Carmela Musella

FC-gruppi e proiettività

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-B** (2001), n.1, p. 97–105.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_1_97_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
(8) 4-B (2001), 97-105

FC-gruppi e proiettività.

CARMELA MUSELLA (*)

Summary. – *Some lattice properties of FC-groups and generalized FC-groups are considered in this paper.*

1. – Isomorfismi reticolari.

Se $\mathfrak{L}$ è un reticolo, un elemento a di $\mathfrak{L}$ si dice *modulare* in $\mathfrak{L}$ se verifica le seguenti condizioni:

- $x \vee (a \wedge z) = (x \vee a) \wedge z$, qualunque siano gli elementi x, z di $\mathfrak{L}$ tali che $x \leqslant z$;
- $a \vee (y \wedge z) = (a \vee y) \wedge z$, qualunque siano gli elementi y, z di $\mathfrak{L}$ tali che $a \leqslant z$.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *modulare* se è un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G. Ovviamente ogni sottogruppo normale, e più in generale, ogni sottogruppo quasinormale di un gruppo è modulare (si ricordi che un sottogruppo H di un gruppo G si dice *quasinormale* in G se $HK = KH$ per ogni sottogruppo K di G). Un gruppo G si dice poi *modulare* se il reticolo dei suoi sottogruppi è modulare, cioè se tutti i suoi sottogruppi sono modulari. La struttura dei gruppi modulari è stata descritta da Iwasawa e da Schmidt (cfr. [14], Chapter 3); in particolare, è noto che un gruppo modulare che sia non periodico oppure localmente finito è metabeliano.

Siano G e $\overline{G}$ gruppi; una *proiettività* da G su $\overline{G}$ è un isomorfismo da $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo $\mathfrak{L}(\overline{G})$ dei sottogruppi di $\overline{G}$. È ben noto che la classe dei gruppi abeliani non è invariante per proiettività; infatti, ogni gruppo modulare non periodico è reticolarmente isomorfo ad un gruppo abeliano ed un analogo risultato vale per i p-gruppi modulari localmente finiti e non-hamiltoniani (cfr. [14], Theorem 2.5.9 e Theorem 2.5.15). Ovviamente, se N è un sottogruppo normale

(*) Comunicazione presentata a Napoli in occasione del XVI Congresso U.M.I.

di un gruppo G e se $\varphi : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(\overline{G})$ è una proiettività, l'immagine N^{φ} di N è un sottogruppo modulare di $\overline{G}$. Da queste osservazioni segue che ogni immagine proiettiva di un gruppo abeliano è un gruppo metabeliano.

Chiaramente, un gruppo è finito se e solo se tale è il suo reticolo dei sottogruppi. Il prossimo importante risultato permette di ricondurre molti problemi reticolari riguardanti i sottogruppi di indice finito alle corrispondenti questioni sui gruppi finiti.

TEOREMA 1.1 (Zacher [17]). – *Siano G e $\overline{G}$ gruppi e sia $\varphi : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(\overline{G})$ una proiettività. Se H e K sono sottogruppi di G tali che H sia contenuto in K e H abbia indice finito in K, allora anche l'indice $|K^{\varphi} : H^{\varphi}|$ è finito.*

Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo con elemento minimo 0 ed elemento massimo I. Si dice che un elemento x di $\mathfrak{L}$ è *ricoperto irriducibilmente* dagli elementi $x_1, \ldots, x_t$ dell'intervallo $[x/0]$ se, per ogni elemento y di $[x/0]$ tale che $[y/0]$ sia un reticolo distributivo verificante la condizione massimale, esiste $i \leq t$ tale che $y \leq x_i$ e l'insieme $\{x_1, \ldots, x_t\}$ è minimale rispetto a questa proprietà. Chiaramente un sottogruppo H di un gruppo G è ricoperto irriducibilmente nel reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dai suoi sottogruppi $H_1, \ldots, H_t$ se e solo se H è l'unione insiemistica dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_t$ e nessuno di questi sottogruppi può essere omesso dal ricoprimento.

Un elemento a di $\mathfrak{L}$ si dice *cofinito* se esiste in $\mathfrak{L}$ una catena finita

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = I$$

tale che (per ogni $i = 0, 1, \ldots, n-1$) a_i è un elemento massimale del reticolo $[a_{i+1}/0]$ e verifica una delle seguenti condizioni:

- a_{i+1} è ricoperto irriducibilmente da un numero finito di elementi $b_1, \ldots, b_{n_i}$ di $\mathfrak{L}$ tali che $b_1 \wedge \ldots \wedge b_{n_i} \leq a_i$.

- per ogni automorfismo φ del reticolo $[a_{i+1}/0]$, l'elemento $a_i \wedge a_i^{\varphi}$ è modulare in $[a_{i+1}/0]$ e il reticolo $[a_{i+1}/a_i \wedge a_i^{\varphi}]$ è finito.

Un teorema di R. Schmidt stabilisce che un sottogruppo H di un gruppo G ha indice finito in G se e solo se è un elemento cofinito del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ (cfr. [14], Theorem 6.1.10), sicché i sottogruppi di indice finito possono essere riconosciuti nel reticolo dei sottogruppi di G.

Si noti che neppure la classe dei gruppi nilpotenti è invariante per proiettività, poiché il gruppo simmetrico di grado 3 ed il gruppo non ciclico di ordine 9 sono reticolarmente isomorfi. D'altra parte è stato provato da Yakovlev [16] che ogni immagine proiettiva di un gruppo risolubile è un gruppo risolubile. Il risultato di Yakovlev è stato poi precisato da Busetto e Napolitani: se G è un gruppo risolubile di lunghezza derivata

n e se φ è una proiettività tra G e un gruppo $\overline{G}$, allora $\overline{G}$ ha lunghezza derivata al più $3n-1$ (cfr. [14], Theorem 6.6.3).

Nella teoria delle proiettività tra gruppi, un ruolo centrale è svolto dal comportamento delle immagini dei sottogruppi normali. Fondamentale in questo ambito è il seguente risultato.

TEOREMA 1.2 (Busetto [3], Schmidt [13]). – *Siano G e $\overline{G}$ gruppi e sia N un sottogruppo normale di G. Se $\varphi : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(\overline{G})$ è una proiettività, le controimmagini del nocciolo e della chiusura normale di N^{φ} in $\overline{G}$ sono sottogruppi normali di G.*

Diversi autori hanno investigato la «deviazione» dalla normalità delle immagini proiettive dei sottogruppi normali. Il principale risultato in tal senso, dovuto a Busetto e Napolitani, stabilisce che, nella situazione del Teorema 1.2, se H e K sono le controimmagini della chiusura normale e del nocciolo di N^{φ} in $\overline{G}$, rispettivamente, allora i gruppi H/K e H^{φ}/K^{φ} sono risolubili di lunghezza derivata al più 4 e 5, rispettivamente (cfr. [4]).

2. – FC-gruppi.

Un elemento x di un gruppo G si dice un *FC-elemento* se ha un numero finito di coniugati in G, o equivalentemente se il suo centralizzante $C_G(x)$ ha indice finito in G. L'insieme $F(G)$ degli FC-elementi di un gruppo G è un sottogruppo caratteristico, che prende il nome di *FC-centro* di G. Si dice che G è un *FC-gruppo* se coincide con il suo FC-centro. Evidentemente, tra gli FC-gruppi ci sono i gruppi abeliani e i gruppi finiti.

Sia G un FC-gruppo e sia $Z(G)$ il centro di G; allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è residualmente finito ed è ricoperto da sottogruppi normali e finiti. Inoltre l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo contenente il derivato G' di G. Da queste proprietà segue che un gruppo è un FC-gruppo se e solo se può essere immerso nel prodotto diretto di un FC-gruppo periodico e di un gruppo abeliano senza torsione. La letteratura esistente sugli FC-gruppi è vasta; molti dei risultati sulle proprietà di tali gruppi sono contenuti nella monografia [15].

Si ricordi che un gruppo G si dice un *P-gruppo* se è prodotto semidiretto di un gruppo abeliano A di esponente primo e di un gruppo di ordine primo che induce su A un automorfismo potenza non banale. Se G è un P-gruppo infinito, si può provare che G è reticolarmente isomorfo ad un gruppo abeliano (cfr. [14], Theorem 2.2.3), ma non ha la proprietà FC, sicché la classe degli FC-gruppi non è invariante per proiettività. Nel seguito sarà evidenziato come alcune proprietà gruppali, connesse con gli FC-gruppi e che generalizzano la nilpotenza e la risolubilità, definiscono classi di gruppi chiuse rispetto alle proiettività. Si dice che un gruppo G è *FC-risolubile* se è dotato di una serie finita i cui fattori sono FC-gruppi.

TEOREMA 2.1 (de Giovanni, Musella [5]). – *La classe dei gruppi FC-risolubili è invariante per proiettività.*

Si dice invece che un gruppo è *FC-perfetto* se non ha immagini omomorfe non identiche che siano FC-gruppi. Allora, un gruppo G è FC-perfetto se e solo se è perfetto e non ha immagini omomorfe finite non identiche. Inoltre, Napolitani [11] ha provato che ogni immagine proiettiva di un gruppo perfetto è un gruppo perfetto, sicché dall'invarianza proiettiva della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo segue che anche la classe dei gruppi FC-perfetti è invariante per proiettività.

Sia G un gruppo. La *serie FC-centrale superiore* $\{F_\alpha(G)\}_\alpha$ di G è definita ponendo

$$F_0(G) = \{1\}, \qquad F_{\alpha+1}(G)/F_\alpha(G) = F(G/F_\alpha(G))$$

per ogni ordinale α e

$$F_\lambda(G) = \bigcup_{\beta<\lambda} F_\beta(G)$$

se λ è un ordinale limite. Il gruppo G è detto *FC-ipercentrale* se $G = F_\tau(G)$ per qualche ordinale τ.

TEOREMA 2.2 (de Giovanni, Musella [5]). – *La classe dei gruppi FC-ipercentrali è invariante per proiettività.*

Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo con elemento minimo 0 e elemento massimo I. Un elemento a di $\mathfrak{L}$ si dice *permodulare* se verifica le seguenti condizioni:

- a è un elemento modulare di $\mathfrak{L}$;
- Se x è un elemento ciclico di $\mathfrak{L}$ (cioè se l'intervallo $[x/0]$ è distributivo e verifica la condizione massimale) e b è un elemento di $[a \vee x/a]$ tale che il reticolo $[a \vee x/b]$ sia finito, allora b è un elemento cofinito di $[a \vee x/0]$.

La precedente definizione è suggerita dal comportamento delle immagini proiettive dei sottogruppi normali di un gruppo. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *permodulare* se H è un elemento permodulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$. Il concetto di sottogruppo permodulare fu introdotto da Zacher in [18], e ha svolto un ruolo fondamentale in molte caratterizzazioni di classi di gruppi infiniti invarianti per proiettività.

Il prossimo risultato stabilisce un legame tra sottogruppi permodulari e sottogruppi quasinormali di un gruppo.

TEOREMA 2.3 (Zacher [18]). – *Sia G un gruppo. Un sottogruppo M di G è quasinormale in G se e solo se M è permodulare e seriale in G.*

Sia G un gruppo e siano H e K sottogruppi normali di G tali che K sia contenuto in H. Si dice che H/K è *iperciclicamente immerso* in G se per ogni sottogruppo normale N di G tale che $K \leqslant N < H$ esiste un sottogruppo normale M di G tale che $N < M \leqslant H$ e M/N è ciclico.

LEMMA 2.4. – *Sia M un sottogruppo permodulare ciclico finito di un gruppo G. Allora M^G/M_G è iperciclicamente immerso in G.*

La proprietà descritta nel risultato precedente ha un ruolo rilevante nella dimostrazione del prossimo teorema, che fornisce una caratterizzazione reticolare della classe dei gruppi supersolubili.

TEOREMA 2.5 (Busetto [1], Zacher [18]). – *Un gruppo G è supersolubile se e solo se esiste una catena di sottogruppi permodulari di G*

$$\{1\} = M_0 \leqslant M_1 \leqslant \ldots \leqslant M_n = G$$

tale che per ogni $i < n$ il reticolo $[M_{i+1}/M_i]$ sia distributivo e verifichi la condizione massimale.

Sia $\mathfrak{X}$ una classe di gruppi. Un gruppo G è detto *iper-$\mathfrak{X}$* se è dotato di una serie ascendente di sottogruppi normali tale che ogni fattore della serie appartenga a $\mathfrak{X}$. Se $\mathfrak{X}$ è chiusa per immagini omomorfe, allora la proprietà di essere un iper-$\mathfrak{X}$ gruppo è equivalente alla proprietà che ogni immagine omomorfa non identica contenga un $\mathfrak{X}$-sottogruppo normale non identico. I gruppi iperabeliani possono essere caratterizzati mediante l'esistenza di opportune catene di sottogruppi permodulari. Si ricordi che un reticolo $\mathfrak{L}$ si dice *permodulare* se è modulare e se ogni intervallo $[a/b]$ di lunghezza finita di $\mathfrak{L}$ è finito. L'introduzione di questo concetto deriva dall'esigenza di evitare in queste considerazioni i gruppi di Tarski (i gruppi semplici infiniti i cui sottogruppi non banali hanno ordine primo). Tali gruppi, la cui esistenza è stata provata da Ol'shanskiĭ, sono modulari ma non possono comparire come sezioni di gruppi iperabeliani.

TEOREMA 2.6 (Busetto [2], Zacher [18]). – *Un gruppo G è iperabeliano se e solo se esiste una catena ascendente*

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \ldots < X_\alpha < X_{\alpha+1} < \ldots < X_\tau = G$$

di sottogruppi permodulari di G tale che per ogni numero ordinale $\alpha < \tau$ l'intervallo $[X_{\alpha+1}/X_\alpha]$ sia permodulare.

Si osservi che dal risultato precedente segue anche una caratterizzazione reticolare della classe dei gruppi policiclici.

Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo con elemento minimo 0 ed elemento massimo I. Si dice che un elemento a di $\mathfrak{L}$ è *almost permodulare* se esiste un elemento cofinito b di $\mathfrak{L}$ tale che $a \leqslant b$ e a sia un elemento permodulare di $[b/0]$. Il reticolo $\mathfrak{L}$ è detto un *FC-reticolo* se tutti i suoi elementi ciclici sono almost permodulari. Ovviamente il reticolo dei sottogruppi di ogni *FC*-gruppo è un *FC*-reticolo, mentre la considerazione dei *P*-gruppi infiniti mostra che il viceversa non è vero. Sembra interessante indagare se le proprietà rilevanti degli *FC*-gruppi possono essere tradotte in proprietà reticolari che siano valide in un qualunque *FC*-reticolo. Il prossimo risultato fornisce una caratterizzazione reticolare della classe dei gruppi iper-*FC*.

TEOREMA 2.7 (de Giovanni, Musella [5]). – *Un gruppo G è iper-FC se e solo se esiste una catena ascendente*

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \ldots < X_\alpha < X_{\alpha+1} < \ldots < X_\tau = G$$

di sottogruppi permodulari di G tale che per ogni numero ordinale $\alpha < \tau$ *l'intervallo* $[X_{\alpha+1}/X_\alpha]$ *sia un FC-reticolo.*

COROLLARIO 2.8. – *La classe dei gruppi iper-FC è invariante per proiettività.*

La considerazione del prodotto intrecciato $A_5 \wr Z(p^\infty)$ mostra che la classe dei gruppi iper-(abeliano o finito) è contenuta propriamente nella classe dei gruppi iper-*FC*. D'altra parte, in [5] è stata ottenuta anche una caratterizzazione reticolare dei gruppi iper-(abeliano o finito). Di tale risultato si fornisce qui un cenno della dimostrazione.

TEOREMA 2.9 (de Giovanni, Musella [5]). – *Un gruppo G è iper-*(*abeliano o finito*) *se e solo se esiste una catena ascendente*

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \ldots < X_\alpha < X_{\alpha+1} < \ldots < X_\tau = G$$

di sottogruppi permodulari di G tale che per ogni numero ordinale $\alpha < \tau$ *l'intervallo* $[X_{\alpha+1}/X_\alpha]$ *sia permodulare oppure finito.*

DIM. – La condizione dell'enunciato è ovviamente necessaria. Viceversa, sia G un gruppo non identico dotato di una catena di sottogruppi permodulari come descritta nell'enunciato, e si supponga che G non contiene sottogruppi normali abeliani e non identici. Allora X_1 è un sottogruppo permodulare di G il cui reticolo dei sottogruppi non è permodulare (cfr. [14], Lemma 6.4.6), sicché X_1 è finito. A questo punto, con un ragionamento simile a quello della dimostrazione del Lemma 6.4.6 di [14], è possibile dimostrare che esiste un sottogruppo H

di G contenente X_1 tale che l'indice $|H : X_1|$ sia finito ed il nocciolo di H sia non identico, sicché G contiene un sottogruppo normale e finito non identico. Poiché le ipotesi sono ereditate dalle immagini omomorfe di G, si è dunque provato che il gruppo G è iper-(abeliano o finito). ■

COROLLARIO 2.10. – *La classe dei gruppi iper-*(*abeliano o finito*) *è invariante per proiettività.*

Si osservi che l'invarianza proiettiva della classe dei gruppi iperabeliani può anche essere dedotta dal Corollario 2.10. Infatti, sia G un gruppo iperabeliano, e sia $\varphi : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(\overline{G})$ una proiettività, sicché $\overline{G}$ è iper-(abeliano o finito) per il Corollario 2.10. Se $\overline{X}/\overline{Y}$ è una sezione normale e finita di $\overline{G}$ e L è il nocciolo di $Y = \overline{Y}^{\varphi^{-1}}$ in X, allora $\overline{L} = L^{\varphi}$ è un sottogruppo normale di $\overline{X}$ e i gruppi finiti $\overline{X}^{\varphi^{-1}}/L$ e $\overline{X}/\overline{L}$ sono reticolarmente isomorfi. Dunque $\overline{X}/\overline{L}$ è risolubile, e quindi $\overline{G}$ è iperabeliano.

3. – Sottogruppi normali generalizzati.

In questo paragrafo saranno considerate proprietà reticolari di gruppi relative a certi sottogruppi normali generalizzati collegati in modo naturale alla proprietà *FC*.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *almost normal* in G se il suo normalizzante $N_G(H)$ ha indice finito in G, cioè se H ha solo un numero finito di coniugati in G. Un noto teorema di B. H. Neumann assicura che tutti i sottogruppi di un gruppo G sono almost normal in G se e solo se il centro $Z(G)$ ha indice finito in G (cfr. [12]). In generale, l'insieme $an(G)$ dei sottogruppi almost normal di un gruppo G è un sottoreticolo del reticolo $\mathfrak{L}(G)$. Ovviamente ogni sottogruppo di indice finito di un gruppo G è almost normal in G, sicché la teoria delle proiettività tra gruppi finiti può essere usata come modello per uno studio degli isomorfismi tra reticoli di sottogruppi almost normal. In [8], sono stati considerati isomorfismi $\varphi : an(G) \to an(\overline{G})$, investigando le conseguenze per il gruppo $\overline{G}$ dell'imposizione di alcune proprietà gruppali su G. In particolare, si è provato che se G è supersolubile e $\overline{G}$ è *FC*-risolubile, allora anche $\overline{G}$ è supersolubile. Qui l'ipotesi di *FC*-risolubilità è dovuta al fatto che un gruppo semplice infinito non può contenere sottogruppi almost normal non banali. Per gli isomorfismi tra reticoli di sottogruppi almost normal di gruppi *FC*-risolubili vale un risultato corrispondente al Teorema 1.2. Infatti, in [9] si è provato che se $\varphi : an(G) \to an(\overline{G})$ è un isomorfismo reticolare, dove G e $\overline{G}$ sono gruppi *FC*-risolubili, e se N è un sottogruppo normale di G tale che il gruppo quoziente G/N sia policiclico-per-finito, allora le controimmagini del nocciolo e della chiusura normale di N^{φ} in $\overline{G}$ sono sottogruppi normali di G. Inoltre si è stabilito che se G/N è un gruppo nilpotente-per-finito e finitamente generato, allora anche i gruppi G/K e $\overline{G}/K^{\varphi}$ sono estensioni finite di gruppi nilpotenti e finitamente generati (qui ovviamente K denota la controimmagine del nocciolo di N^{φ} in $\overline{G}$).

Sia G un gruppo e sia φ una proiettività da G su un gruppo $\overline{G}$. Se N è un sottogruppo almost normal di G, l'immagine N^{φ} di N è modulare in un sottogruppo di indice finito di $\overline{G}$. Si dice che un sottogruppo H di un gruppo G è *almost modulare* in G se esiste un sottogruppo di indice finito K di G contenente H tale che H sia modulare in K. Dunque ogni immagine proiettiva di un gruppo centrale-per-finito (cioè di un gruppo in cui ogni sottogruppo è almost normal) è un gruppo in cui ogni sottogruppo è almost modulare. In [7] sono stati considerati i gruppi in cui tutti i sottogruppi sono almost modulari, provando che in tali gruppi il sottogruppo derivato è periodico e che un gruppo localmente finito G con tale proprietà contiene un sottogruppo H normale e di indice finito e un sottogruppo normale e finito N tali che il reticolo $\mathfrak{L}(G/N)$ sia modulare e ogni sottogruppo di H sia modulare in G.

La teoria dei sottogruppi almost normal può in qualche senso essere dualizzata. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *nearly normal* in G se H ha indice finito nella sua chiusura normale H^G in G. Un altro rilevante teorema di B. H. Neumann prova che tutti i sottogruppi di un gruppo G sono nearly normal se e solo se il derivato G' di G è finito (cfr. [12]). L'insieme $nn(G)$ dei sottogruppi nearly normal di un gruppo G è un sottoreticolo del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G. Chiaramente i sottogruppi normali e i sottogruppi di indice finito sono nearly normal in G. In [10] sono stati considerati isomorfismi $\varphi : nn(G) \to nn(\overline{G})$, provando in particolare che se G è un gruppo supersolubile e $\overline{G}$ è un gruppo FC-risolubile, allora anche $\overline{G}$ è supersolubile. Anche nel caso degli isomorfismi tra reticoli di sottogruppi nearly normal si è stabilito un risultato dello stesso tipo del Teorema 1.2, provando che se G e $\overline{G}$ sono gruppi FC-risolubili, $\varphi : nn(G) \to nn(\overline{G})$ è un isomorfismo reticolare e N è un sottogruppo normale di G tale che il gruppo quoziente G/N sia policiclico-per-finito, allora le controimmagini del nocciolo e della chiusura normale di N^{φ} in $\overline{G}$ sono sottogruppi normali di G.

Sia G un gruppo e sia N un sottogruppo nearly normal di G. Se φ è una proiettività tra G e un gruppo $\overline{G}$, l'immagine N^{φ} di N ha indice finito in un sottogruppo modulare di $\overline{G}$. Si dice che un sottogruppo H di un gruppo G è *nearly modulare* in G se esiste un sottogruppo modulare K di G contenente H tale che l'indice $|K : H|$ sia finito. Dunque ogni immagine proiettiva di un gruppo finito-per-abeliano (cioè di un gruppo in cui ogni sottogruppo è nearly normal) è un gruppo in cui ogni sottogruppo è nearly modulare. In [6] si è provato in particolare che se G è un gruppo localmente graduato (cioè un gruppo in cui ogni sottogruppo non identico contiene un sottogruppo proprio di indice finito) con tale proprietà, allora il derivato G' di G è periodico, e quindi l'insieme T degli elementi periodici di G è un sottogruppo e G/T è abeliano.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BUSETTO, *Proprietà di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **63** (1980), 269-284.

[2] G. BUSETTO, *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi iperabeliani*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **68** (1980), 95-98.

[3] G. BUSETTO, *Sottogruppi normali e proiettività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67** (1982), 105-110.

[4] G. BUSETTO - F. NAPOLITANI, *On projectivities of groups*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **23** (1990), Suppl., 45-55.

[5] F. DE GIOVANNI - C. MUSELLA, *FC-groups and projectivities*, sottomesso per la pubblicazione.

[6] F. DE GIOVANNI - C. MUSELLA, *Groups with nearly modular subgroup lattice*, Colloq. Math., in corso di stampa.

[7] F. DE GIOVANNI - C. MUSELLA - Y. P. SYSAK, *Groups with almost modular subgroup lattice*, sottomesso per la pubblicazione.

[8] C. MUSELLA, *On almost normal subgroups of supersoluble groups»*, Boll. Un. Mat. Ital., **2**-B (1999), 715-722.

[9] C. MUSELLA, *Isomorphisms between lattices of almost normal subgroups*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **49** (2001), in corso di stampa.

[10] C. MUSELLA, *Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups*, Note Mat., in corso di stampa.

[11] F. NAPOLITANI, *Isomorfismi reticolari e gruppi perfetti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67** (1982), 181-184.

[12] B. H. NEUMANN, *Groups with finite classes of conjugate subgroups*, Math. Z., **63** (1955), 76-96.

[13] R. SCHMIDT, *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, Proc. London Math. Soc., **30** (1975), 287-300.

[14] R. SCHMIDT, *Subgroup Lattices of Groups*, de Gruyter, Berlin (1994).

[15] M. J. TOMKINSON, *FC-groups*, Pitman, London (1984).

[16] B. V. YAKOVLEV, *Lattice isomorphisms of solvable groups*, Algebra and Logic **9** (1970), 210-222.

[17] G. ZACHER, *Una caratterizzazione reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **69** (1980), 317-323.

[18] G. ZACHER, *Una relazione di normalità sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo*, Ann. Mat. Pura Appl., **131** (1982), 57-73.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II
Complesso Universitario Monte S. Angelo, Via Cintia - 80126, Napoli, Italia