d \subseteq N_d$, come richiesto.

OSSERVAZIONE 3.13. – Essendo $\mathfrak{J}(N) := \mathbf{T}(\mathbf{n}) \setminus N$ un ideale di semigruppone (vedi, per esempio, [15] § 3), possiamo considerare l'ideale monomiale $\alpha := \alpha(\mathfrak{J}(N)) \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{n})$ a lui associato (vedi, per esempio, [16] Rem. 1.4). Tale α risulta essere un ideale di Borel 0-dimensionale in quanto si ha per costruzione $\alpha_l = \mathbf{P}(\mathbf{n})$ per ogni $l > s$ e $\mathcal{N}(\alpha)_l = B_l$ per ogni $l \in \{0, \dots, s\}$.

In particolare, posto $h_i := \#B_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$, $h := (1, h_1, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ risulta essere un h -vettore ammissibile (cf. [4] Thm. 4.2.10).

4. – Sottinsiemi di Borel di T .

In questo §, servendoci dei «triangoli» che descrivono T_d al variare di $d \in \mathbb{N}$, caratterizziamo i sottinsiemi di Borel di T ,

Notazione 4. Per ogni $\omega, r \in \mathbb{N}$ col simbolo $\omega((r))$ indichiamo una qualsiasi scrittura del tipo:

$$\omega = b_1 + \dots + b_s \text{ con } b_l \in \mathbb{N} \forall l \in \{1, \dots, s\}, b_1 \leq r, \\ b_l > b_{l+1} \text{ se } b_l > 0, b_{l+j} = 0 \forall j \in \mathbb{N} \text{ se } b_l = 0.$$

Denotiamo inoltre $\beta(\omega)_{\leq r}$ il numero delle diverse scritture $\omega((r))$.

OSSERVAZIONE 4.1. – Chiaramente $\beta(\omega)_{\leq 0} = 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{N}^*$. Inoltre, essendo

$$0 = 0 + 0 \text{ risulta } \beta(0)_{\leq r} = 1 \text{ per ogni } r \in \mathbb{N}, \\ 1 = 1 + 0 \text{ risulta } \beta(1)_{\leq r} = 1 \text{ per ogni } r \in \mathbb{N}^*, \\ 2 = 2 + 0 \text{ risulta } \beta(2)_{\leq r} = 1 \text{ per ogni } r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

PROPOSIZIONE 4.2. – Fissato $\omega \in \mathbb{N}^*$, sia $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\binom{k+1}{2} < \omega \leq \binom{k+2}{2} \quad (\bullet).$$

Assegnare $\beta(\omega)_{\leq r}$ al variare di $r \in \mathbb{N}$ definisce una funzione monotona non-decrescente di \mathbb{N} in sé che è nulla finché $k \leq r$, strettamente crescente per $r \in \{k+1, \dots, \omega\}$, costante uguale a $\beta(\omega)_{\leq \omega}$ per $r > \omega$.

(Notiamo in particolare che, se $\omega \neq 1$ allora $k \in \mathbb{N}^*$).

DIM. – Come risulta da Oss. 4.1, l'enunciato è banale per $\omega \in \{1, 2\}$. Discende altresì dalla definizione di $\omega((r))$ che per ogni $\omega \in \mathbb{N}^*$ deve essere $b_1 \geq k+1$: se fosse infatti $b_1 \leq k$, per ogni scelta di $b_l \in \mathbb{N}, l \in \{2, \dots, s\}$ soddisfacenti le condizioni richieste, risulterebbe $\sum_{l=1}^s b_l \leq \sum_{l=1}^k l = \binom{k+1}{2} < \omega$. Si ha pertanto $\beta(\omega)_{\leq r} = 0$ per ogni $r \leq k$. Inoltre, poiché si vuole $b_l \in \mathbb{N}$ per ogni $l \in \{1, \dots, s\}$, deve essere $b_1 \leq \omega$, risulta pertanto,

$$\beta(\omega) := \beta(\omega)_{\leq \omega} = \beta(\omega)_{\leq r}$$

per ogni $r \geq \omega$.

Infine, per ogni $i \in \{1, \dots, \omega - k\}$, $b_1 = k + i$ dà luogo a una scrittura del tipo voluto, non realizzabile con $r < k + i$.

OSSERVAZIONE 4.3. – a) Fissato $\omega \in \mathbb{N}^*$, supponiamo $d \geq k$, dare la totalità delle scritture $\omega((d+1))$ equivale a descrivere l'insieme $B(\omega, d)$. Infatti, poiché ogni $B \in B(\omega, d)$ è stabile rispetto a « \rightarrow », situandolo nel «triangolo» corrispondente a T_d , si vede che per ogni $t \in B$ risulta necessariamente $\tau \in B$ per ogni $\tau \in T_d$ che nel «triangolo» sia collocato sopra o a sinistra di t . Detto b_i il numero degli elementi di B che stanno su $l_{i,d}$, quanto osservato sopra, a ben

vedere, significa precisamente che $b_l > b_{l+1}$ se $b_l > 0$, $b_{l+j} = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ se $b_l = 0$ ecc. Ossia, un qualsiasi $B \in B(\omega, d)$ dà luogo a una scrittura $\omega((d+1))$.

Viceversa, data una qualsiasi scrittura $\omega((d+1))$, se per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$ si prendono i primi b_i elementi (da sinistra) di $l_{i,d}$, si ottiene chiaramente un $B \in B(\omega, d)$.

b) In virtù di a), discende da Prop. 4.2 che per $d < k$ risulta $B(\omega, d) = \emptyset$ (poiché nel «triangolo» corrispondente a T_d ci sono esattamente $\binom{d+2}{2}$ elementi, se $d \leq k-1$ si ha $\#T_d \leq \binom{k+1}{2} < \omega$). D'altro canto, per $d \geq \omega-1$ risulta $\#B(\omega, d) = \beta(\omega)$ (in questo caso, infatti, la riga più lunga del «triangolo» corrispondente a T_d ha lunghezza $\geq \omega$, pertanto, si trova in T_d il sottinsieme di Borel corrispondente alla scrittura $\omega = \omega + 0$, come pure tutti gli altri corrispondenti alle scritture con $b_1 < \omega$.)

Complessivamente, per ogni $d \geq \omega-1$,

$$\#B(\omega, d) = \beta(\omega)_{\leq d+1}$$

e $\#B(\omega, d) = \#B(\omega, d+i)$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$.

c) Notiamo infine che per ogni $B \in B(\omega, d)$, collocando l'insieme $T_d \setminus B$ nel «triangolo» corrispondente a T_d , si vede che per ogni $t \in T_d \setminus B$ si ha $\tau \in T_d \setminus B$ per ogni $\tau \in T_d$ situato sotto o a destra di t . Inoltre, posto $a = \binom{d+2}{2} - \omega$, l'insieme $T_d \setminus B$ corrisponde a una scrittura $a = \beta_1 + \dots + \beta_r$ con $\beta_l \in \mathbb{N} \forall l \in \{1, \dots, r\}$, $\beta_1 \leq d+1$, $\beta_l > \beta_{l+1}$ se $\beta_l > 0$, $\beta_{l+j} = 0 \forall j \in \mathbb{N}$ se $\beta_l = 0$ (come in b), questo equivale a prendere per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$ i primi β_i elementi (dal basso) di $c_{i,d}$.

PROPOSIZIONE 4.4. - Per ogni $\omega \in \mathbb{N}^*$ risulta:

$$\beta(\omega)_{\leq r} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{[(\omega-1)/2]} \beta(i) + \sum_{j=[(\omega-1)/2]+1}^{\omega-k-1} \beta(j)_{\leq (\omega-j-1)} & \text{se } r \geq \omega \\ \sum_{i=\omega-r}^{[(\omega-1)/2]} \beta(i) + \sum_{j=[(\omega-1)/2]+1}^{\omega-k-1} \beta(j)_{\leq (\omega-j-1)} & \text{se } \omega - [(\omega-1)/2] \leq r \leq \omega - 1 \\ \sum_{j=\omega-r}^{\omega-k-1} \beta(j)_{\leq (\omega-j-1)} & \text{se } k+1 \leq r \leq \omega - [(\omega-1)/2] - 1. \end{cases}$$

DIM. - Se $\omega \in \{1, 2\}$, in Oss. 4.1 è già stato detto tutto il possibile, che può essere considerato come primo passo per l'induzione. Supponiamo quindi di avere calcolato $\beta(m)_{\leq r}$ per ogni $m \leq \omega - 1$, $r \in \mathbb{N}$ e calcoliamo $\beta(\omega)_{\leq r}$ per ogni $r \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$\omega = \omega + 0((0)) \text{ in } \beta(0) = 1 \text{ modi,}$$

$$\omega = \omega - 1 + 1((1)) \text{ in } \beta(1) = 1 \text{ modi,}$$

$$\omega = \omega - i + i((i)) \text{ in } \beta(i) \text{ modi finché } \omega - i - 1 \geq i, \text{ cioè } 2i \leq \omega - 1, \text{ ossia } i \leq [(\omega - 1)/2],$$

$\omega = \omega - j + j((\omega - j - 1))$ in $\beta(j)_{\leq (\omega - j - 1)}$ modi finché $\omega - j \geq k + 1$ (abbiamo infatti visto nella dimostrazione di Prop. 4.2 che nelle scritture considerate il primo addendo deve essere $\geq k + 1$).

Ossia, è possibile calcolare $\beta(\omega)_{\leq r}$ per ogni $r \in \mathbb{N}$ a partire da $\beta(i)$ e $\beta(j)_{\leq (\omega - j - 1)}$ con $i \leq [(\omega - 1)/2]$ e $j \leq \omega - k - 1$. Poiché per ogni $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, risulta $\omega - k - 1 < \omega - 1$ e $[(\omega - 1)/2] < \omega - 1$, siamo quindi in grado di calcolare $\beta(\omega)_{\leq r}$ per ogni ω , $r \in \mathbb{N}$.

OSSERVAZIONE 4.5. - a) Le disequaglianze $\omega - [(\omega - 1)/2] \leq r \leq \omega - 1$ sono vere per ogni $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ e vale l'uguaglianza se e solo se $[(\omega - 1)/2] = 1$, ossia $\omega \in \{3, 4\}$. Ora, se $\omega = 3$, nella (●) di Prop. 4.2 risulta $k = 1$ e in effetti si hanno solo le scritture $3 = 3 + 0$ e $3 = 2 + 1$, ossia $\beta(3)_{\leq r} = 0$ per $r \in \{0, 1\}$, $\beta(3)_{\leq 2} = 1$ e $\beta(3) = 2$. Se invece $\omega = 4$, nella (●) di Prop. 4.2 risulta $k = 1$ e in effetti si hanno solo le scritture $4 = 4 + 0$ e $4 = 3 + 1$, ossia $\beta(4)_{\leq r} = 0$ per $r \in \{0, 1, 2\}$, $\beta(4)_{\leq 3} = 1$ e $\beta(4) = 2$.

b) Le disequazioni $\omega - [(\omega - 1)/2] \leq r \leq \omega - 1$ definiscono l'insieme vuoto per $\omega \in \{0, 1, 2\}$ e le disequazioni $k + 1 \leq r \leq \omega - [(\omega - 1)/2] - 1$ definiscono l'insieme vuoto per $\omega \in \{3, 4, 5, 7\}$. In effetti, se $h \in \mathbb{N}$ è tale che $\omega = 2h + 1$ (nel caso dispari) e $\omega = 2h$ (nel caso pari), risulta rispettivamente $[(\omega - 1)/2] = h$ (nel caso dispari) e $[(\omega - 1)/2] = h - 1$ (nel caso pari), per cui $k + 1 \leq \omega - [(\omega - 1)/2] - 1$ dà $k + 1 \leq h$, tanto nel caso dispari quanto nel caso pari. Notiamo che:

se $k = 0$, si ha $\omega = 1$, ossia $h = 0$ e quindi $0 + 1 > 0$;

se $k = 1$, si ha $\omega \in \{2, 3\}$, ossia $h = 1$ e quindi $1 + 1 > 1$;

se $k = 2$, si ha $\omega \in \{4, 5, 6\}$, ossia $h \in \{2, 3\}$ e quindi $2 + 1 > 2$, $2 + 1 \leq 3$;

se $k = 3$, si ha $\omega \in \{7, 8, 9, 10\}$, ossia $h \in \{3, 4, 5\}$ e quindi $3 + 1 > 3$, $3 + 1 \leq 4$, 5 ;

infine, se $k \geq 4$, si ha $\omega > 10$, ossia $h \geq 5$ e quindi $4 + 1 \leq 5$, $k + 1 \leq h$ per ogni $k > 4$.

ESEMPIO 4.6. – *Le anomalie evidenziate in Oss. 4.5 si riflettono nel calcolo esplicito di $\beta(\omega)_{\leq r}$ per ogni $r \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \{0, \dots, 10\}$.*

Per $\omega \in \{0, 1, 2\}$, vedi Oss. 4.1; per $\omega \in \{3, 4\}$, vedi Oss. 4.5. b).

Per $\omega = 5$, si ha $k = h = 2$ e $5 = 5 + 0$, $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 2$ (ossia, $\beta(5)_{\leq r} = 0$ per ogni $r \in \{0, 1, 2\}$, $\beta(5)_{\leq 3} = 1$, $\beta(5)_{\leq 4} = 2$, $\beta(5) = 3$).

Per $\omega = 6$, si ha $k = 2$, $h = 3$ e $6 = 6 + 0$, $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$, $6 = 3 + 2 + 1$ (ossia, $\beta(6)_{\leq r} = 0$ per ogni $r \in \{0, 1, 2\}$, $\beta(6)_{\leq 3} = 1$, $\beta(6)_{\leq 4} = 2$, $\beta(6)_{\leq 5} = 3$, $\beta(6) = 4$).

Per $\omega = 7$, si ha $k = h = 3$ e $7 = 7 + 0$, $7 = 6 + 1$, $7 = 5 + 2$, $7 = 4 + 3$, $7 = 4 + 2 + 1$ (ossia, $\beta(7)_{\leq r} = 0$ per ogni $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta(7)_{\leq 4} = 2$, $\beta(7)_{\leq 5} = 3$, $\beta(7)_{\leq 6} = 4$, $\beta(7) = 5$).

Per $\omega = 8$, si ha $k = 3$, $h = 4$ e $8 = 8 + 0$, $8 = 7 + 1$, $8 = 6 + 2$, $8 = 5 + 3$, $8 = 5 + 2 + 1$, $8 = 4 + 3 + 1$ (ossia, $\beta(8)_{\leq r} = 0$ per ogni $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta(8)_{\leq 4} = 1$, $\beta(8)_{\leq 5} = 3$, $\beta(8)_{\leq 6} = 4$, $\beta(8)_{\leq 7} = 5$, $\beta(8) = 6$).

Per $\omega = 9$, si ha $k = 3$, $h = 4$ e $9 = 9 + 0$, $9 = 8 + 1$, $9 = 7 + 2$, $9 = 6 + 3$, $9 = 6 + 2 + 1$, $9 = 5 + 4$, $9 = 5 + 3 + 1$, $9 = 4 + 3 + 2$ (ossia, $\beta(9)_{\leq r} = 0$ per ogni $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta(9)_{\leq 4} = 1$, $\beta(9)_{\leq 5} = 3$, $\beta(9)_{\leq 6} = 5$, $\beta(9)_{\leq 7} = 6$, $\beta(9)_{\leq 8} = 7$, $\beta(9) = 8$).

Per $\omega = 10$, si ha $k = 3$, $h = 5$ e $10 = 10 + 0$, $10 = 9 + 1$, $10 = 8 + 2$, $10 = 7 + 3$, $10 = 7 + 2 + 1$, $10 = 6 + 4$, $10 = 6 + 3 + 1$, $10 = 5 + 4 + 1$, $10 = 5 + 3 + 2$, $10 = 4 + 3 + 2 + 1$ (ossia, $\beta(10)_{\leq r} = 0$ per ogni $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta(10)_{\leq 4} = 1$, $\beta(10)_{\leq 5} = 3$, $\beta(10)_{\leq 6} = 5$, $\beta(10)_{\leq 7} = 7$, $\beta(10)_{\leq 8} = 8$, $\beta(10)_{\leq 9} = 9$, $\beta(10) = 10$).

PROPOSIZIONE 4.7. – *Siano $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $\omega \in \left\{3, \dots, \binom{d+2}{2} - 3\right\}$, allora se:*

$L_{\omega, d}$ corrisponde alla scrittura $\omega((d+1)) = \tilde{b}_1 + \dots + \tilde{b}_s$, $s \in \mathbb{N}$,

$A_{\omega, d}$ corrisponde alla scrittura $\omega((d+1)) = \bar{b}_1 + \dots + \bar{b}_r$, $r \in \mathbb{N}$ risulta $\bar{b}_j \leq b_j \leq \tilde{b}_j$ e $s \leq t \leq r$ per ogni altra scrittura $\omega((d+1)) = b_1 + \dots + b_t$.

DIM. – Ricordando le proprietà del «triangolo» corrispondente a T_d , in accordo con Oss. 4.1 a), si vede che $L_{\omega, d}$ occupa un certo numero $s \in \mathbb{N}^*$ di righe,

a cominciare da $l_{1, d}$. Per determinare tale s osserviamo che se $\alpha = \binom{d+2}{2} - \omega$, (n.b. nelle ipotesi date risulta $3 \leq \alpha \leq \binom{d+2}{2} - 3$) posto $\alpha = \binom{r_\alpha + 1}{2} + \ell_\alpha$ con $1 \leq r_\alpha \leq d$ e $1 \leq \ell_\alpha \leq r_\alpha + 1$ (n.b. nelle ipotesi date se $r_\alpha = d$ risulta $\ell_\alpha \leq d - 2$),

muovendosi dal basso lungo le righe del «triangolo» corrispondente a T_d , secondo le frecce, con α passi si ricoprono interamente r_α righe e ℓ_α elementi di $l_{r_\alpha + 1, d}$, cosicché risulta $s = d + 1 - r_\alpha$. Pertanto, se $d - r_\alpha \neq 0$, $L_{\omega, d}$ corrisponde alla scelta, per ogni $i \in \{1, \dots, d - r_\alpha\}$, di tutti i $\tilde{b}_i = d + 2 - i$ elementi di

$l_{i,d}$ e di $\tilde{b}_s = \omega - \sum_{i=1}^{s-1} (d+2-1) = r_\alpha + 1 - \ell_\alpha$ elementi di $l_{s,d}$, presi a partire da sinistra (n.b. se $r_\alpha = d$ si ha $s = 1$ e $\tilde{b}_1 \geq 3$.)

Similmente, se scriviamo $\omega = \binom{r_\omega + 2}{2} + \ell_\omega$ con $1 \leq r_\omega \leq d$ e $1 \leq \ell_\omega \leq r_\omega + 1$ (n.b. se $r_\omega = d$ risulta, come sopra, $\ell_\omega \leq d - 2$), $A_{\omega,d}$ corrisponde alla scelta, per ogni $i \in \{1, \dots, \ell_\omega\}$, di $\bar{b}_i = r_\omega + 1 - (i - 1)$ elementi di $l_{i,d}$, presi a cominciare da sinistra, e di $\bar{b}_j = r_\omega + 2 - (\ell_\omega + j)$ elementi di $l_{\ell_\omega + j, d}$, ancora presi a partire da sinistra, per ogni $j \in \{1, \dots, r_\omega + 1 - \ell_\omega\}$ (cosicché risulta in particolare $r = r_\omega$).

Le proprietà dichiarate per s, t, r e $\tilde{b}_j, b_j, \bar{b}_j$ seguono chiaramente da quanto osservato finora.

OSSERVAZIONE 4.15. – Discende dalla dimostrazione di Prop. 4.7 che, detti $\bar{\tau}_1 < \dots < \bar{\tau}_\omega$ gli elementi di $A_{\omega,d}$ ordinati rispetto a $<_{r\text{-lex}}$ (risp. $\tilde{\tau}_1 < \dots < \tilde{\tau}_\omega$ quelli di $L_{\omega,d}$) e detti $t_1 < \dots < t_\omega$ gli elementi di un qualsiasi $B \in B(\omega, d)$, vale $\bar{\tau}_i \leq t_i \leq \tilde{\tau}_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, \omega\}$.

PROPOSIZIONE 4.9. – Per ogni $d \in \mathbb{N}^*$ e $\omega \in \left\{3, \dots, \binom{d+2}{2} - 3\right\}$, posto $\alpha = \binom{d+2}{2} - \omega$, e scritto $\alpha = \binom{r_\alpha + 1}{2} + \ell_\alpha$ con $1 \leq r_\alpha \leq d$ e $1 \leq \ell_\alpha \leq r_\alpha + 1$ (n.b. con la solita eccezione che se $r_\alpha = d$ risulta $\ell_\alpha \leq d - 2$), vale:

$$\begin{aligned} \#(L_{\omega,d})_{(1)} &= \omega + d - r_\alpha \text{ mentre} \\ \#(A_{\omega,d})_{(1)} &= \begin{cases} \omega & \text{se } \omega \leq \binom{d+1}{2} \\ \omega + d - (\alpha - 1) & \omega > \binom{d+1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

DIM. – Per quanto riguarda $\#(L_{\omega,d})_{(1)}$ il risultato discende da Oss. 2.12 a) e da quanto visto nella dim. di Prop. 4.7 (ossia che $L_{\omega,d}$ contenga interamente $d - r_\alpha$ righe dall’alto del «triangolo» corrispondente a T_d e quindi che $\#(L_{\omega,d} \cap T'_d) = d - r_\alpha$).

Per quanto riguarda $\#(A_{\omega,d})_{(1)}$, se $\omega \leq \binom{d+1}{2}$ risulta $Y^d \notin A_{\omega,d}$ e quindi $\#(A_{\omega,d})_{(1)} = \omega$ per Cor. 2. Se invece $\omega > \binom{d+1}{2}$, poiché $\omega - \binom{d+1}{2} = \#(A_{\omega,d} \cap T'_d) = d + 1 - \alpha > 0$, risulta proprio $\#(A_{\omega,d})_{(1)} = \omega + d - (\alpha - 1)$.

OSSERVAZIONE 4.10. - *a)* Poiché nelle ipotesi di Prop. 4.9 si ha $\alpha \in \left\{3, \dots, \binom{d+2}{2} - 3\right\}$ risulta $\omega + d - r_\alpha > \omega + d - (\alpha - 1)$ e quindi $\#(A_{\omega, d})_{(1)} < \#(L_{\omega, d})_{(1)}$.

b) Per quanto osservato in *a)*, tenuto conto che dal th. di Macaulay risulta $h_{d+1} \leq \#(L_{h_d, d})_{(1)}$, discende dalla Prop. 4.9 che esistono ideali inizialmente segmento *r*-lex (e a maggior ragione ideali quasi segmento *r*-lex) solo per una classe ristretta di *h*-vettori ammissibili.

PROPOSIZIONE 4.11. - *Per ogni* $d \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \left\{2, \dots, \binom{d+2}{2}\right\}$ *e* $B \in B(\omega, d)$ *esiste* $\tilde{B} \in B(\omega - 1, d)$ *tale che* $\tilde{B} = B \setminus \{\tau\}$ *per qualche* $\tau \in B$.

DIM. - Situamo *B* nel «triangolo» corrispondente a T_d e osserviamo che per ogni $\tau \in B$ con la proprietà di avere in *B* solo elementi alla sua sinistra o sopra di lui verifica la condizione $B \setminus \{\tau\} \in B(\omega - 1, d)$. Infatti, tenuto conto della definizione di « \rightarrow » e della struttura del «triangolo» corrispondente a T_d , dire che un elemento $\tau \in B \in B(\omega, d)$ non ha in *B* elementi alla sua destra o sotto di sé, significa precisamente che non esiste alcun $t \in B$ tale che $t > \tau$. Pertanto, l'insieme $B \setminus \{\tau\}$ è stabile rispetto a « \rightarrow », ossia $B \setminus \{\tau\} \in B(\omega - 1, d)$ (cf. Oss. 2.2 *a)*). Chiaramente l'elemento $\tau_{M_B} \in B$ soddisfacente $\tau_{M_B} \geq t$ per ogni $t \in B$ (rispetto all'ordinamento di termini $<$ considerato) ha la proprietà in questione, se infatti esistesse $t' \in B$ situato sotto o a destra di τ_{M_B} sarebbe necessariamente $t' > \tau_{M_B}$ (vedi § 1), contraddicendo la massimalità di τ_{M_B} .

Più precisamente, sia $B \in B(\omega, d)$ corrispondente (cf. Oss. 4.3 *a)*) alla scrittura

$$\omega = b_1 + \dots + b_s, \quad b_1 \leq d + 1,$$

se, per ogni $\ell \in \{1, \dots, s\}$, gli elementi di $l_{\ell, d} \cap B$ sono indicati con

$$\tau_{\sum_{i=1}^{\ell-1} b_i + 1}, \dots, \tau_{\sum_{i=1}^{\ell} b_i},$$

allora l'elemento $\tau' := \tau_{\sum_{i=1}^s b_i}$ ha la proprietà richiesta.

Discende inoltre dalla dimostrazione di Prop. 4.7 che, se $b_i = d + 2 - i$ per ogni $i \in \{1, \dots, s\}$, allora $B = L_{\omega, d}$ (con $\omega = s/2(2d - s + 3)$) e $\tau' = \tau_{M_B}$ è l'unico $\tau \in B$ con la proprietà richiesta. Se invece risulta $\emptyset \neq J := \{j \in \{1, \dots, s\} : b_j < d + 2 - j\}$ allora $\tau' \neq \tau_{M_B}$, (ossia esistono in *B* diversi elementi con la proprietà richiesta).

OSSERVAZIONE 4.12. – Applicando ripetutamente la procedura delineata in Prop. 4.11 si ottiene che in generale per ogni $m < \omega \in \left\{ 3, \dots, \binom{d+2}{2} - 3 \right\}$ e $B \in B(\omega, d)$, esistono diversi $B' \in B(m, d)$ tali che, per qualche $\tau_1, \dots, \tau_{\omega-m} \in B$ si abbia $B' = B \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{\omega-m}\}$. In effetti, come risulta da Oss. 2.8, per ogni $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ nelle ipotesi date vale $\#B(\omega, d) > 1$ e $\#B(m, d) > 1$ (se $m \geq 3$).

5. – h -vettori ammissibili e sottinsiemi di Borel in tre variabili.

Se $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ è un h -vettore ammissibile per ogni $j \in \{2, \dots, s\}$ risulta $h_j \leq \binom{j+2}{2}$ e quindi $B(h_j, j) \neq \emptyset$ (cf. Oss. 4.3 b)). Se $h_j < \binom{j+2}{2}$, come fatto più volte nel § precedente, porremo $0 \neq \alpha_j = \binom{j+2}{2} - h_j$ e scriveremo $\alpha_j = \binom{r_j+1}{2} + \ell_j$ con $1 \leq r_j \leq j$ e $1 \leq \ell_j \leq r_j + 1$ (n.b. se $h_j \in \{1, \dots, j\}$, essendo $\alpha_j = \binom{j+1}{2} + j + 1 - h_j$ risulta $r_j = j$ e $j + 1 - h_j = \ell_j \in \{1, \dots, j\}$, viceversa, se $r_j = j$, essendo $h_j \in \mathbb{N}^*$, risulta $j + 1 - h_j = \ell_j \in \{1, \dots, j\}$).

Notazione 5. Poiché il grado iniziale di un qualsiasi ideale omogeneo (0-dimensionale) $\alpha \subseteq \mathbf{P}$ tale che \mathbf{P}/α abbia h come h -vettore è

$$d := \min \left\{ j \in \mathbb{N} : h_j < \binom{j+2}{2} \right\},$$

chiameremo, per abuso di linguaggio, tale numero *grado iniziale di h* .

OSSERVAZIONE 5.1. – a) Se d è il grado iniziale di h , allora risulta $h_{d+1} \leq h_d + d - r_d < \binom{d+3}{2}$. Infatti, per il th. di Macaulay possiamo considerare $\alpha = \mathcal{L}(h)$ (l'ideale segmento lex corrispondente a h) per cui esattamente $d + 1 - (r_d + 1) = d - r_d$ intere righe dall'alto del «triangolo» corrispondente a \mathbf{T}_d sono contenute in $\mathcal{N}(\alpha)_d$ (più, eventuali elementi di $l_{d-r_d+1, d}$).

Risulta pertanto $\#(\mathcal{N}(\alpha)_d)_{(1)} = h_d + d - r_d$, ossia proprio

$$h_{d+1} \leq h_d + (d - r_d) = \binom{d+2}{2} - \alpha_d + (d - r_d) = \binom{d+3}{2} - (\alpha_d + r_d + 2).$$

b) Se d è il grado iniziale di h , allora per ogni $i \geq d$ si ha $h_i = \binom{i+2}{2} - \alpha_i$

per qualche $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. Infatti, per ogni indice j tale che $h_j < \binom{j+2}{2}$, lo stesso ragionamento fatto sopra porta a $h_{j+1} \leq h_j + (d - r_j) < \binom{j+3}{2}$ in quanto si ha per ipotesi $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$.

c) Se d è il grado iniziale di h , vale $h_{j+1} - h_j \leq d$ per ogni $j \in \{0, \dots, s-1\}$. Infatti, per ogni $j \in \{0, \dots, d-2\}$ risulta $h_{j+1} - h_j = j+2 \leq d$. Vale poi $h_d - h_{d-1} = \binom{d+2}{2} - \alpha_d - \binom{d+1}{2} = d+1 - \alpha_d \leq d$ poiché $\alpha_d \in \mathbb{N}^*$, per definizione di grado iniziale di h . Infine, poiché $\#(L_{h_d, d} \cap T'_d) = d - r_d$, risulta $\#(L_{h_d, d})_{(i)} = h_d + i(d - r_d)$ (cf. Oss. 2.13 a). Pertanto, ancora dal th. di Macaulay (attestante l'esistenza di $\mathcal{L}(h)$), discende che $h_{d+i} \leq h_d + i(d - r_d)$ e quindi $h_{d+i+1} - h_{d+i} \leq (d - r_d) \leq d$ per ogni $i \in \{0, \dots, s-d-1\}$.

DEFINIZIONE 5.2. - Per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ e $j \in \{2, \dots, s-1\}$ si dice j -mo ambito di sviluppo di h l'insieme

$$A(h_j, j) := \{B \in B(h_j, j) : \#B_{(1)} \geq h_{j+1}\}.$$

OSSERVAZIONE 5.3. - a) Se d è il grado iniziale di h , allora per ogni $j \leq d-1$ risulta banalmente $A(h_j, j) = B(h_j, j)$ in quanto $B(h_j, j) = \{T_j\}$ inoltre, poiché $h_{s+i} = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$ vale anche $A(h_s, s) = B(h_s, s)$.

b) In generale risulta $A(h_j, j) \subset B(h_j, j)$. Per esempio se $h = (1, 3, 3, 4)$ allora $A_{3,2} \in B(3, 2) \setminus A(3, 2)$. Infatti, $\#(A_{3,2})_{(1)} = 3 < 4 = h_3$ (cf. Oss. 2.12 a)).

c) L'ipotesi che h sia un h -vettore ammissibile garantisce che $A(h_j, j) \neq \emptyset$ per ogni $j \in \{0, \dots, s-1\}$. Infatti, il th. di Macaulay implica che per ogni $j \in \{0, \dots, d-1\}$ risulta $L_{h_j, j} \in A(h_j, j)$.

d) D'altra parte, (vedi Prop. 4.9) se:

$$h_j \leq \binom{j+1}{2} \text{ risulta } A_{h_j, j} \in A(h_j, j) \text{ se e solo se vale } h_{j+1} \leq h_j,$$

$$h_j > \binom{j+1}{2} \text{ risulta } A_{h_j, j} \in A(h_j, j) \text{ se e solo se vale } h_{j+1} \leq h_j + j - (\alpha_j - 1).$$

ESEMPIO 5.4. - Sia $h(i) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 23, 25 + i) \in \mathbb{N}^{*8}$ con $i \in \{0, 1, 2\}$. Si ha $A_{23,6} \in A(h(i)_6, 6)$ se e solo se $i = 0$. Infatti, $A_{23,6} \cap T'_6 = \{Y^6, Y^5Z\}$, inoltre, da $23 = h(i)_6 = \binom{6+2}{2} - \alpha_6$, si ha $\alpha_6 = 5$ e quindi si ricava da Oss. 5.3 d) che $A_{23,6} \in A(h(i)_6, 6)$ se e solo se $h(i)_7 = h(i)_6 + 6 - (5 - 1) = 25$.

Più precisamente si ha:

$$\begin{aligned} A(h(2)_6, 6) &= \{L_{23,6}\}, \\ A(h(1)_6, 6) &= \{L_{23,6}, \mathbf{T}_6 \setminus \{Z^6, YZ^5, XZ^5, Y^2Z^4, Y^3Z^3\}\}, \text{ e} \\ A(h(0)_6, 6) &= \{L_{23,6}, \mathbf{T}_6 \setminus \{Z^6, YZ^5, XZ^5, Y^2Z^4, Y^3Z^3\}, A_{23,6}\}. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 5.5. – Se $h_j > \binom{j+1}{2}$, poiché si ha sempre la limitazione $h_{j+1} \leq h_j + (j - r_j)$ e vale $r_j = \alpha_j - 1$ se e solo se $\alpha_j = 2$ e $r_j = 1$ (mentre in generale risulta $r_j < \alpha_j - 1$), si ha (cf. Oss. 4.10 b)) $A_{h_j, j} \in A(h_j, j)$ solo per una classe ristretta di h -vettori ammissibili.

Notazione 6. Per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$, con grado iniziale $d > 1$ poniamo:

$$b_\ell := \max_{i \geq d+\ell} \{h_{i+1} - h_i\}, \forall \ell \in \{0, \dots, s-d-1\}$$

e

$$a_\ell := \max\{0, b_\ell\}.$$

DEFINIZIONE 5.6. – Per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ con grado iniziale $d > 1$, il numero a_ℓ (definito in Notazione 6) è detto $(d + \ell)$ -mo carattere di crescita di h . In particolare il d -mo carattere di crescita di h , a_0 , è detto carattere di crescita assoluto di h (n.b. per $\ell = s - d$, pensando $h_{s+1} = 0$, risulta $b_{s-d} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ e quindi $a_{s-d} = 0$).

ESEMPIO 5.7. – 1) Se $h = (1, 3, 6, 10, 15, 18, 22, 26, 28, 28, 18, 10) \in \mathbb{N}^{*12}$, il grado iniziale è $d = 5$ e $4 = h_6 - h_5 = h_7 - h_6$, $2 = h_8 - h_7$, $0 = h_9 - h_8$, $-10 = h_{10} - h_9$, $-8 = h_{11} - h_{10}$, cioè $4 = a_0 = a_1$, $2 = a_2$, $0 = a_3 = a_4 = a_5$.

2) Se $h = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 23, 26, 30, 33, 35) \in \mathbb{N}^{*11}$, il grado iniziale è $d = 6$ e $3 = h_7 - h_6$, $4 = h_8 - h_7$, $3 = h_9 - h_8$, $2 = h_{10} - h_9$, cioè $4 = a_0 = a_1$, $3 = a_2$, $2 = a_3$.

3) Se $h = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 26, 30, 34, 38) \in \mathbb{N}^{*11}$, il grado iniziale è $d = 7$ e $4 = h_8 - h_7 = h_9 - h_8 = h_{10} - h_9$, cioè $4 = a_0 = a_1 = a_2$.

4) Se $h = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 31, 34, 36, 40) \in \mathbb{N}^{*11}$, il grado iniziale è $d = 7$ e $3 = h_8 - h_7$, $2 = h_9 - h_8$, $4 = h_{10} - h_9$, cioè $4 = a_0 = a_1 = a_2$.

OSSERVAZIONE 5.8. – a) Per ogni $\ell < m \in \{0, \dots, s-d-1\}$ risulta per definizione $a_\ell \geq a_m$, in particolare il carattere di crescita assoluto di h è il massimo tra i diversi a_ℓ .

b) Esiste l'ideale segmento r-lex $A(h)$ se e solo se $a_0 = 0$ (cf. [16] Prop. 2.13).

c) Risulta $a_0 = h_s - h_{s-1}$ se e solo se $a_\ell = a_0$ per ogni $\ell \in \{0, \dots, s-d-1\}$.

d) Si ricava da Oss. 5.1 c) che $a_0 \leq d$ e vale $a_0 = d$ se e solo se $h = h[d]$ dove $h[d]_j := \binom{j+2}{2}$ per ogni $j \in \{0, \dots, d-1\}$, $h[d]_{d+i} = \binom{d+2}{2} - 1 + id$ per ogni $i \in \{0, \dots, s-d\}$, ossia

$$h[d] = \left(1, 3, 6, \dots, \binom{d}{2}, \binom{d+1}{2}, \binom{d+2}{2} - 1, \right. \\ \left. \binom{d+2}{2} - 1 + d, \dots, \binom{d+2}{2} - 1 + (s-d)d \right).$$

Chiaramente, l'unico ideale che realizza $h[d]$ è $\mathcal{L}(h[d])$.

Notazione 7. Per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ con grado iniziale $d > 1$, al variare di $\ell \in \{0, \dots, s-d\}$, poniamo:

$$A'(h_{d+\ell}, d+\ell) := \{B \in B(h_{d+\ell}, d+\ell) : \#(B \cap \mathbb{T}'_{d+\ell}) \geq a_\ell\}.$$

(n.b. poiché per definizione si ha $a_{s-d} = 0$, risulta $A'(h_s, s) = B(h_s, s)$).

DEFINIZIONE 5.9. – Per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ con grado iniziale $d > 1$, al variare di $\ell \in \{0, \dots, s-d\}$ dicesi $(d+\ell)$ -mo ambito di sviluppo h , l'insieme $A'(h_{d+\ell}, d+\ell)$ (definito in Notazione 7). In particolare $A'(h_d, d)$, è detto ambito di sviluppo assoluto di h .

OSSERVAZIONE 5.10. – a) In generale risulta $A'(h_{d+\ell}, d+\ell) \subset B(h_{d+\ell}, d+\ell)$ (cf. Oss. 5.3 b)), mentre, come abbiamo già osservato sopra, vale $A'(h_s, s) = A(h_s, s) = B(h_s, s)$.

b) Poiché per definizione si ha $a_\ell \geq h_{d+\ell+1} - h_{d+\ell}$, vale anche $A'(h_{d+\ell}, d+\ell) \subseteq A(h_{d+\ell}, d+\ell)$ e $h = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 23, 25, 28) \in \mathbb{N}^{*9}$ fornisce un facile esempio in cui vale l'inclusione stretta. Infatti, il grado iniziale di h è 6 e vale $2 = h_7 - h_6$, $3 = h_8 - h_7$, ossia $3 = a_0 = a_1$. Risulta $A_{23,6} \in A(23, 6)$ in quanto $\#(A_{23,6} \cap \mathbb{T}'_6) = 2$. Tuttavia, poiché $\#((A_{23,6})_{(1)} \cap \mathbb{T}'_7) = 2 < 3 = a_0$, si ha che $A_{23,6} \in A(23, 6) \setminus A'(23, 6)$ (in effetti $h_8 = 28 > 27 = \#(A_{23,6})_{(2)}$).

c) Discende dalla definizione che ogni $B \in A'(h_d, d)$ deve contenere interamente le prime $a := a_0$ righe dall'alto del «triangolo» corrispondente a T_d e, per quanto rimarcato nel § 1 e nell'Oss. 2.2 c), questo in realtà significa considerare gli elementi di $B(h_d - a/2(2d - a + 3), d - a)$.

PROPOSIZIONE 5.11. – Dato un h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ con grado iniziale $d > 1$ e carattere di crescita as-

soluto $a \in \mathbb{N}$, se $a = 0$ allora, per ogni $i \in \{1, \dots, s-d\}$, qualsiasi $B \in B(h_d, d)$ soddisfa la condizione $B_{(i)} \supseteq A$ per qualche $A \in B(h_{d+i}, d+i)$.

Se $a > 0$ e $B \in B(h_d, d)$ è tale che $\#(B \cap T'_d) = \alpha \leq a$ allora esiste $i \in \{1, \dots, s-d\}$ con $\#B_{(i)} < h_{d+i}$.

DIM. – Per la definizione stessa di carattere di crescita assoluto, se $a = 0$ si ha $h_{d+i} \leq h_d$ per ogni $i \in \{1, \dots, s-d\}$, la prima asserzione è allora conseguenza immediata di Oss. 2.12 a).

Siano dunque $a > 0$ e $B \in B(h_d, d)$ con $\#(B \cap T'_d) = \alpha \leq a$, se fosse $B_{(i)} \in B(h_{d+i}, d+i)$ per ogni $i \in \{1, \dots, s-d\}$, essendo $\#B_{(i)} = h_d + i\alpha$ (cf. Oss. 2.13 a)), si avrebbe anche $h_{d+i+1} - h_{d+i} = \alpha < a$, contraddicendo l'ipotesi che a sia il carattere di crescita assoluto di h .

OSSERVAZIONE 5.12. – Discende da Prop. 5.11 che se $d > 1$ è il grado iniziale di h con carattere di crescita assoluto $a \in \mathbb{N}^*$, soltanto a partire dai $B \in A'(h_d, d)$ è possibile costruire un ideale di Borel 0-dimensionale $b \subseteq \mathbf{P}$ che realizzi h (questo applicando, quando necessario, la riduzione delineata in Oss. 4.12 e seguendo il procedimento indicato in Th. 3.12 e Oss. 3.13).

ESEMPIO 5.13. – Sia $h = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 40, 42, 46) \in \mathbb{N}^{*12}$. Risulta $d = 9$ e $a := a_0 = a_1 = 4 = h_{11} - h_{10}$, pertanto $d - a = 9 - 4 = 5$. Poiché $T_9 \setminus \bigsqcup_{i=1}^4 l_{i,9} = Z^4 T_5$ (cf. § 1 e Oss. 2.2 c)) e poiché $34 = 4/2(18 - 4 + 3)$, per Oss. 5.10 c), dobbiamo considerare i $B \in B(40 - 34, 5) = B(6, 5)$. Ora, $\#B(6, 5) := \beta(6) = 4$ (cf. Oss. 4.3). Più precisamente $B(6, 5) = \{\tilde{B}_1 = A_{6,5}, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4 = L_{6,5}\}$, con \tilde{B}_j corrispondente alla scrittura $6((2+j))$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ (cf. Oss. 4.1 a)). Pertanto, $A'(40, 9) = \{B_j\}_{j \in \{1, 2, 3, 4\}}$ con $B_j = \bigsqcup_{i=1}^4 l_{i,9} \sqcup Z^4 \tilde{B}_j$. Osserviamo inoltre che $\#(B_j)_{(1)} = 44$ per $j \in \{1, 2, 3\}$ mentre $\#(B_4)_{(1)} = 45$, pertanto, poiché $h_{10} = 42$, per ottenere un elemento di $B(42, 10)$ occorre (cf. Oss. 4.12) eliminare due elementi da $(B_j)_{(1)}$ per $j \in \{1, 2, 3\}$ ed eliminare tre elementi da $(B_4)_{(1)}$. Situando i diversi $(B_j)_{(1)}$ nel «triangolo» corrispondente a T_{10} , poiché ovviamente non si possono toccare le prime quattro righe dall'alto, si vede che per $(B_1)_{(1)}$ e $(B_4)_{(1)}$ c'è un'unica possibilità, mentre per $(B_2)_{(1)}$ e $(B_3)_{(1)}$ ne sono praticabili due. Questo, complessivamente, comporta sei casi distinti che individuano due soli elementi di $B(42, 10)$. Si ha infatti $10 - 4 = 6$, $T_{10} \setminus \bigsqcup_{i=1}^4 l_{i,10} = Z^4 T_6$ e $38 = 4/2(20 - 4 + 3)$, cosicché bisogna considerare i $B \in B(42 - 38, 6) = B(4, 6)$ con $\#B(4, 6) := \beta(4) = 2$ e quindi $A'(42, 10) = \{A_1, A_2\}$ con $A_j = \bigsqcup_{i=1}^4 l_{i,10} \sqcup Z^4 \tilde{A}_j$, dove $\tilde{A}_1 = A_{4,6}$ e $\tilde{A}_2 = L_{4,6}$. Infine, poiché per ogni $j \in \{1, 2\}$, si ha $\#(A_j)_{(1)} = 46 = h_{11}$ non c'è altro da aggiungere.

Notazione 8. Per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ con grado iniziale $d > 1$, e carattere di crescita assoluto $a \in \mathbb{N}^*$ poniamo:

$$\mathbb{L}_{h_d, d} := L_{a/2(2d-a+3), d} \sqcup Z^a A_{h_d - a/2(2d-a+3), d-a}.$$

OSSERVAZIONE 5.14. - *a)* Se $h_d = a/2(2d - a + 3)$, essendo $A_{0, \delta} = \emptyset$ per ogni $\delta \in \mathbb{N}$, risulta $\mathbb{L}_{h_d, d} = L_{h_d, d}$. Inoltre, se $h_d - a/2(2d - a + 3) \in \left\{1, 2, \binom{d-a+2}{2} - 2, \binom{d-a+2}{2} - 1\right\}$ risulta $A_{h_d - a/2(2d - a + 3), d-a} = L_{h_d - a/2(2d - a + 3), d-a}$ e quindi ancora $\mathbb{L}_{h_d, d} = L_{h_d, d}$.

b) Se invece $h_d - a/2(2d - a + 3) \in \left\{3, \dots, \binom{d-a+2}{2} - 3\right\}$, risulta $\mathbb{L}_{h_d, d} \neq L_{h_d, d}$ e più precisamente:

se $h_d - a/2(2d - a + 3) \geq \binom{d-a+1}{2}$, risulta $\mathbb{L}_{h_d, d} = A_{h_d, d}$, si ha infatti $h_d \geq a/2(2d - a + 3) + (d - a + 1)(d - a)/2 = (2ad - a^2 + 3a + d^2 - ad + d - ad + a^2 - a)/2 = d/2(d + 1) + a = \binom{d+1}{2} + a$;

mentre, se $h_d - a/2(2d - a + 3) < \binom{d-a+1}{2}$, (poiché allora $\#(\mathbb{L}_{h_d, d} \cap \mathbb{T}'_d) = a$ e $\#(A_{h_d, d} \cap \mathbb{T}'_d) < a$), risulta anche $\mathbb{L}_{h_d, d} \neq A_{h_d, d}$, vale inoltre $\#(\mathbb{L}_{h_d, d})_{(1)} = h_d + a$.

LEMMA 5.15. - *Per ogni h -vettore ammissibile $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ di grado iniziale $d > 1$, e carattere di crescita assoluto $a \in \mathbb{N}^*$, risulta $\mathbb{L}_{h_d, d} \in A'(h_d, d)$.*

DIM. - Ovviamente nel caso $h_d = a/2(2d - a + 3)$ non c'è nulla da dimostrare. Scriviamo dunque $0 < \omega := h_d - a/2(2d - a + 3)$. Poiché anche se $\omega \in \left\{1, 2, \binom{d-a+2}{2} - 2, \binom{d-a+2}{2} - 1\right\}$ non c'è nulla da dimostrare (cf. Oss.

5.14 *a)*, possiamo in particolare supporre $d - a =: \delta \notin \{0, 1\}$.

Sia $\omega((\delta + 1)) = \bar{b}_1 + \dots + \bar{b}_r$ la scrittura corrispondente a $A_{\omega, \delta}$ (cf. Prop. 4.7). Osserviamo che $\mathbb{L}_{h_d, d}$ corrisponde alla scrittura $h_d((\delta + 1)) = b_1 + \dots + b_a + b_{a+1} + \dots + b_{a+r}$ con $b_i = d + 2 - i$ per ogni $i \in \{1, \dots, a\}$ e $b_{a+j} = \bar{b}_j$ per ogni $j \in \{1, \dots, r\}$, pertanto, $\mathbb{L}_{h_d, d} \in B(h_d, d)$ per quanto evidenziato in Oss. 4.1 *a)* e inoltre $\#(\mathbb{L}_{h_d, d} \cap \mathbb{T}'_d) \geq a$ per costruzione.

PROPOSIZIONE 5.16. – *Nelle stesse ipotesi del lemma 5.15, per ogni $A \in A'(h_d, d)$ si ha:*

1) $\#(\mathbb{L}_{h_d, d})_{(1)} \leq \#(A)_{(1)}$.

Inoltre, detti $\bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_{h_d}$ gli elementi ordinati di $\mathbb{L}_{h_d, d}$, ordinati rispetto a $<_{r\text{-lex}}$, e detti $\tau_1 < \dots < \tau_{h_d}$ gli elementi di A , si ha anche:

2) $\bar{t}_j \leq \tau_j$ per ogni $j \in \{1, \dots, h_d\}$.

DIM. – 1) In virtù di Oss. 5.14 b) e Oss 4.8, usando la notazione introdotta nel lemma, possiamo supporre che sia $\omega < \binom{\delta + 1}{2}$, cosicché $A_{\omega, \delta} \cap T_\delta = \emptyset$ e $a = \#(\mathbb{L}_{h_d, d} \cap T'_d)$, pertanto si ha $\#(\mathbb{L}_{h_d, d})_{(1)} = h_d + a \leq \#(A)_{(1)}$ in quanto per ipotesi $A \in A'(h_d, d)$.

Poiché in ogni $A \in A'(h_d, d)$ sono, per definizione, interamente contenute le prime a righe dall'alto del «triangolo» corrispondente a T_d , A è della forma $A = L_{a/2(2d - a + 3), d} \sqcup B$, per qualche $B \in B(\omega, \delta)$, la tesi discende allora dall'analoga proprietà di $A_{\omega, \delta}$ all'interno del «triangolo» corrispondente a T_δ (già rilevata in Oss. 4.8).

6. – h -vettori ammissibili e ideali di Borel in P .

In questo § sono caratterizzate le risoluzioni libere minimali (numeriche) degli ideali di Borel 0-dimensionali $\mathfrak{b} \subseteq P$ in termini di un invariante puramente combinatorico che viene qui introdotto. Si caratterizza inoltre l'ideale di Borel 0-dimensionale $\mathfrak{c} \subseteq P$ che ha i numeri di Betti minimali tra gli ideali di Borel 0-dimensionali di assegnato h -vettore.

In tutto il § si indica con $h = (1, 3, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{N}^{*(s+1)}$ un h -vettore ammissibile di grado iniziale d e $(d + \ell)$ -mo carattere di crescita a_ℓ , al variare di $\ell \in \{1, \dots, s - d - 1\}$.

OSSERVAZIONE 6.1. – Sia $\mathfrak{b} \subseteq P$ un ideale di Borel 0-dimensionale avente h come h -vettore. Se $G(\mathfrak{b}) \subseteq T$ è il sistema minimale di generatori di \mathfrak{b} risulta $G(\mathfrak{b})_i = \emptyset$ per ogni $i \in \mathbb{N} \setminus \{d, \dots, s + 1\}$ in quanto $(0) = \mathfrak{b}_i$ per ogni $i < d$ e $\mathfrak{b}_i = P_i$ per ogni $i \geq s + 1$, cosicché $\mathcal{N}(\mathfrak{b})_i = T_i$ per ogni $i < d$ e $\mathcal{N}(\mathfrak{b})_i = \emptyset$ per ogni $i > s$. Inoltre, per ogni $\ell \in \{0, \dots, s - d\}$ risulta $\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell} \in B(h_{d+\ell}, d + \ell)$ (in virtù della definizione stessa di ideale di Borel 0-dimensionale corrispondente a h).

Infine, poiché $\mathfrak{b}_j P_i \subseteq \mathfrak{b}_{i+j}$, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ si ha $\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{i+j} \subseteq (\mathcal{N}(\mathfrak{b})_j)_{(i)}$ e anche (cf. Prop. 5.11) $\#(\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell} \cap T'_{d+\ell}) \geq a_\ell$ per ogni $\ell \in \{0, \dots, s - d - 1\}$. Notiamo altresì che vale $G(\mathfrak{b})_{s+1} = (\mathcal{N}(\mathfrak{b})_s)_{(1)}$.

PROPOSIZIONE 6.2. – Per ogni $A \in A'(h_d, d)$, esiste un ideale di Borel (0-dimensionale) $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}$ corrispondente ad h e soddisfacente $\mathcal{N}(\mathfrak{b})_d = A$.

DIM. – Dato $A \in A'(h_d, d)$, poniamo $G_i := \emptyset$ per ogni $i \in \mathbb{N} \setminus \{d, \dots, s+1\}$, poniamo inoltre $A_i = \mathbf{T}_i$ per ogni $i < d$, $A_d = A$, $G_d := \mathbf{T}_d \setminus A$ e $c_A^0 := \#(A_d)_{(1)} - h_{d+1}$ (n.b. poiché $A_d \in A'(h_d, d)$ risulta $c_A^0 \geq 0$).

Qualora $c_A^0 \neq 0$, scegliamo (rispetto a rev-lex) $\sigma_{11} < \dots < \sigma_{1c_A^0} \in (A_d)_{(1)}$ tali che $A_{d+1} := (A_d)_{(1)} \setminus \{\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1c_A^0}\} \in A'(h_{d+1}, d+1)$ e poniamo $G_{d+1} := \{\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1c_A^0}\}$; altrimenti poniamo $G_{d+1} := \emptyset$.

Inoltre, per ogni $\ell \in \{2, \dots, s-d\}$ costruiamo iterativamente (allo stesso modo, a partire da A_{d+1}) un $A_{d+\ell} \in A'(h_{d+\ell}, d+\ell)$ ponendo $G_{d+\ell} := \{\sigma_{\ell 1}, \dots, \sigma_{\ell c_A^{\ell-1}}\}$ se $c_A^{\ell-1} \neq 0$, altrimenti $G_{d+\ell} := \emptyset$.

Poniamo poi $A_{s+j} := \emptyset$ per ogni $j \in \mathbb{N}^*$ e $G_{s+1} := (A_s)_{(1)}$.

Posto infine $N := \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, per Oss. 3.13, l'ideale monomiale $\mathfrak{b} := \alpha(\mathfrak{v}(N)) \subseteq \mathbf{P}$ è di Borel, ha h come h -vettore e $G = \bigsqcup_{i=d}^{s+1} G_i$ è, per costruzione, sistema minimale di generatori per \mathfrak{b} .

Notazione 9. Per ogni ideale di Borel (0-dimensionale) $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}$, poniamo:

$$\lambda(\mathfrak{b})_i := \#(\mathcal{N}(\mathfrak{b})_i \cap \mathbf{T}'_i).$$

LEMMA 6.3. – Dato un qualsiasi ideale di Borel (0-dimensionale) $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}$ corrispondente ad h , al variare di $l \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{d, \dots, s+1\}$ i numeri $\nu_{l,j}$ (introdotti nel § 1) dipendono esclusivamente da h e da $\lambda(\mathfrak{b})_j$, ma non dai singoli generatori di \mathfrak{b} .

DIM Sappiamo già da Oss. 2.4, che $\nu_{3,d} = 1$ e $\nu_{3,j} = 0$ per ogni $j \neq d$. Considerando $\mathcal{N}(\mathfrak{b})_d \in B(h_d, d)$ e situandolo, come sempre, nel «triangolo» corrispondente a \mathbf{T}_d , si ha:

$$\nu_{2,d} = \#(\mathbf{T}'_d \setminus \mathcal{N}(\mathfrak{b})_d) - 1 = d + 1 - \lambda(\mathfrak{b})_d - 1 = d - \lambda(\mathfrak{b})_d \text{ e}$$

$$\nu_{1,d} = \#(\mathbf{X}\mathbf{T}_{d-1} \setminus \mathcal{N}(\mathfrak{b})_d) = \binom{d+1}{2} - h_d + \lambda(\mathfrak{b})_d.$$

Inoltre, per ogni $\ell \in \{1, \dots, s-d\}$ i generatori di grado $d+\ell$ stanno in $(\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell-1})_{(1)} = \mathbf{X}\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell-1} \sqcup Y(\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell-1} \cap \mathbf{T}'_{d+\ell-1})$ pertanto vale:

$$\nu_{2,d+\ell} = \#(\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell-1} \cap \mathbf{T}'_{d+\ell-1}) - \#(\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell} \cap \mathbf{T}'_{d+\ell}) = \lambda(\mathfrak{b})_{d+\ell-1} - \lambda(\mathfrak{b})_{d+\ell} \text{ e}$$

$$\nu_{1,d+\ell} = \#\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell-1} - \#(\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell} \setminus (\mathcal{N}(\mathfrak{b})_{d+\ell} \cap \mathbf{T}'_{d+\ell})) = h_{d+\ell-1} - h_{d+\ell} + \lambda(\mathfrak{b})_{d+\ell}.$$

Infine, i generatori di grado $s + 1$ sono tutti gli elementi di $(\mathcal{N}(b)_s)_{(1)} = X\mathcal{N}(b)_s \sqcup Y(\mathcal{N}(b)_s \cap \mathbb{T}'_d)$, vale pertanto $\nu_{2, s+1} = \lambda(b)_s$ e $\nu_{1, s+1} = h_s$.

TEOREMA 6.4. – *La risoluzione libera minimale (numerica) di un ideale di Borel 0-dimensionale $b \subseteq \mathbf{P}$ corrispondente ad h è determinata da h_j e da $\lambda(b)_j$ al variare di $j \in \{d, \dots, s\}$.*

DIM. – Dai risultati di Eliahou-Kervaire (cf. [8] § 2 e § 3) si ricava che nella risoluzione libera minimale di \mathbf{P}/b , $0 \rightarrow L_2 \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}/b \rightarrow 0$ risulta:

$$L_0 = \bigoplus_{j=d}^{s+1} \mathbf{P}(-j)^{\sum_{l=1}^3 \binom{3-l}{0} \nu_{l,j}},$$

$$L_1 = \bigoplus_{j=d}^{s+1} \mathbf{P}(-j-1)^{\sum_{l=1}^3 \binom{3-l}{1} \nu_{l,j}},$$

$$L_2 = \bigoplus_{j=d}^{s+1} \mathbf{P}(-j-2)^{\sum_{l=1}^3 \binom{3-l}{2} \nu_{l,j}}.$$

dove $\mathbf{P}(-j)$ denota il j -slittamento di \mathbf{P} .

Pertanto, inserendo, al variare di $j \in \{d+1, \dots, s\}$, i valori di $\nu_{l,j}$ determinati nel Lemma 6.3, si ottiene:

$$\begin{aligned} L_0 = & \mathbf{P}(-d)^{\binom{d+2}{2} - h_d} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \mathbf{P}(-j)^{h_{j-1} - h_j + \lambda(b)_{j-1}} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \mathbf{P}(-s-1)^{h_s + \lambda(b)_s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 = & \mathbf{P}(-d-1)^{2\left[\binom{d+1}{2} - h_d\right] + d + \lambda(b)_d} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \mathbf{P}(-j-1)^{2(h_{j-1} - h_j) + \lambda(b)_{j-1} + \lambda(b)_j} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \mathbf{P}(-s-2)^{2h_s + \lambda(b)_s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 = & \mathbf{P}(-d-2)^{\binom{d+1}{2} - h_d + \lambda(b)_d} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \mathbf{P}(-j-2)^{h_{j-1} - h_j + \lambda(b)_j} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \mathbf{P}(-s-3)^{h_s}. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 6.5. – *a)* In particolare, per gli ideali di Borel 0-dimensionali $b \subseteq \mathbf{P}$ relativi agli h -vettori della forma $h = h_{d,\alpha} :=$

$\left(1, 3, 6, \dots, \binom{d+1}{2}, \binom{d+2}{2} - \alpha\right)$ (considerati, per esempio, in [16], [17] e corrispondenti a $s = \sum_{i=0}^d \binom{i+2}{2} - \alpha$ punti generici di \mathbb{P}^3 che non stanno su nessuna superficie di grado $\leq d-1$), si ottiene:

$$L_0 = \mathbf{P}(-d)^\alpha \oplus \mathbf{P}(-d-1) \binom{d+2}{2}^{-\alpha + \lambda(b)_d},$$

$$L_1 = \mathbf{P}(-d-1)^{2\alpha - d - 2 + \lambda(b)_d} \oplus \mathbf{P}(-d-2)^{2 \left[\binom{d+2}{2} - \alpha \right] + \lambda(b)_d},$$

$$L_2 = \mathbf{P}(-d-2)^{\alpha - d - 1 + \lambda(b)_d} \oplus \mathbf{P}(-d-3) \binom{d+2}{2}^{-\alpha}.$$

b) Poiché in un ideale corrispondente ad $h_{d,\alpha}$ ci sono sempre α generatori di grado d , per determinare tutti gli ideali di Borel occorre considerare le diverse collocazioni di α elementi t_1, \dots, t_α nel «triangolo» corrispondente a \mathbf{T}_d , a partire dall'angolo di destra in basso, in modo che $\mathbf{T}_d \setminus \{t_1, \dots, t_\alpha\}$ sia un insieme di Borel. Il numero delle diverse possibilità è dato da $\beta(\alpha)_{\leq d+1}$ (cf. 4.3 c)) e precisamente, detto β_1 il numero degli elementi su $c_{1,d}$, risulta (cf. Prop. 4.2) $\beta_1 \in \{\kappa + 1, \dots, d + 1\}$ con $\kappa \in \mathbb{N}$ soddisfacente $\binom{\kappa+1}{2} < \alpha \leq \binom{\kappa+2}{2}$.

Pertanto, essendo $\lambda(b)_d = d + 1 - \beta_1$, si ha $\lambda(b)_d \in \{0, \dots, d - \kappa\}$ e quindi ci sono esattamente $d + 1 - \kappa$ diverse risoluzioni di ideali di Borel (0-dimensionali) corrispondenti ad $h_{d,\alpha}$.

TEOREMA 6.6. – *Due ideali di Borel 0-dimensionali $\alpha, \mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}$ che corrispondono a un dato h , hanno anche la stessa risoluzione (libera minimale) numerica se e solo se, per ogni $j \in \{d, \dots, s\}$, risulta $\lambda(\alpha)_j = \lambda(\mathfrak{b})_j$.*

DIM. – Discende immediatamente dalla descrizione della risoluzione libera minimale (numerica) di un ideale di Borel 0-dimensionale data nel th. 6.4.

DEFINIZIONE 6.7. – *Diciamo che un h -vettore ammissibile h ha crescita massimale in qualche $i \in \{1, \dots, s-d\}$ se vale $h_{d+i} - h_{d+i-1} = \#(L_{h_{d+i-1}, d+i-1} \cap \mathbf{T}'_{d+i-1})$, che ha crescita massimale se ha crescita massimale in ogni $i \in \{1, \dots, s-d\}$.*

OSSERVAZIONE 6.8. – Questa terminologia è motivata dal fatto che il valore introdotto nella Def. 6.7 è, in virtù del th. di Macaulay (nel caso di 3 variabili), il massimo possibile (vedi anche [3], dove sono tra l'altro analizzate interessanti proprietà geometriche degli ideali coinvolti).

COROLLARIO 6.9. – Tutti gli ideali di Borel 0-dimensionali corrispondenti a un dato h con crescita massimale, hanno anche la stessa risoluzione libera minimale (numerica) di $\mathcal{L}(h)$.

Costruzione. – Dato un h -vettore ammissibile h con grado iniziale $d > 1$, e $(d + \ell)$ -mo carattere di crescita a_ℓ , poniamo

$$\mathbb{L}_d := \mathbb{L}_{h_d, d}.$$

Supponiamo $0 \neq h_d - a_0/2(2d - a_0 + 3) < \binom{d - a_0 + 1}{2}$ cosicch  $\#(\mathbb{L}_d)_{(1)} = h_d + a_0$ (cf. Oss. 5.14 b) e poniamo $c_{\mathbb{L}_d}^0 = h_d + a_0 - h_{d+1}$ (cf. Dim. di Prop. 6.2). Se $c_{\mathbb{L}_d}^0 \neq 0$, posto $< := <_{r\text{-lex}}$, siano $\tau_{11} < \dots < \tau_{1c_{\mathbb{L}_d}^0} \in (\mathbb{L}_d)_{(1)}$ tali che $\mathbb{L}_{d+1} := (\mathbb{L}_d)_{(1)} \setminus \{\tau_{11}, \dots, \tau_{1c_{\mathbb{L}_d}^0}\} \in A'(h_{d+1}, d + 1)$ e valga altres  $\tau_{1j} \geq \sigma_{1j}$ per ogni $\sigma_{11} < \dots < \sigma_{1c_{\mathbb{L}_d}^0} \in (\mathbb{L}_d)_{(1)}$ tali che risulti $(\mathbb{L}_d)_{(1)} \setminus \{\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1c_{\mathbb{L}_d}^0}\} \in A'(h_{d+1}, d + 1)$. Osserviamo che, per costruzione, vale in particolare $\#(\mathbb{L}_{d+1} \cap \mathbb{T}'_{d+1}) = a_1$ cosicch  $\#(\mathbb{L}_{d+1})_{(1)} = h_{d+1} + a_1$. Se invece $c_{\mathbb{L}_d}^0 = 0$, poniamo $\mathbb{L}_{d+1} := (\mathbb{L}_d)_{(1)}$ (n.b. in questo caso $\#(\mathbb{L}_{d+1} \cap \mathbb{T}'_{d+1}) = \#(\mathbb{L}_d \cap \mathbb{T}'_d) = a_0$).

Sia $c_{\mathbb{L}_d}^1 = h_{d+1} + a_1 - h_{d+2}$, se $c_{\mathbb{L}_d}^1 \neq 0$, siano $\tau_{21} < \dots < \tau_{2c_{\mathbb{L}_d}^1} \in (\mathbb{L}_{d+1})_{(1)}$ tali che $\mathbb{L}_{d+2} := (\mathbb{L}_{d+1})_{(1)} \setminus \{\tau_{21}, \dots, \tau_{2c_{\mathbb{L}_d}^1}\} \in A'(h_{d+2}, d + 2)$ e $\tau_{2j} \geq \sigma_{2j}$ per ogni $\sigma_{21} < \dots < \sigma_{2c_{\mathbb{L}_d}^1} \in (\mathbb{L}_{d+1})_{(1)}$ con $(\mathbb{L}_{d+1})_{(1)} \setminus \{\sigma_{21}, \dots, \sigma_{2c_{\mathbb{L}_d}^1}\} \in A'(h_{d+2}, d + 2)$. Risulta per costruzione $\#(\mathbb{L}_{d+2} \cap \mathbb{T}'_{d+2}) = a_2$, cosicch  $\#(\mathbb{L}_{d+2})_{(1)} = h_{d+2} + a_2$. Se $c_{\mathbb{L}_d}^1 = 0$, poniamo $\mathbb{L}_{d+2} := (\mathbb{L}_{d+1})_{(1)}$ (n.b. in questo caso si ha $\#(\mathbb{L}_{d+2} \cap \mathbb{T}'_{d+2}) = \#(\mathbb{L}_{d+1} \cap \mathbb{T}'_{d+1}) = a_1$).

Continuando cos  si costruisce per ogni $\ell \in \{0, \dots, s - d\}$ un $\mathbb{L}_{d+\ell} \in A'(h_{d+\ell}, d + \ell)$ con le proprietà di minimalit  descritte sopra e tale che

$$\#(\mathbb{L}_{d+\ell} \cap \mathbb{T}'_{d+\ell}) = a_{\ell} \text{ se } c_{\mathbb{L}_d}^{\ell-1} \neq 0,$$

$$\#(\mathbb{L}_{d+\ell} \cap \mathbb{T}'_{d+\ell}) = \#(\mathbb{L}_{d+\ell-1} \cap \mathbb{T}'_{d+\ell-1}) \text{ se } c_{\mathbb{L}_d}^{\ell-1} = 0.$$

Per quanto riguarda il caso $h_d = a_0/2(2d - a_0 + 3)$, basta tenere conto di Oss. 5.14 a) e Prop. 4.9, ripetendo poi gli stessi ragionamenti fatti sopra.

Analogamente per quanto riguarda il caso $0 \neq h_d - a_0/2(2d - a_0 + 3) \geq \binom{d - a_0 + 1}{2}$ occorre tenere conto di Oss. 5.14 b) e Oss. 5.3 d).

OSSERVAZIONE 6.10. – a) Discende dalle propriet  di \mathbb{L}_d evidenziate in Prop. 5.16 e dalla *Costruzione* appena descritta che

$$\#(\mathbb{L}_{d+\ell} \cap \mathbb{T}'_{d+\ell}) \leq \#(A_{d+\ell} \cap \mathbb{T}'_{d+\ell})$$

per ogni $A \in A'(h_{d+\ell}, d + \ell)$ tale che $A \subseteq B_{(\ell)}$ per qualche $B \in A'(h_d, d)$.

b) Poniamo $\mathbb{G}_i := \emptyset$ per ogni $i \in \mathbb{N} \setminus \{d, \dots, s + 1\}$, $\mathbb{G}_d := \mathbf{T}_d \setminus \mathbb{L}_d$ inoltre, al variare di $\ell \in \{1, \dots, s - d\}$, $\mathbb{G}_{d+\ell} := \emptyset$ se $c_{\mathbb{L}_d}^{\ell-1} = 0$, $\mathbb{G}_{d+\ell} := \{\tau_{\ell 1}, \dots, \tau_{\ell c_{\mathbb{L}_d}^{\ell-1}}\}$ se $c_{\mathbb{L}_d}^{\ell-1} \neq 0$, e $\mathbb{G}_{s+1} := (\mathbb{L}_s)_{(1)}$, (secondo le notazioni introdotte nella *Costruzione*).

Allora, l'ideale $c := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} c_i$ con $c_i := \langle \mathbb{G}_i \rangle$   un ideale di Borel 0-dimensionale che ha h come h -vettore (cf. Prop. 6.2) e, per a), risulta $\lambda(c)_j \leq \lambda(b)_j$

per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni ideale di Borel 0-dimensionale $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{P}$ corrispondente a h .

DEFINIZIONE 6.11. – Per ogni h -vettore h , l'ideale di Borel 0-dimensionale $\mathfrak{c} \subseteq \mathbf{P}$ evidenziato in Oss. 6.10 b), è detto ideale segmento r -lex generalizzato individuato da h .

Notazione 10. L'ideale segmento r -lex generalizzato corrispondente a h è denotato

$$\mathbb{L}(h).$$

OSSERVAZIONE 6.12. – a) A differenza di quanto accade per gli ideali segmento r -lex, quasi segmento r -lex, inizialmente segmento r -lex, a ogni h -vettore ammissibile h corrisponde un ideale segmento r -lex generalizzato $\mathbb{L}(h)$.

b) Discende dalla *Costruzione* che per gli h -vettori ammissibili con carattere di crescita assoluto $a_0 = 0$ si ha $\mathbb{L}(h) = \mathcal{A}(h)$, mentre per quelli che ammettono solo $\mathcal{L}(h)$ si ha ovviamente $\mathbb{L}(h) = \mathcal{L}(h)$ (cf. Oss. 5.8 c) e d)).

TEOREMA 6.13. – Per ogni h -vettore ammissibile h , l'ideale segmento r -lex generalizzato $\mathbb{L}(h)$ ha i numeri di Betti minimali tra gli ideali di Borel 0-dimensionali corrispondenti ad h .

DIM. – In virtù di Oss. 6.10 a) e b), la tesi discende immediatamente dai th. 6.4 e 6.6

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] D. BAYER, *The Division Algorithm and the Hilbert Scheme*, Ph.D. Thesis, Harvard, 1981.
- [2] A. M. BIGATTI, *Aspetti combinatorici e computazionali dell'algebra commutativa*, Ph.D. Thesis, Università di Torino, 1995.
- [3] A. M. BIGATTI - A. V. GERAMITA - J. MIGLIORE, *Geometric consequences of extremal behaviour in a theorem of Macaulay*, T.A.M.S., **346** (1994), 203-235.
- [4] W. BRUNS - J. HERZOG, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Press, 1993.
- [5] A. CAPANI - G. NIESI - L. ROBBIANO, *CoCoA, a system for doing computation in Commutative Algebra*, 1995, available via anonymous ftp from cocoa.dima.uni-ge.it.
- [6] T. DEERY, *Rev-lex Segment Ideals and minimal Betti numbers*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics. The Curves Seminar, vol. X, 1996.
- [7] D. EISENBUD, *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1995.

- [8] S. ELIAHOU - M. KERVAIRE, *Minimal resolution of some monomial ideals*, J. Algebra, **129** (1990), 1-25.
- [9] J. C. FAUGERE - P. GIANNI - D. LAZARD - T. MORA, *Efficient computation of zero-dimensional Groebner bases by change of ordering*, J. Symbolic Comp., **16** (1993), 329-344.
- [10] G. FLOYSTAD, *A property deducible from the generic initial ideal*, to appear in J. of Pure and Applied Algebra.
- [11] G. FLOYSTAD - M. GREEN, *The information encoded in initial ideals*, preprint.
- [12] A. GALLIGO, *A propos du Théorem de Préparation de Weierstrass*, L.N. Math., **409** (1974), 543-579.
- [13] M. GREEN, *Generic initial ideals*, Notes from summer School on Commutative Algebra, vol. 2, Barcelona July 1996, 5-85.
- [14] H. HULLET, *Maximum Betti numbers of homogeneous ideals with a given Hilbert function*, Comm. Algebra, **21** (7) (1993), 2335-2350.
- [15] M. G. MARINARI - T. MORA - H. M. MÖLLER, *Groebner bases of ideals defined by functionals with an application to ideals of projective points*, A. A. E. C. C. vol. **4**, n. 2 (1992), 103-145.
- [16] M. G. MARINARI - L. RAMELLA, *Some properties of Borel ideals*, accettato a MEGA 1998.
- [17] L. RAMELLA, *Punti e ideali iniziali generici*, Seminario D.I.M.A. Genova, 1998.
- [18] G. VALLA, *Problems and results on Hilbert functions of graded algebras*, Notes from summer School on Commutative Algebra, vol. 1, Barcelona July 1996, 145-211.

Dipartimento di Matematica, Università, v. Dodecaneso 35, I-16146 Genova (Italy)
E-mail: marinari@dima.unige.it