Bollettino Unione Matematica Italiana

Aomar Anane, Omar Chakrone, Jean-Pierre Gossez

Spectre d'ordre supérieur et problèmes aux limites quasi-linéaires

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-B** (2001), n.2, p. 483–519.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_2_483_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
(8) 4-B (2001), 483-519

Spectre d'ordre supérieur et problèmes aux limites quasi-linéaires.

AOMAR ANANE - OMAR CHAKRONE - JEAN-PIERRE GOSSEZ

Sunto. – *Nello studio dei problemi del tipo* $-\Delta u = f(x, u) + h(x)$, *si impongono generalmente delle condizione sul comportamento asintotico di* $f(x, u)$ *rispetto allo spettro di* $-\Delta$. *Avendo in vista dei problemi quasilineari del tipo* $-\Delta u = f(x, u, \nabla u) + h(x)$, *sembra naturale introdurre una nozione di spettro per* $-\Delta$ *che tenga conto della dipendenza del membro di destra rispetto al gradiende* ∇u. *L'oggetto di questo lavoro è di definire, studiare e applicare questa nuova nozione di spettro.*

1. – Introduction.

Dans l'étude des problèmes elliptiques semi-linéaires tels que

$$(1.1)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\,, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, il est habituel d'imposer des conditions portant sur le comportement asymptotique de la non linéarité $f(x, u)$ par rapport au spectre de la partie linéaire $-\Delta$. Dans les situations les plus simples, on regarde $f(x, u)$ comme une perturbation de λu. Suivant que λ est ou n'est pas une valeur propre de $-\Delta$, des résultats de type résonance ou non-résonance sont alors obtenus. Parmi les références les plus classiques à ce sujet, on peut citer [H] ($\lambda < \lambda_1$), [D] (λ entre deux valeurs propres consécutives), [L,L] ($\lambda = \lambda_1$),...

Nous considérons maintenant le problème quasi-linéaire

$$(1.2)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

En gardant à l'esprit cette idée de «perturbation par rapport au spectre», il semble naturel dans l'étude de (1.2) d'introduire une notion de spectre pour $-\Delta$ qui tient compte de la dépendance du membre de droite par rapport au gradient ∇u. Définir, étudier et appliquer cette nouvelle notion de spectre sont les objets de ce travail.

Nous définissons le spectre d'ordre un de $-\Delta$ comme l'ensemble $\sigma_1(-\Delta)$ des couples $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tels que le problème

$$(1.3) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \alpha u + \beta . \nabla u & \text{dans } \Omega , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

a une solution non triviale u. Dans la section 3 nous montrons que $\sigma_1(-\Delta)$ est constitué d'une suite de paraboloïdes dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ passant par les points $(0, \lambda_k)$, où $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ désigne la suite des valeurs propres usuelles de $-\Delta$.

Pour un opérateur général du second ordre à structure divergence

$$Lu := -\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

la définition précédente doit être légèrement modifiée. Le spectre d'ordre un de L pour le poids $m(x)$ est défini comme l'ensemble $\sigma_1(L, m)$ des couples $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tels que le problème

$$(1.4) \qquad \begin{cases} -Lu = \alpha m(x)\, u + \beta . (A(x)\, \nabla u) & \text{dans } \Omega , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

a une solution non triviale u, où $A(x)$ désigne la matrice des coefficients $a_{ij}(x)$ de L. Nous montrons dans la section 2 que $\sigma_1(L, m)$ peut être entièrement décrit par des formules de minimax «à la Courant». Les surfaces propres dans $\mathbb{R}^N \times R$ ainsi obtenues sont continues et comprises entre des paraboloïdes (du moins lorsque le poids $m(x)$ est $\geqslant \varepsilon > 0$). Nous établirons aussi un résultat du type alternative de Fredholm pour le problème

$$(1.5) \qquad \begin{cases} Lu = \alpha m(x)\, u + \beta . (A(x)\, \nabla u) + h(x) & \text{dans } \Omega , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Dans la section 4 nous considérons le cas du problème de Neumann, qui présente une difficulté particulière lorsque le poids change de signe.

Les sections 5 et 6 concernent le p-laplacien. Le spectre d'ordre un de $-\Delta_p$ pour le poids $m(x)$ est défini comme l'ensemble $\sigma_1(-\Delta_p, m)$ des couples $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tels que le problème

$$(1.6) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \alpha m(x)\, |u|^{p-2} u + \beta . \, |\nabla u|^{p-2} \nabla u & \text{dans } \Omega , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

a une solution non triviale u. Utilisant la méthode de Ljusternik-Schnirelmann, nous montrons que $\sigma_1(-\Delta_p, m)$ contient une suite de surfaces propres, suite qui tend vers l'infini dans un certain sens. Nous établissons aussi dans ce contexte un résultat partiel du type alternative de Fredholm. Le début du spectre $\sigma_1(-\Delta_p, m)$ est étudié en détail dans la section 6: simplicité et isolation de la première surface propre, détermination de la deuxième surface propre, dépendance monotone stricte de ces surfaces par rapport au poids.

Les sections 7 et 8 sont consacrées aux applications. Nous y étudions l'existence de solution au problème (1.2) et plus généralement au problème

$$\text{(1.7)} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u, \nabla u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\,, \end{cases}$$

lorsque la nonlinéarité f est asymptotiquement en-dessous de la première surface propre (section 7) ou entre deux surfaces propres consécutives (section 8). Les démonstrations dans la section 7 font intervenir le lemme de Brézis-Browder [B,B] ainsi qu'une technique de troncature inspirée de [B,B,M], cela afin de pouvoir traiter le cas où f satisfait seulement une condition de croissance d'un seul côté par rapport à u et une condition de croissance de degré p par rapport à ∇u. Dans la section 8 nous utilisons la théorie du degré pour les opérateurs de type $(S+)$ (cf. [B,M]), cela afin de pouvoir traiter la dépendance du membre de droite en le gradient. L'introduction du spectre d'ordre un nous permet d'améliorer sensiblement plusieurs résultats de [B,B,M], [DV] relatifs à (1.7), comme nous le préciserons dans la remarque 7.2.

Certains résultats de ce travail ont été annoncés dans [A,C,G].

2. – Spectre d'ordre un et alternative de Fredholm.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et soit

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

un opérateur linéaire uniformément elliptique avec $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ et $a_{i,j} = a_{j,i}\,\forall i, j$. En notant $A(x)$ la matrice des $a_{i,j}(x)$, l'opérateur L s'écrit encore: $Lu = -\,div(A(x)\,\nabla u)$.

On considère le problème aux valeurs propres d'ordre un suivant:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\beta, \alpha, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \text{ tel que} \\ \quad Lu = \alpha m(x)\,u + \beta.\,(A(x)\,\nabla u) & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ \quad\;\; u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\,, \end{cases}$$

où $m \in M := \{m \in L^\infty(\Omega);\ mes\{x \in \Omega;\ m(x) > 0\} \neq 0\}$. Si (β, α, u) est une solution de ce problème, alors (β, α) est dit valeur propre d'ordre un et u fonction propre associée. On désigne par $\sigma_1(L, m) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs propres d'ordre un (β, α) avec $\alpha \geqslant 0$. Lorsque le poids m change de signe, le spectre complet est la réunion de $\sigma_1(L, m)$ et de $-\sigma_1(L, -m)$.

Le problème classique aux valeurs propres (d'ordre zéro) s'écrit:

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\mu, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} \text{ tel que} & \\ Lu = \mu m(x)\, u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On désigne par $\sigma_0(L, m)$ l'ensemble des valeurs propres $\mu \geqslant 0$. Il est clair que l'intersection de $\sigma_1(L, m)$ avec la droite $\beta = 0$ redonne $\sigma_0(L, m)$.

Rappelons que $\sigma_0(L, m)$ est constitué d'une suite de nombres > 0: $\mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots \to +\infty$, où

$$\text{(2.3)} \qquad \frac{1}{\mu_n} := \sup_{F \in \mathcal{F}_n(H_0^1(\Omega))} \min \left\{ \int_\Omega m(x)\, |u|^2;\ u \in F \text{ et } a(u, u) = 1 \right\}$$

et où chaque μ_n est répété suivant sa multiplicité (voir par exemple [De]). Les notations suivantes ont été utilisées ci-dessus: $\mathcal{F}_n(E)$ désigne la famille des sous-espaces de dimension $\geqslant n$ de l'espace E, et $a(u, v)$ désigne la forme de Dirichlet sur $H_0^1(\Omega)$ associée à l'opérateur L:

$$\text{(2.4)} \qquad a(u, v) = \int_\Omega \sum a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

On écrira parfois $\mu_n = \mu_n(L, m)$.

Dans cette section nous allons démontrer que le spectre d'ordre un, $\sigma_1(L, m)$, est constitué d'une suite de surfaces dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_0^+$ tendant vers $+\infty$ (théorème 2.1). Nous utiliserons pour cela la méthode de Courant telle que rappelée ci-dessus en (2.3). Nous verrons que ces surfaces sont continues (remarque 2.2) et comprises entre des paraboloïdes (du moins lorsque le poids $m(x)$ est $\geqslant \varepsilon > 0$, cf. remarque 2.2). Nous établirons aussi un résultat du type alternative de Fredholm (théorème 2.3).

Définissons, pour $\beta \in \mathbb{R}^N$, l'opérateur L^β, par

$$\text{(2.5)} \qquad L^\beta u := -\sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left(e^{\beta \cdot x} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

et notons $a^\beta(u, v)$ la forme de Dirichlet associée:

$$\text{(2.6)} \qquad a^\beta(u, v) := \int_\Omega \sum e^{\beta \cdot x} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

THÉORÈME 2.1. – (i) $\sigma_1(L, m)$ *est la réunion de la suite des graphes des fonctions* $\Gamma_n: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$, $n = 1, 2, \ldots$, *où* $\Gamma_n(\beta)$ *est défini pour* $\beta \in \mathbb{R}^N$ *par*

$$\frac{1}{\Gamma_n(\beta)} := \sup_{F \in \mathcal{F}_n(H_0^1(\Omega))} \min \left\{ \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) \, |u|^2 ;\ u \in F \text{ et } a^\beta(u, u) = 1 \right\}. \tag{2.7}$$

(ii) *Pour chaque* $\beta \in \mathbb{R}^N$, $\Gamma_1(\beta) < \Gamma_2(\beta) \leqslant \Gamma_3(\beta) \leqslant \ldots \to +\infty$.

On écrira parfois $\Gamma_n(\beta) = \Gamma_n(\beta, L, m)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. – Soit $(\beta, \alpha, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$. On vérifie facilement que (β, α, u) est une solution du problème d'ordre un (2.1) si et seulement si (α, u) est solution du problème (d'ordre zéro):

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\alpha, u) \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} \text{ tel que} & \\ L^\beta u = \alpha e^{\beta \cdot x} m(x) \, u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Pour chaque $\beta \in R^N$, l'opérateur L^β jouit des mêmes propriétés que L et le poids $e^{\beta \cdot x} m(x)$ de (2.8) appartient encore à M. En appliquant alors la méthode de Courant telle que rappelée en (2.3) au problème (2.8), on déduit les conclusions du théorème 2.1. ∎

Il résulte de la démonstration précédente que $(\beta, \alpha) \in \sigma_1(L, m)$ si et seulement si $\alpha \in \sigma_0(L^\beta, e^{\beta \cdot x} m(x))$.

REMARQUES 2.2. – 1) On déduit facilement de (2.7) et de la proposition 3.2 de la section suivante que

$$\Gamma_n(\beta, L, m) \geqslant \frac{c_1}{\|m\|_\infty} \left(\mu_n(-\Delta, 1) + \frac{|\beta|^2}{4} \right)$$

et que, lorsque $m(x) \geqslant \varepsilon > 0$,

$$\Gamma_n(\beta, L, m) \leqslant \frac{c_2}{\varepsilon} \left(\mu_n(-\Delta, 1) + \frac{|\beta|^2}{4} \right),$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives telles que $c_1 |\xi|^2 \leqslant A(x) \, \xi \cdot \xi \leqslant c_2 |\xi|^2$ p.p. x, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$. Rappelons que $\mu_n(-\Delta, 1)$ désigne ici la n$^{\text{eme}}$ valeur propre de $-\Delta$ pour le poids $m(x) \equiv 1$.

2) Pour chaque n, la fonction $\Gamma_n: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est continue. La preuve de ce résultat est analogue à celle donnée plus loin pour le p-laplacien (cf. théorème 5.4).

3) On peut se demander si les surfaces propres distinctes sont disjointes. Cela revient à vérifier que la multiplicité de la valeur propre d'ordre un $(\beta, \Gamma_n(\beta))$ est indépendante de β. Nous verrons dans la section suivante que la réponse est affirmative lorsque L est à coefficients constants et $m(x) \equiv 1$.

4) On pourrait essayer de définir une notion de spectre d'ordre un à partir de l'équation $Lu := \alpha m(x)\, u + \beta \cdot \nabla u$. Lorsque L est à coefficients constants, cette équation s'écrit $Lu = \alpha m(x) + \beta A^{-1} \cdot A \nabla u$, où $A(x) \equiv A$, et on est ramené à un problème de la forme (2.1).

5) On peut aussi définir le spectre d'ordre $2m-1$ pour un opérateur d'ordre $2m$. Plusieurs résultats de ce travail peuvent être étendus à cette situation (cf. [C]).

THÉORÈEME 2.3. – (i) *Le problème*

$$(2.9) \qquad \begin{cases} Lu = \alpha m(x)\, u + \beta .\, (A(x)\, \nabla u) + h & \textit{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution pour tout $h \in H^{-1}(\Omega)$ *si et seulement si* $(\beta, \alpha) \notin \sigma_1(L, m)$.

(ii) *Soient maintenant* $(\beta, \alpha) \in \sigma_1(L, m)$ *et* $h \in H^{-1}(\Omega)$. *Alors le problème* (2.9) *admet une solution si et seulement si* $\langle e^{\beta \cdot x} h, \phi \rangle = 0$ *pour tout* $\phi \in E_{(\beta, \alpha)}$, *où* $E_{(\beta, \alpha)}$ *est le sous-espace engendré par les fonctions propres d'ordre un associées à* (β, α) *et où* $\langle , \rangle$ *désigne la dualité entre* $H^{-1}(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3. – (i) Le problème (2.9) est équivalent au problème

$$(2.10) \qquad \begin{cases} L^\beta u = \alpha e^{\beta \cdot x} m(x)\, u + e^{\beta \cdot x} h & \textit{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où L^β est défini par (2.5). Comme l'application $h \in H^{-1}(\Omega) \to e^{\beta \cdot x} h \in H^{-1}(\Omega)$ est bijective, le problème (2.10) admet une solution pour tout $h \in H^{-1}(\Omega)$ si et seulement si, d'après l'alternative de Fredholm usuelle, $\alpha \notin \sigma_0(L^\beta, e^{\beta \cdot x} m(x))$ c'est-à-dire $(\beta, \alpha) \notin \sigma_1(L, m)$ (cf. la démonstration du théorème 2.1).

(ii) Le problème (2.9) admet une solution si et seulement si le problème (2.10) en admet une. D'après l'alternative de Fredholm usuelle, cela aura lieu si et seulement si $\langle e^{\beta \cdot x} h, \phi \rangle = 0$ pour tout ϕ solution de (2.8), c'est-à-dire finalement si et seulement si $\langle e^{\beta \cdot x} h, \phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in E_{(\beta, \alpha)}$. ■

REMARQUE 2.4. – En faisant $\beta = 0$ dans le théorème 2.3, on retrouve l'alternative de Fredholm usuelle pour l'opérateur L.

3. – Opérateurs à coefficients constants.

Dans cette section nous allons étudier le cas particulier où L est à coefficients constants: $A(x) \equiv A$. Nous verrons que le spectre $\sigma_1(L, m)$ est alors symétrique en β. De plus, lorsque le poids $m(x) \equiv 1$, les fonctions $\Gamma_n(\beta)$ sont des polynômes de degré deux.

On notera

$$s_\beta(x) := \exp\left(\frac{\beta . x}{2}\right) \quad \text{et} \quad t_\beta(x) := \exp\left(-\frac{\beta . x}{2}\right) \qquad \text{pour } \beta \text{ et } x \in \mathbb{R}^N.$$

LEMME 3.1. – (i) *Pour tout* $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $s_\beta \phi$ *et* $t_\beta \phi \in H_0^1(\Omega)$.

(ii) *Pour tout* ϕ, $u \in H_0^1(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \textit{et} \quad \int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1. – L'assertion (i) provient du fait que t_β, $s_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. L'assertion (ii) est clairement vérifiée pour tout u, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La conclusion en résulte par densité. ■

PROPOSITION 3.2. – *Supposons L à coefficients constants.*

(i) (β, α, u) *est solution de* (2.1) *si et seulement si* α *est valeur propre et* $s_\beta u$ *fonction propre associée du problème* (*d'ordre zéro*):

$$\left\{\begin{array}{ll} Lv + \dfrac{A\beta\cdot\beta}{4} v = \lambda m(x)\, v & \textit{dans} \quad \Omega\,, \\ v = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega\,. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

(ii) *Les surfaces propres de* $\sigma_1(L, m)$ *sont symétriques. En fait* $\Gamma_n(\beta, L, m) = \Gamma_n(-\beta, L, m)$.

(iii) *Si* $m(x) \equiv 1$, *alors*

$$\Gamma_n(\beta, L, 1) = \mu_n(L, 1) + \frac{A\beta\cdot\beta}{4} \tag{3.2}$$

pour tout $\beta \in \mathbb{R}^N$ *et* $n = 1, 2, \ldots$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2. – (i) Supposons que (β, α, u) est solution de (2.1). Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Par le lemme 3.1, $\phi s_\beta \in H_0^1(\Omega)$. En prenant

ϕs_β comme fonction test dans (2.1), il vient

$$\int_\Omega A\nabla u \,.\, \nabla(\phi s_\beta) = \alpha \int_\Omega m(x)\, u\phi s_\beta + \int_\Omega (\beta \,.\, A\nabla u)(\phi s_\beta)\,. \tag{3.3}$$

Posons $v(x) := u(x)\, s_\beta(x)$. On a donc

$$u(x) = v(x)\, t_\beta(x)\,, \qquad \nabla u = \left(\nabla v - \frac{v\beta}{2}\right) t_\beta \qquad \text{et} \qquad \nabla(\phi s_\beta) = \left(\nabla\phi + \frac{\phi\beta}{2}\right) s_\beta.$$

En remplaçant dans (3.3) et en utilisant le lemme 3.1, on obtient

$$\int_\Omega A\nabla v \,.\, \nabla\phi = \int_\Omega \left(\alpha m(x) - \frac{A\beta\cdot\beta}{4}\right) v\phi\,.$$

Il en résulte que α est valeur propre du problème (3.1), ce qui établit la moitié de l'assertion (i). L'implication réciproque se démontre par un calcul identique.

(ii) Fixons β et soit $\lambda_1(\beta, L, m) < \lambda_2(\beta, L, m) \leq \lambda_3(\beta, L, m) \leq \ldots$ la suite des valeurs propres > 0 de (3.1). Par le point (i), chaque $\Gamma_n(\beta, L, m)$ est égal à un $\lambda_k(\beta, L, m)$ et inversément chaque $\lambda_k(\beta, L, m)$ est égal à un $\Gamma_n(\beta, L, m)$. De plus, comme $u \to s_\beta u$ est un isomorphisme, les multiplicités sont égales. Comme les $\Gamma_n(\beta, L, m)$, $n = 1, 2, \ldots$, et les $\lambda_k(\beta, L, m)$, $k = 1, 2, \ldots$ vont en croissant et sont répétés suivant leur multiplicité, on déduit que

$$\Gamma_n(\beta, L, m) = \lambda_n(\beta, L, m) \tag{3.4}$$

pour tout n. Comme on a clairement $\lambda_n(\beta, L, m) = \lambda_n(-\beta, L, m)$, le point (ii) en résulte.

(iii) Lorsque $m(x) \equiv 1$, les valeurs propres de (3.1) sont égales à celles de L translatées de $-A\beta\cdot\beta/4$. La formule (3.2) résulte alors de (3.4). ■

4. – Problème de Neumann.

Dans cette section on suppose la frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. L'opérateur L vérifie les mêmes hypothèses que dans la section 2.

On considère le problème aux valeurs propres d'ordre un suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\beta, \alpha, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times H^1(\Omega)\backslash\{0\} \quad \text{tel que} \\ L(u) = \alpha m(x)\, u + \beta \,.\, (A(x)\, \nabla u) & \text{dans } \Omega\,, \\ \partial u/\partial \nu_L = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $m \in M$ et où $\partial/\partial\nu_L$ représente la dérivation conormale associée à L. On désigne par $\widetilde{\sigma_1}(L, m)$ l'ensemble des valeurs propres d'ordre un $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^N \times$

$\mathbb{R}^+$. Les solutions de (4.1) s'entendent évidemment au sens faible, c'est-à-dire $u \in H^1(\Omega)$ avec

$$a(u, v) = \int_\Omega \alpha m(x)\, uv + \int_\Omega \beta \cdot (A(x)\, \nabla u)\, v \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{4.2}$$

où $a(u, v)$ désigne la forme de Dirichlet (2.4) considérée maintenant sur $H^1(\Omega)$.

Le problème aux valeurs propres d'ordre zéro s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mu, u) \in \mathbb{R} \times H^1(\Omega) \backslash \{0\} \quad \text{tel que} & \\ Lu = \mu m(x)\, u & \text{dans} \quad \Omega, \\ \partial u / \partial \nu_L = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

On désigne par $\widetilde{\sigma}_0(L, m)$ l'ensemble des valeurs propres $\mu \geqslant 0$.

Puisque $H^1(\Omega)$ contient les constantes non nulles, on remarque que $0 \in \widetilde{\sigma}_0(L, m)$ et que la forme de Dirichlet $a(u, v)$ ne définit pas un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$. Pour adapter la méthode de Courant à cette situation, nous allons construire un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui ne contient pas les constantes et sur lequel $a(u, v)$ définit un produit scalaire. Nous traiterons directement le cas du spectre d'ordre un, le cas du spectre usuel s'obtenant en faisant ci-dessous $\beta = 0$. La construction différera suivant que $\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) \neq 0$ ou $= 0$.

Pour chaque $\beta \in \mathbb{R}^N$, on définit le sous-espace de $H^1(\Omega)$:

$$H(m, \beta) := \begin{cases} \left\{ u \in H^1(\Omega);\ \int_\Omega e^{\beta . x} m(x)\, u = 0 \right\} & \text{lorsque } \int_\Omega e^{\beta . x} m(x) \neq 0, \\ \left\{ u \in H^1(\Omega);\ \int_\Omega e^{\beta . x} m(x)\, u = \int_\Omega u = 0 \right\} & \text{lorsque } \int_\Omega e^{\beta . x} m(x) = 0. \end{cases}$$

LEMME 4.1. – (i) *Il existe une constante $c > 0$ telle que $c \int_\Omega u^2 \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2$ pour tout $u \in H(m, \beta)$.*

(ii) *La forme de Dirichlet $a^\beta(u, v)$ définie en* (2.6) *est un produit scalaire sur $H(m, \beta)$ équivalent au produit scalaire usuel $\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.1. – (i) Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $u_n \in H(m, \beta)$ telle que $\frac{1}{n} \int_\Omega u_n^2 > \int_\Omega |\nabla u_n|^2$. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_2}$, de sorte que

$$\int_\Omega v_n^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} > \int_\Omega |\nabla v_n|^2. \tag{4.4}$$

Pour une suite partielle, $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(\Omega)$ et $v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$, et on déduit de (4.4) que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Omega v^2 = 1 .$$

Par conséquent v est une constante non nulle. Comme $H(m, \beta)$ est fermé, $v \in H(m, \beta)$, d'où une contradiction puisque $H(m, \beta)$ ne contient pas les constantes non nulles. Le point (ii) découle immédiatement de (i) et de l'uniforme ellipticité de L. ■

THÉORÈME 4.2. – (i) *$\tilde{\sigma}_1(L, m)$ est la réunion de $\mathbb{R}^N \times \{0\}$ et de la suite des graphes des fonctions $\tilde{\Gamma}_n$: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, où $\tilde{\Gamma}_n(\beta)$ est défini pour $\beta \in \mathbb{R}^N$ par*

$$\frac{1}{\tilde{\Gamma}_n(\beta)} := \sup_{F \in \mathcal{F}_n(H(m, \beta))} \min \left\{ \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, u^2 ;\ u \in F \ \text{ et } \ a^\beta(u, u) = 1 \right\}. \tag{4.5}$$

(ii) *Pour chaque $\beta \in \mathbb{R}^N$, $0 < \tilde{\Gamma}_1(\beta) \leqslant \tilde{\Gamma}_2(\beta) \leqslant \ldots \to +\infty$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.2. – Soit $(\beta, \alpha, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times H^1(\Omega)$. Comme dans la démonstration du théorème 2.1, on commence par vérifier que (β, α, u) est solution de (4.1) si et seulement si (α, u) est solution de

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\alpha, u) \in \mathbb{R}^+ \times H^1(\Omega) \backslash \{0\} \quad \text{tel que} \\ a^\beta(u, v) = \alpha \displaystyle\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, uv \qquad \forall\ v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.6}$$

Admettons un instant le lemme suivant qui transforme notre problème dans $H^1(\Omega)$ en un problème dans $H(m, \beta)$.

LEMME 4.3. – *Soit $\beta \in \mathbb{R}^N$ fixé et considérons le problème*

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\alpha, u) \in \mathbb{R}^+ \times H(m, \beta) \backslash \{0\} \quad \text{tel que} \\ a^\beta(u, v) = \alpha \displaystyle\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, uv \qquad \forall\ v \in H(m, \beta). \end{cases} \tag{4.7}$$

Alors α est valeur propre de (4.7) *si et seulement si $\alpha > 0$ et est valeur propre de* (4.6).

Rappelons aussi le résultat classique suivant (voir par exemple [De]).

LEMME 4.4. – *Soit H un espace de Hilbert réel de dimension infinie, de produit scalaire $(\,,)$ et de norme $\|\ \|$, et soit $T: H \to H$ un opérateur linéaire compact symétrique. Posons*

$$\nu_n := \sup_{F \in \mathcal{F}_n(H)} \min \{(Tu, u);\ u \in F \text{ et } \|u\| = 1\} \tag{4.8}$$

et supposons $\nu_n > 0$ pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ Alors l'ensemble des valeurs propres > 0 de T est la suite $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots$ De plus $\nu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Pour poursuivre la démonstration du théorème 4.2, on introduit l'opérateur $T: H(m, \beta) \to H(m, \beta)$ défini par

$$a^\beta(Tu, v) = \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, uv \quad \forall u, v \in H(m, \beta).$$

On vérifie aisément que T est bien défini, compact et symétrique. De plus le problème (4.7) s'écrit

$$Tu = \frac{1}{\alpha} u, \qquad u \in H(m, \beta).$$

Les conclusions du théorème 4.2 suivent alors du lemme 4.4 une fois démontré que, pour chaque n,

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_{n(H(m,\beta))}} \min \left\{ \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) u^2;\ u \in F \text{ et } a^\beta(u, u) = 1 \right\} > 0. \tag{4.9}$$

Pour établir (4.9) on commence par construire, comme dans [De], $3n$ fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ de supports deux à deux disjoints, $u_1^i, \ldots, u_n^i$, $i = 1, 2, 3$, telles que $\int_\Omega e^{\beta \cdot c} m(x)(u_k^i) > 0$ pour chaque i, k. On choisit ensuite, pour chaque k, des coefficients $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$ non tous nuls tels que

$$u_k := \alpha_k^1 u_k^1 + \alpha_k^2 u_k^2 + \alpha_k^3 u_k^3 \in H(m, \beta).$$

On vérifie ensuite, comme dans [De], que

$$\min \left\{ \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, u^2;\ u \in F \text{ et } a^\beta(u, u) = 1 \right\} > 0$$

pour $F = \text{vect}\{u_1, \ldots, u_n\}$, ce qui entraîne (4.9). ■

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.3. – Soit (α, u) une solution du problème (4.7). Comme $H(m, \beta)$ ne contient pas les constantes non nulles, on voit de suite que $\alpha > 0$. Considérons d'abord le cas où $\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) \neq 0$. Pour $v \in H^1(\Omega)$, on pose $v_1 = v - c$ où $c = \left(\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) \right)^{-1} \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, v$, de sorte que $v_1 \in H(m, \beta)$. En utilisant (4.7) et le fait que $u \in H(m, \beta)$, on a

$$\begin{aligned} a^\beta(u, v) &= a^\beta(u, v_1) \\ &= \alpha \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, u v_1 \\ &= \alpha \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, u v - \alpha c \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, u \\ &= \alpha \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, u v \,. \end{aligned}$$

Puisque $v \in H^1(\Omega)$ est arbitraire, il en résulte que (β, α, u) est une solution de (4.6).

Considérons maintenant le cas où $\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) = 0$. Fixons $w \in H^1(\Omega)$ tel que $\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, w \neq 0$ et posons

$$c_u = \left(\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, w \right)^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} a^\beta(u, w) - \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, u w \right),$$

de sorte que

$$a^\beta(u, w) = \alpha \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)(u + c_u)\, w \,. \tag{4.10}$$

On va montrer que $(\alpha, u + c_u)$ est solution de (4.6). Pour cela on écrit, pour chaque $v \in H^1(\Omega)$, $v = v_1 + c_1 w + c_2$ où

$$c_1 = \frac{\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, v}{\int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, w}, \qquad c_2 = \frac{1}{mes(\Omega)} \left(\int_\Omega v - c_1 \int_\Omega w \right), \qquad v_1 = v - c_1 w - c_2 .$$

On voit facilement que $v_1 \in H(m, \beta)$. En utilisant (4.7) (4.10) et le fait que $u v_1 \in$

$H(m, \beta)$, on a

$$\begin{aligned} a^{\beta}(u + c_u, v) &= a^{\beta}(u, v) \\ &= a^{\beta}(u, v_1) + c_1 a^{\beta}(u, w) \\ &= \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)\, u v_1 + c_1 \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)(u + c_u)\, w \\ &= \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)(u + c_u)(v_1 + c_2) + c_1 \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)(u + c_u)\, w \\ &= \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)(u + c_u)\, v\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(\alpha, u + c_u)$ est solution de (4.6).

Réciproquement soit maintenant (αu) solution de (4.6) avec $\alpha > 0$. En prenant $v \equiv 1$ dans (4.6), on obtient $\int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)\, u = 0$. Considérons d'abord le cas où $\int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x) \neq 0$. Ce qui précède implique donc que $u \in H(m, \beta)$ et on déduit que (α, u) est solution de (4.7). Considérons maintenant le cas où $\int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x) = 0$. On pose

$$\tilde{u} = u - moy(u) \qquad \text{où} \qquad moy(u) := \frac{1}{mes\, \Omega} \int_{\Omega} u\,,$$

et on vérifie facilement que $\tilde{u} \in H(m, \beta)$. On a alors pour tout $v \in H(m, \beta)$

$$\begin{aligned} a^{\beta}(\tilde{u} v) &= a^{\beta}(uv) \\ &= \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)\, uv \\ &= \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)\, \tilde{u} v + \alpha moy(\phi) \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)\, v \\ &= \alpha \int_{\Omega} e^{\beta \cdot x} m(x)\, \tilde{u} v \end{aligned}$$

ce qui montre que $(\alpha \tilde{u})$ est solution de (4.7). Ceci termine la démonstration du lemme 4.3 et du théorème 4.2. ■

REMARQUES 4.5. – 1) La description précédente semble nouvelle même dans le cas du spectre d'ordre zéro.

2) Si $m(x) \geqslant \varepsilon > 0$ p.p. x alors on peut obtenir $\tilde{\sigma}_1(Lm)$ (et $\tilde{\sigma}_0(L, m)$) sans introduire l'espace $H(m\beta)$. En effet, l'équation $Lu = \alpha m(x)\, u + \beta \cdot A(x)\, \nabla u$ s'écrit $Lu + m(x) u = (\alpha + 1)\, m(x)\, u + \beta \cdot A(x)\, \nabla u$ et la forme de Dirichlet

associée au membre de gauche de cette dernière équation est coercive sur $H^1(\Omega)$. Le lemme 4.4 peut alors être appliqué directement dans $H^1(\Omega)$.

3) Dans le cas du laplacien nous ne savons pas que si le spectre $\tilde{\sigma}_1(-\Delta, 1)$ admet une expression explicite comme dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet.

4) L'alternative de Fredholm peut aussi être établie dans le présent contexte.

5) On peut également considérer des conditions aux limites mêlées de Dirichlet-Neumann. Cette situation est en fait plus simple que celle des conditions de Neumann et ne nécessite pas l'introduction d'un sous-espace.

5. – Spectre d'ordre un du p-laplacien.

On considère le problème aux valeurs propres d'ordre un suivant:

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\beta, \alpha, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\} \quad \text{tel que} \\ -\Delta_p u = \alpha m(x)|u|^{p-2}u + \beta . \, |\nabla u|^{p-2}\nabla u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $1 < p < \infty$ et $m \in M$. Rappelons que $\Delta_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Si (β, α, u) est solution de ce problème, alors (β, α) est dit valeur propre d'ordre un et u fonction propre associée. On désigne par $\sigma_1(-\Delta_p, m) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs propres d'ordre un (β, α) avec $\alpha \geqslant 0$.

Le problème classique aux valeurs propres (d'ordre zéro) s'écrit:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\} \quad \text{tel que} \\ -\Delta_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On désigne par $\sigma_0(-\Delta_p, m)$ l'ensemble des valeurs propres $\lambda \geqslant 0$.

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}^N$ et $n \in \mathbb{N}_0$, on notera

$$A_n^\beta = \{K \subset \mathcal{S}_\beta;\, K \text{ compact symétriqueet } \gamma(K) \geqslant n\}$$

où

$$\mathcal{S}_\beta = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega);\, \|u\|_{1,p,\beta} := \left(\int_\Omega e^{\beta . x} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p} = 1 \right\}$$

et où $\gamma(F)$ est le genre d'une partie $F \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ fermée et symétrique. Il est clair que $\|.\|_{1,p,\beta}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle et que $(W_0^{1,p}(\Omega), \|.\|_{1,p,\beta})$ est uniformément convexe. Rappelons que les nombres $\lambda_n > 0$ définis par

$$\frac{1}{\lambda_n} = \sup_{K \in A_n^0} \min_{u \in K} \int_\Omega m(x)\,|u|^p \tag{5.3}$$

appartiennent à $\sigma_0(-\Delta_p, m)$ et que $\lambda_n \to \infty$ (voir [A2]). On écrira parfois $\lambda_n = \lambda_n(-\Delta_p, m)$.

Dans cette section nous montrons que $\sigma_1(-\Delta_p, m)$ contient une suite de surfaces continues de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_0^+$ tendant vers $+\infty$ (théorèmes 5.1 et 5.4). Nous établissons aussi la partie non-résonance de l'alternative de Fredholm d'ordre un pour le p-laplacien (proposition 5.6).

THÉORÈME 5.1. – (i) *$\sigma_1(-\Delta_p, m)$ contient la réunion de la suite des graphes des fonctions $\Lambda_n\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$, $n = 1, 2, \dots$, où $\Lambda_n(\beta)$ est défini pour $\beta \in \mathbb{R}^N$ par*

$$\frac{1}{\Lambda_n(\beta)} := \sup_{K \in A_n^\beta} \min_{u \in K} \int_\Omega e^{\beta\cdot x} m(x)\,|u|^p\,dx\,. \tag{5.4}$$

(ii) *Pour chaque $\beta \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{n \to +\infty} \Lambda_n(\beta) = +\infty$.*

(iii) *Si $\Lambda_n(\beta) = \Lambda_{n+1}(\beta) = \dots = \Lambda_{n+k}(\beta)$ pour un certain k, alors $\gamma(K) \geq k+1$ où K désigne l'ensemble des fonctions propres d'ordre un dans S_β associées à $(\beta, \Lambda_n(\beta))$.*

On écrira parfois $\Lambda_n(\beta) = \Lambda_n(\beta, -\Delta_p, m)$.

REMARQUES 5.2. – 1) Pour $\beta = 0$, on a clairement $\Lambda_n(0, -\Delta_p, m) = \lambda_n(-\Delta_p, m)$.

2) Si $p = 2$, alors, pour chaque n, $\Lambda_n(\beta, -\Delta, m)$ défini ci-dessus par la méthode Ljusternik-Schnirelmann est égal à $\Gamma_n(\beta, -\Delta, m)$ défini en (2.7) par la méthode de Courant. En particulier donc $\Lambda_n(\beta, -\Delta, 1) = \mu_n(1) + |\beta|^2/4$ (cf. proposition 3.2). La démonstration de ce résultat est analogue à celle donnée dans le cas du spectre d'ordre zéro de l'égalité entre $\lambda_n(-\Delta, m)$ défini en (5.3) et $\mu_n(-\Delta, m)$ défini en (2.3) (voir [Az], [A,C]).

3) On peut également considérer des conditions aux limites de Neumann (cf. [C]).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1. – Comme dans la démonstration du théorème 2.1, on fixe β et on vérifie que (β, α, u) avec $\alpha \geq 0$ est solution de

(5.1) si et seulement si (α, u) est solution du problème d'ordre zéro

$$(5.5) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\alpha, u) \in \mathbb{R} \times W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\} \quad \text{tel que} \\ -\Delta_p^\beta u = \alpha e^{\beta \cdot x} m(x) |u|^{p-2} u & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où l'opérateur $-\Delta_p^\beta$ est défini par

$$-\Delta_p^\beta u := -div(e^{\beta \cdot x} |\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Pour étudier (5.5), on considère la restriction $\widetilde{F}_\beta$ de la fonctionnelle

$$F_\beta(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) |u|^p$$

à la variété S_β. Il est clair que F_β est une fonctionnelle de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, paire, bornée sur S_β, et que S_β est une sous-variété C^1 symétrique fermée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $0 \notin S_\beta$. La règle des multiplicateurs de Lagrange implique que si $u \in S_\beta$ et $r > 0$, alors u est point critique de $\widetilde{F}_\beta$ de valeur critique r si et seulement si $(1/r, u)$ est solution de (5.5). Comme $\alpha = 0$ n'est pas valeur propre de (5.5), étudier (5.5) revient donc à rechercher les points critiques de valeur critique > 0 de $\widetilde{F}_\beta$.

Appelons c_n le membre de droite de (5.4). On va montrer que

$$(5.6) \qquad \frac{a(\beta)}{\lambda_n(-\Delta_p, e^{\beta \cdot x} m)} \leqslant c_n \leqslant \frac{b(\beta)}{\lambda_n(-\Delta_p, e^{\beta \cdot x} m)}$$

où $a(\beta)$ et $b(\beta)$ sont des constantes > 0. Pour vérifier la première de ces inégalités, on part de $K \in A_n^0$ et on définit K' comme $\{u/\|u\|_{1,p,\beta};\ u \in K\}$. Clairement $K' \in A_n^\beta$. Par définition de c_n,

$$c_n \geqslant \min_{v \in K'} \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) |v|^p = \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) \frac{|u|^p}{\|u\|_{1,p,\beta}^p}$$

pour un certain $u \in K$. Par conséquent

$$c_n \geqslant a(\beta) \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x) |u|^p$$

où $a(\beta) = \inf\{1/\|u\|_{1,p,\beta}^p;\ \|u\|_{1,p,0} = 1\}$. La première inégalité de (5.6) en résulte en prenant l'infimum sur K puis le supremum sur A_n^0. L'autre inégalité de (5.6) se démontre de la même façon, en partant d'un $K \in A_n^\beta$.

Les inégalités (5.6) impliquent $c_n > 0$ et $c_n \to 0$. L'assertion (ii) du théorème 5.1 est donc démontrée. Les points (i) et (iii) résultent alors des corollaires 4.1 et 4.3 de [S], une fois démontrée la condition de Palais-Smale.

LEMME 5.3. – *La fonctionnelle* $\widetilde{F}_\beta$ *satisfait* $(PS)_c$ *sur* S_β *pour tout* $c \neq 0$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.3. – Soient $u_k \in S_\beta$ et $t_k \in \mathbb{R}$ deux suites telles que $\widetilde{F}_\beta(u_k) \to c$ et

$$F'_\beta(u_k) - t_k G'_\beta(u_k) \to 0 \text{ dans } W^{-1,p'}(\Omega), \tag{5.7}$$

où $G_\beta(w) = p^{-1}\|u\|^p_{1,p,\beta}$. On doit montrer que u_k admet une suite partielle convergente dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En prenant la valeur de (5.7) en u_k, on obtient $t_k \to c \neq 0$. Comme u_k reste borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour une suite partielle, $u_k \to u$ dans $L^p(\Omega)$, et donc $F'_\beta(u_k) \to F'_\beta(u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ et a fortiori dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. Il résulte alors de (5.7) que $G'_\beta(u_k)$ converge dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. Comme $G'_\beta : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est un homéomorphisme (en fait c'est une application de dualité), on déduit que u_k converge dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ceci termine la démonstration du lemme 5.3 et du théorème 5.1. ■

THÉORÈME 5.4. – Λ_n *est pour tout* n *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^N$.

La démonstration de ce théorème utilisera le lemme suivant:

LEMME 5.5. – *Pour tout* β *et* $\beta' \in \mathbb{R}^N$, *on a*

$$\frac{1}{\Lambda_n(\beta)} \leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta')}\|e^{(\beta'-\beta).x}\|_\infty + \|e^{\beta'.x} - e^{\beta.x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)}\|e^{-\beta.x}\|_\infty .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.5. – Soient $\beta, \beta' \in \mathbb{R}^N$. Pour $K \in A_n^\beta$, définissons

$$K' = \left\{ \frac{u}{\left(\int_\Omega e^{\beta'.x}|\nabla u|^p\right)^{1/p}} \; ; \; u \in K \right\}.$$

Il est clair que K' est un compact symétrique de $S_{\beta'}$. Comme l'application $f : K \to K'$ définie par

$$f(u) = \frac{u}{\left(\int_\Omega e^{\beta'.x}|\nabla u|^p\right)^{1/p}}$$

est continue impaire, on a $n \leqslant \gamma(K) \leqslant \gamma(K')$, de sorte que $K' \in A_n^{\beta'}$. Par suite (5.4) implique

$$\min_{v \in K'} \int_\Omega e^{\beta'.x} m(x)|v|^p \leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta')}.$$

Prenons $u_0 \in K$ tel que v_0 défini par

$$v_0 := \frac{u_0}{\left(\int e^{\beta'.x} |\nabla u_0|^p\right)^{1/p}} \in K'$$

réalise le minimum ci-dessus. On a donc

$$\int_\Omega e^{\beta'.x} m(x) |u_0|^p \leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta')} \int_\Omega e^{\beta'.x} |\nabla u_0|^p, \tag{5.8}$$

$$= \frac{1}{\Lambda_n(\beta')} \int_\Omega e^{(\beta'-\beta).x} e^{\beta.x} |\nabla u_0|^p$$

$$\leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta')} \|e^{(\beta'-\beta).x}\|_\infty$$

puisque $u_0 \in K$. Par ailleurs

$$\int_\Omega e^{\beta'.x} m(x) |u_0|^p = \int_\Omega e^{\beta.x} m(x) |u_0|^p + \int_\Omega (e^{\beta'.x} - e^{\beta.x})\, m(x) |u_0|^p$$

$$\geqslant \int_\Omega e^{\beta.x} m(x) |u_0|^p - \|e^{\beta'.x} - e^{\beta.x}\|_\infty \|m\|_\infty \int_\Omega |u_0|^p$$

$$\geqslant \int_\Omega e^{\beta.x} m(x) |u_0|^p - \|e^{\beta'.x} - e^{\beta.x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)} \int_\Omega |\nabla u_0|^p$$

$$= \int_\Omega e^{\beta.x} m(x) |u_0|^p - \|e^{\beta'.x} - e^{\beta.x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)} \int_\Omega e^{-\beta.x} e^{\beta.x} |\nabla u_0|^p$$

$$\geqslant \int_\Omega e^{\beta.x} m(x) |u_0|^p - \|e^{\beta'.x} - e^{\beta.x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)} \|e^{-\beta.x}\|_\infty.$$

Par conséquent, (5.8) implique

$$\min_{u \in K} \int_\Omega e^{\beta.x} m(x) |u|^p \leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta')} \|e^{(\beta'-\beta).x}\|_\infty + \|e^{\beta'.x} - e^{\beta.x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)} \|e^{-\beta.x}\|_\infty,$$

et comme K était arbitraire dans A_n^β, on déduit que

$$\frac{1}{\Lambda_n(\beta)} \leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta')} \|e^{(\beta'-\beta).x}\|_\infty + \|e^{\beta'.x} - e^{\beta.x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)} \|e^{-\beta.x}\|_\infty.$$

Ceci termine la démonstration du lemme 5.5.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.4. – Considérons une suite $\beta_k \to \beta$ dans $\mathbb{R}^N$, on a

$$\frac{1}{\Lambda_n(\beta)} \leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta_k)} \|e^{(\beta_k - \beta).x}\|_\infty + \|e^{\beta_k . x} - e^{\beta . x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)} \|e^{-\beta . x}\|_\infty .$$

Puisque $\overline{\Omega}$ est compact, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \|e^{\beta_k . x} - e^{\beta . x}\|_\infty = 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \|e^{(\beta_k - \beta).x}\|_\infty = 1$,

et on déduit $\limsup\limits_{k \to +\infty} \Lambda_n(\beta_k) \leqslant \Lambda_n(\beta)$. D'autre part, en échangeant les rôles de β et β_k, on a également la relation

$$\frac{1}{\Lambda_n(\beta_k)} \leqslant \frac{1}{\Lambda_n(\beta)} \|e^{(\beta - \beta_k).x}\|_\infty + \|e^{\beta . x} - e^{\beta_k . x}\|_\infty \frac{\|m\|_\infty}{\lambda_1(\Delta_p, 1)} \|e^{-\beta_k . x}\|_\infty ,$$

et par suite $\Lambda_n(\beta) \leqslant \liminf\limits_{k \to +\infty} \Lambda_n(\beta_k)$, ce qui termine la démonstration. ■

PROPOSITION 5.6. – *Si* $(\beta, \alpha) \notin \sigma_1(-\Delta_p, m)$, *alors le problème*

$$(5.9) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \alpha m |u|^{p-2} u + \beta |\nabla u|^{p-2} \nabla u + h & \textit{dans} \quad \Omega , \\ \quad u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega , \end{cases}$$

admet une solution pour tout $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.6. – Nous allons appliquer un argument standard de degré topologique. Soit $(\beta, \alpha) \notin \sigma_1(-\Delta_p, m)$. Le problème (5.9) s'écrit sous la forme

$$(5.10) \qquad \begin{cases} -\Delta_p^\beta u = \alpha m(x)\, e^{\beta . x} \, |u|^{p-2} u + e^{\beta . x} h & \text{dans} \quad \Omega , \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega . \end{cases}$$

En utilisant le fait que $-\Delta_p^\beta$ est un homéomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ sur $W^{-1,p'}(\Omega)$ et que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec injection compacte, on vérifie que l'opérateur

$$(t, u) \in [0,1] \times W_0^{1,p}(\Omega) \to T_t(u) = (-\Delta_p^\beta)^{-1} (\alpha m(x)\, e^{\beta . x} |u|^{p-2} u + t e^{\beta . x} h) \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

est compact. Résoudre (5.1) revient donc à montrer que T_1 admet un point fixe. Par la théorie du degré, il suffit de montrer que

$$(5.11) \qquad \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ \exists t \in [0, 1] \ \text{avec} \ (I - T_t)\, u = 0\} \ \text{est borné} .$$

En effet, le degré de $I - T_1$ sur une grande boule vaudra alors celui de $I - T_0$, qui est non nul par le théorème de Borsuk. Pour montrer (5.11), on suppose par l'absurde l'existence de suites $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t_n \in [0, 1]$ telles que $T_{t_n}(u_n) = u_n$ et $\|u_n\|_{1,p} \to +\infty$. Posons $v_n = u_n / \|u_n\|_{1,p}$. Pour une suite partielle, $v_n \rightharpoonup v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$. De plus, v_n satisfait

$$v_n = (-\Delta_p^{\beta})^{-1}\left(\alpha m(x)\, e^{\beta \cdot x}\, |v_n|^{p-2} v_n + \frac{t_n e^{\beta \cdot x} h}{\|u_n\|_{1,p}^{p-1}}\right).$$

On en déduit que $v_n \to v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, que $\|v\|_{1,p} = 1$ et que finalement

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \alpha m(x)\, |v|^{p-2} v + \beta.\ |\nabla v|^{p-2} \nabla v & \text{dans } \Omega\,, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Par conséquent $(\beta, \alpha) \in \sigma_1(-\Delta_p, m)$, une contradiction. ■

REMARQUES 5.7. – 1) La proposition 5.6 concerne la partie non-résonance de l'alternative de Fredholm (c-à-d l'existence d'une solution pour tout h). La partie résonance (c-à-d l'existence d'une solution pour certains h lorsque (β, α) appartient au spectre, reste ouverte. Signalons ici un résultat partiel dans cette direction dans le cas du spectre d'ordre zéro: $-\Delta_p u = \lambda_1(-\Delta_p, 1)\, |u|^{p-2} u + h$ dans Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$ n'a pas de solution si h est non identiquement nulle et ne change pas de signe (cf. [F,G,T,T]).

2) On peut considérer des opérateurs plus généraux que le p-laplacien, par exemple le A_p-laplacien (cf. [T]):

$$A_p u := -\operatorname{div}\left(((A(x)\, \nabla u \cdot \nabla u)^{(p-2)/2} A(x)\, \nabla u\right)$$

où $A(x)$ est une matrice symétrique uniformément elliptique comme dans la section 2. Le spectre d'ordre un du A_p-laplacien avec poids $m \in M$ est défini comme l'ensemble $\sigma_1(A_p, m)$ des $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tels que le problème

$$\begin{cases} A_p u = \alpha m(x)\, |u|^{p-2} u + \beta.\ (A(x)\, \nabla u \cdot \nabla u)^{(p-2)/2} A(x)\, \nabla u & \text{dans } \Omega\,, \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution non triviale. On vérifie comme précédemment que $(\beta, \alpha) \in \sigma_1(A_p, m)$ si et seulement si α est valeur propre du problème d'ordre zéro

$$\begin{cases} A_p^{\beta} u = \alpha e^{\beta \cdot x} m(x)\, |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega\,, \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

où $A_p^{\beta} u := -\operatorname{div}\left(e^{\beta \cdot x} (A(x)\, \nabla u \cdot \nabla u)^{(p-2)/2} A(x)\, \nabla u\right)$. L'opérateur A_p^{β} est encore un A_p-laplacien (de matrice $e^{2\beta \cdot x/p} A(x)$). Les conclusions des théorèmes 5.1 et 5.4 et de la proposition 5.6 peuvent facilement être adaptées à l'étude de $\sigma_1(A_p, m)$.

6. – Quelques propriétés du spectre d'ordre un du p-laplacien.

Plusieurs travaux ont été effectués sur le début du spectre d'ordre zéro $\sigma_0(-\Delta_p, m)$. On sait entre autres, suite aux résultats de [A1], [A.T], [L], que $\lambda_1(m)$ est simple, que $\lambda_1(m) < \lambda_2(m)$ et que $]\lambda_1(m), \lambda_2(m)[\cap \sigma_0(-\Delta_p, m) = \phi$. La description précise de $\sigma_0(-\Delta_p, m)$ au-delà de $\lambda_2(m)$ reste un problème ouvert dans le cas $N > 1$ et $p \neq 2$. Les propriétés précédentes de $\lambda_1(m)$ et $\lambda_2(m)$ s'étendent aux deux premières surfaces propres de $\sigma_1(-\Delta_p, m)$.

THÉORÈME 6.1. – (i) $\Lambda_1(.)$ *est la première surface propre de* $\sigma_1(-\Delta_p, m)$ *au sens suivant*:

$$\sigma_1(-\Delta_p, m) \subset \{(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R};\ \Lambda_1(\beta) \leqslant \alpha\}.$$

(ii) *Si* $\alpha = \Lambda_1(\beta)$, *alors* (β, α) *est simple et toute fonction propre associée garde un signe constant.*

(iii) *Si* $(\beta, \alpha) \in \sigma_1(-\Delta_p, m)$ *avec* $\alpha \neq \Lambda_1(\beta)$, *alors toute fonction propre associée à* (β, α) *change de signe.*

(iv) $\Lambda_2(.)$ *est la deuxième surface propre de* $\sigma_1(-\Delta_p, m)$ *au sens suivant*:

$$\begin{cases} \Lambda_1(\beta) < \Lambda_2(\beta) & \textit{pour tout } \beta \in \mathbb{R}^N, \\ \textit{si } \Lambda_1(\beta) < \alpha < \Lambda_2(\beta) & \textit{alors } (\beta, \alpha) \notin \sigma_1(-\Delta_p, m). \end{cases}$$

La démonstration du théorème 6.1 consiste comme précédemment à se ramener au problème d'ordre zéro (5.5), ce qui conduit à la relation

$$\Lambda_n(\beta, -\Delta_p, m) = \lambda_n(-\Delta_p^\beta, e^{\beta \cdot x} m).$$

Les résultats rappelés ci-dessus à propos de $\sigma_0(-\Delta_p, m)$ s'étendent aisément au cas de l'opérateur $-\Delta_p^\beta$, et le théorème 6.1 en résulte. On notera que $-\Delta_p^\beta$ est un A_p-laplacien et certains résultats de [T] peuvent donc aussi être utilisés ici pour obtenir (i), (ii), (iii).

On peut aussi étendre à $\sigma_1(-\Delta_p, m)$ les résultats de [D,G] et [A,T] relatifs à la dépendance monotone stricte des valeurs propres par rapport au poids.

PROPOSITION 6.2. – *Soient* $m_1, m_2 \in M$ *avec* $m_1 \lneqq m_2$. *Alors*

(i) $\Lambda_n(\beta, -\Delta, m_1) > \Lambda_n(\beta, -\Delta, m_2)$ *pour tout* n.

(ii) $\Lambda_1(\beta, -\Delta_p, m_1) > \Lambda_1(\beta, -\Delta_p, m_2)$ *pour tout* $1 < p < \infty$.

(iii) *Si de plus* $m_1(x) < m_2(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$, *alors* $\Lambda_2(\beta, -\Delta_p, m_1) > \Lambda_2(\beta, -\Delta_p, m_2)$.

7. – Non-résonance en dessous de la première surface propre.

Dans cette section et la suivante, nous allons étudier l'existence de solution au problème

$$(7.1) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u, \nabla u) + h & \text{dans } \Omega , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

sous des hypothèses de non-résonance par rapport au spectre $\sigma_1(-\Delta_p, 1)$. Nous commencerons par le cas où la non-linéarité f est asymptotiquement en-dessous de la première surface propre de $-\Delta_p$ (pour le poids $m(x) \equiv 1$).

Soit donc (β, α) avec $\alpha < \Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1)$. On suppose que la fonction de Caratheodory $f(x, s, \xi)$ vérifie

$$(7.2) \begin{cases} \forall \delta > 0 \quad \exists a_\delta \in L^{p'} \text{ tel que} \\ sf(x, s, \xi) \leqslant \alpha |s|^p + \beta . \, |\xi|^{p-2}\xi s + \delta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + a_\delta(x))|s| \\ \text{p.p. } x \in \Omega \text{ et } \forall (\xi, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} . \end{cases}$$

On suppose en plus la condition suivante qui concerne le comportement de f en x, ξ pour s borné:

$$(7.3) \qquad \begin{cases} \forall R > 0 \quad \exists \phi_R \in L^1(\Omega) \text{ et } a_R \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \max\limits_{|s| \leqslant R} |f(x, s, \xi)| \leqslant a_R |\xi|^p + \phi_R(x) \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ et } \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

THÉORÈME 7.7. – *On suppose* (7.2), (7.3), *avec* $\alpha < \Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1)$. *Alors pour tout* $h \in W^{-1, p'}(\Omega)$, *il existe* $u \in W_0^{1, p}(\Omega)$ *tel que*

(i) $f(x, u, \nabla u)$ *et* $f(x, u, \nabla u)\, u \in L^1(\Omega)$,

(ii) $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, \phi + \langle h, \phi \rangle$ *pour tout* $\phi \in W_0^{1, p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et pour* $\phi = u$.

REMARQUES 7.2. – 1) Bien qu'on se trouve en dessous de la première surface propre $\Lambda_1(\cdot, -\Delta_p, 1)$, il peut arriver que l'opérateur $Au := -\Delta_p u - f(x, u, \nabla u)$ ne soit pas coercif. En fait cela se produit même dans le cas linéaire. Prenons en effet $p = 2$ et $f(x, s, \xi) = \alpha s + \beta . \xi$, avec $\alpha < \Lambda_1(\beta, -\Delta, 1)$ et $\alpha > \lambda_1$. Posons $u_n = n\phi_1$, où ϕ_1 est la fonction propre positive de norme 1 associée à λ_1, de sorte que $\|u_n\|_{1, 2} = n$. Un calcul simple fournit

$$\frac{\langle A(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|_{1, 2}} = n\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) \to -\infty \quad \text{lorsque } n \to \infty .$$

2) Notons que la non-linéarité f vérifie seulement une condition de croissance d'un seul côté par rapport à s (cf. (7.2)) et une condition de croissance de degré p par rapport à ξ (cf. (7.3)). La partie principale de la démonstration consistera à introduire une troncature f_n de f telle que f_n vérifie des conditions de croissance usuelle (des deux côtés par rapport à s et de degré $p-1$ par rapport à ξ).

3) Les hypothèses (7.2) et (7.3) sont vérifiées par exemple si

$$f(x, s, \xi) = \alpha |s|^{p-2} s + \beta |\xi|^{p-2} \xi + g(x, s, \xi) + l(x, s, \xi)$$

où g et l vérifient:

$$\begin{aligned} g(x, s, \xi)\, s &\leqslant 0 \\ |g(x, s, \xi)| &\leqslant b(|s|)(|x|^p + c(x)), \\ sl(x, s, \xi) &\leqslant C(|s|^{q-1} + |x|^{q-1} + d(x))|s|, \end{aligned}$$

avec b continu, $c(x) \in L^1(\Omega)$, $q < p$, $d(x) \in L^{p'}(\Omega)$ et C une constante.

4) Si on prend $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $l = 0$ dans l'exemple précédent, on retrouve la situation considérée dans [B,B,M] (voir aussi [DV]). Notons que dans cette situation $sf(x, s, \xi) \leqslant 0$, et par conséquent l'opérateur $-\Delta_p u - f(x, u, \nabla u)$ est coercif.

5) Si f ne dépend pas de ∇u et si $\beta = 0$, on retrouve les conditions usuelles de non résonance à gauche de la première valeur propre (d'ordre zéro).

La démonstration du théorème 7.1 se fait en plusieurs étapes. La première concerne le cas où f satisfait des conditions de croissance en $|s|^{p-1}$ et $|\xi|^{p-1}$ (cf. (7.4) ci-dessous). Il sera possible dans ce cas d'utiliser directement la théorie des opérateurs pseudo-monotones coercifs.

LEMME 7.3. – *On suppose* (7.2) *avec* $\alpha < \Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1)$. *On suppose en plus qu'il existe* $a_0 \in \mathbb{R}$ *et* $b(x) \in L^{p'}(\Omega)$ *tels que*

$$|f(x,s,\xi)| \leqslant a_0(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) + b(x) \quad p.p. \quad x \in \Omega, \quad \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{7.4}$$

Alors, pour tout $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$, *il existe* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *solution au sens faible usuel du problème* (7.1).

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.3. – Définissons $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$g(x, s, \xi) = e^{\beta \cdot x}(f(x, s, \xi) - \beta \cdot |\xi|^{p-2} \xi).$$

Cette fonction vérifie encore une condition de croissance du type (7.4). De plus, le probléme (7.1) est équivalent au problème

$$
(7.5) \qquad \begin{cases} -\Delta_p^\beta u = g(x,\, u,\, \nabla u) + \tilde{h} & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}
$$

où $\tilde{h} = e^{\beta.x} h$. L'opérateur $A(u) = -\Delta_p^\beta u - g(x,\, u,\, \nabla u)$ intervenant dans ce dernier problème est pseudo-monotone de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. Montrons que A est coercif. D'après (5.4), on a

$$
\Lambda_1(\beta,\, -\Delta_p,\, 1) \int_\Omega e^{\beta.x} |u|^p \leq \int_\Omega e^{\beta.x} |\nabla u|^p = \|u\|_{1,p,\beta}^p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.
$$

En utilisant (7.2) et le fait que $0 < m < e^{\beta.x} < M$, on obtient facilement

$$
\langle A(u), u\rangle \geq \left(1 - \frac{\alpha}{\Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1)} - \frac{M\delta}{m(\Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1))^{1/p}}\right) \|u\|_{1,p,\beta}^p - c\|u\|_{1,p,\beta}
$$

où $c = c(m,\, M,\, \beta,\, \delta) > 0$. En choisissant alors δ assez petit, on déduit

$$
\frac{\langle A(u),\, u\rangle}{\|u\|_{1,p,\beta}} \to +\infty \qquad \text{lorsque } \|u\|_{1,p,\beta} \to +\infty\,,
$$

d'où la coercivité de A. Il existe donc $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $A(u) = \tilde{h}$, et u est une solution du problème (7.1). ■

La suite de la démonstration du théorème 7.1 concerne le cas général où (7.4) n'est plus nécessairement satisfait. Comme indiqué précédement, on va introduire une troncature f_n de f (inspirée de [B,B,M]). Ces fonctions f_n vérifieront encore (7.2), (7.3), et cela uniformément par rapport à x.

Pour $n = 1,\, 2,\, \ldots$, posons

$$
f_n(x,\, s,\, \xi) = \frac{f(x,\, s,\, \xi) - \beta.\, |\xi|^{p-2}\xi}{1 + (1/n)\, |f(x,\, s,\, \xi) - \beta.\, |\xi|^{p-2}\xi|} + \beta.\, |\xi|^{p-2}\xi
$$

et

$$
g_n(x,\, s,\, \xi) = e^{\beta.x}(f_n(x,\, s,\, \xi) - \beta|\xi|^{p-1}\xi)\,.
$$

On a

$$
(7.6) \qquad |f_n(x,\, s,\, \xi)| \leq n + |\beta|\, |\xi|^{p-1} \qquad \text{et} \qquad |g_n(x,\, s,\, \xi)| \leq Mn
$$

p.p. $x \in \Omega$ et $\forall (\xi,\, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. On vérifie facilement que la condition (7.3) entraîne

$$
(7.7) \qquad \begin{cases} \max\limits_{|s| \leq R} |f_n(x,\, s,\, \xi)| \leq b_R\, |\xi|^p + \phi_R(x) \\ \max\limits_{|s| \leq R} |g_n(x,\, s,\, \xi)| \leq b_R\, e^{\beta.x}\, |\xi|^p + c_R(x) \end{cases}
$$

où $b_R > 0$, et $c_R(x) \in L^1(\Omega)$. On vérifie aussi aisément que la condition (7.2) entraîne que

$$\text{(7.8)} \qquad \begin{cases} \forall \delta > 0 \quad \exists a_\delta \in L^{p'} \text{ tel que} \\ sf_n(x, s, \xi) \leqslant \alpha |s|^p + \beta . \, |\xi|^{p-2} \xi s + \delta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + a_\delta(x))|s| \\ \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall (\xi, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} . \end{cases}$$

On déduit alors de (7.6), (7.8) et du lemme 7.3 qu'il existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution au sens faible usuel du problème

$$\text{(7.9)} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u_n = f_n(x, u_n, \nabla u_n) + h & \text{dans } \Omega , \\ \quad u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

LEMME 7.4. – *Il existe $c_0 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\|_{1,p} \leqslant c_0$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.4. – Le problème (7.9) s'écrit

$$\text{(7.10)} \qquad \begin{cases} -\Delta_p^\beta u_n = g_n(x, u_n, \nabla u_n) + \tilde{h} & \text{dans } \Omega , \\ \quad u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega , \end{cases}$$

où $\tilde{h} = e^{\beta \cdot x} h$. En multipliant (7.10) par u_n et en utilisant (7.8), on obtient, par un calcul analogue à celui conduisant à la coercité dans la démonstration du lemme 7.3,

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1)} - \frac{M\delta}{m(\Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1)))^{1/p}}\right) \|u_n\|_{1,p,\beta}^p \leqslant \left(c + \frac{\|\tilde{h}\|_{-1,p'}}{m^{1/p}}\right) \|u_n\|_{1,p,\beta}.$$

En choisissant alors δ assez petit, on déduit que (u_n) reste borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Pour une suite partielle, on peut donc supposer que

$$\text{(7.11)} \qquad \begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n \to u & \text{dans } L^p(\Omega), \\ u_n(x) \to u(x) & \text{p.p. } x \in \Omega . \end{cases}$$

LEMME 7.5. – *$u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.5. – Nous allons démontrer que $u_n^+ \to u^+$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (la démonstration de ce que $u_n^- \to u^-$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est analogue). D'après (7.11), on a, pour une suite partielle, $u_n^+ \rightharpoonup u^+$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Puisque $-\Delta_p^\beta$: $W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est un opérateur de type (S^+), il suffit de montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle -\Delta_p^\beta u_n^+,\, u_n^+ - u^+\rangle \leqslant 0\,. \tag{7.12}$$

Pour abréger, on notera $a(\xi) := e^{\beta\cdot x}\,|\xi|^{p-2}\xi$. Pour tout $k>0$, on pose

$$T_k u(x) = \begin{cases} k & si\ u(x) > k\,, \\ u(x) & si\ |u(x)| \leqslant k\,, \\ -k & si\ u(x) < -k\,. \end{cases}$$

Il est clair que $T_k u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Écrivons

$$\langle -\Delta_p^\beta u_n^+,\, u_n^+ - u^+\rangle = I_n^1(k) + I_n^2(k) + I_n^3(k) \tag{7.13}$$

où $I_n^1(k) = \langle -\Delta_p^\beta u_n^+, (u_n^+ - T_k u^+)^+\rangle$, $I_n^2(k) = -\langle -\Delta_p^\beta u_n^+, (u_n^+ - T_k u^+)^-\rangle$ et $I_n^3(k) = \langle -\Delta_p^\beta u_n^+,\, T_k u^+ - u^+\rangle$. On va successivement estimer $I_n^1(k)$, $I_n^2(k)$ et $I_n^3(k)$. Posons $v_n := u_n^+ - T_k u^+$. D'après (7.11), pour une suite partielle, $v_n^+ \rightharpoonup v^+ := (u^+ - T_k u^+)^+$.

1) En multipliant (7.10) par v_n^+, on obtient

$$\int_\Omega a(\nabla u_n)\,\nabla v_n^+ = \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)\, v_n^+ + \langle \tilde h, v_n^+\rangle.$$

Notons que si $v_n(x) > 0$, alors $u_n^+(x) = u_n(x)$, et donc (7.8) entraîne

$$g_n(x, u_n, \nabla u_n)\, v_n^+ \leqslant M\big(\alpha|u_n(x)|^{p-1} + \delta(|u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1} + a_\delta(x))\big)\, v_n^+$$

et

$$\int_\Omega a(\nabla u_n)\,\nabla v_n^+ = \int_\Omega a(\nabla u_n^+)\,\nabla v_n^+\,.$$

En utilisant alors le lemme 7.4, on déduit

$$I_n^1(k) \leqslant \langle \tilde h, v_n^+\rangle + M\alpha\int_\Omega |u_n(x)|^{p-1} v_n^+(x) +$$

$$M\delta c_0^{1/p'}\left(1 + \frac{1}{\lambda_1^{1/p'}}\right)\|v_n^+\|_p + M\delta\int_\Omega a_\delta(x)\, v_n^+(x)$$

et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} I_n^1(k) \leqslant I^1(k) \tag{7.14}$$

où

$$I^1(k) := \langle \tilde{h}, v^+ \rangle + M\alpha \int_\Omega |u(x)|^{p-1} v^+(x) +$$

$$M\delta c_0^{1/p'} \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^{1/p'}}\right) \|v^+\|_p + M\delta \int_\Omega a_\delta(x)\, v^+(x)\,.$$

Observons dès maintenant que puisque $v^+ = (u^+ - T_k u^+)^+ \to 0$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ quand $k \to +\infty$, nous avons $I^1(k) \to 0$ quand $k \to +\infty$.

2) Posons $w_n = \psi_k(v_n^-)$ avec $\psi_k(s) = se^{b_k^2 s^2/4}$ où b_k est la constante intervenant dans (7.7). On montre facilement que

$$\psi_k'(s) - b_k \psi_k(s) \geqslant 1/2\,. \tag{7.15}$$

Puisque $\psi_k(0) = 0$ et $0 \leqslant v_n^- \leqslant k$, on a $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En multipliant (7.10) par w_n, on obtient

$$\int_\Omega a(\nabla u_n)\, \nabla v_n^-\, \psi_k'(v_n^-) = \int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)\, \psi_k(v_n^-) + \langle \tilde{h}, \psi_k(v_n^-) \rangle\,. \tag{7.16}$$

Notons que $\psi_k(v_n^-) \geqslant 0$, et que si $u_n(x) \leqslant 0$, alors

$$-g_n(x, u_n, \nabla u_n) \leqslant M(\alpha |u_n(x)|^{p-1} + \delta(|u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1} + a_\delta(x)))\,.$$

Posons $E_n = \{x \in \Omega : 0 \leqslant u_n(x) \leqslant T_k u^+(x)\}$ et $F_n = \{x \in \Omega : u_n(x) \leqslant 0\}$. En utilisant (7.7), on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)\, \psi_k(v_n^-) &\leqslant -\int_{E_n} g_n(x, u_n, \nabla u_n)\, \psi_k(v_n^-) + c_n \\ &\leqslant b_k \int_{E_n} e^{\beta . x} |\nabla u_n|^p \psi_k(v_n^-) + \int_{E_n} c_k(x) \psi_k(v_n^-) + c_n \end{aligned} \tag{7.17}$$

où

$$0 \leqslant c_n \leqslant M\alpha \int_{F_n} |u_n|^{p-1} \psi_k(v_n^-) +$$

$$M\delta c_0^{1/p'} \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^{1/p'}}\right) \left(\int_{F_n} \psi_k(v_n^-)^p\right)^{1/p} + M\delta \int_{F_n} a_\delta(x)\, \psi_k(v_n^-)\,.$$

Comme $v^- = 0$, on montre facilement que $\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$. Notons que si $u_n(x) \leqslant 0$, alors $v_n^-(x) = T_k u^+(x)$, et donc

$$\int_\Omega (a(\nabla u_n) - a(\nabla u_n^+))\, \nabla v_n^- \, \psi'_k(v_n^-) = \int_\Omega (a(\nabla u_n) - a(\nabla u_n^+))\, \nabla T_k u^+ \, \psi'_k(T_k u^+) .$$

En utilisant alors (7.16) et (7.17) dans la relation précédente, il vient

$$\begin{aligned}
(7.18) \qquad -\int_\Omega (a(\nabla u_n^+) - a(\nabla T_k u^+))\, \nabla v_n^- \, \psi'_k(v_n^-) = \\
& -\int_\Omega a(\nabla u_n)\, \nabla v_n^- \, \psi'_k(v_n^-) \\
& +\int_\Omega a(\nabla T_k u^+)\, \nabla v_n^- \, \psi'_k(v_n^-) \\
& +\int_\Omega (a(\nabla u_n) - a(\nabla u_n^+))\, \nabla T_k u^+ \, \psi'_k(T_k u^+) \\
& = -\int_\Omega g_n(x, u_n, \nabla u_n)\, \psi_k(v_n^-) - \langle \tilde{h}, \psi_k(v_n^-)\rangle \\
& +\int_\Omega a(\nabla T_k u^+)\, \nabla v_n^- \, \psi'_k(v_n^-) \\
& +\int_\Omega (a(\nabla u_n) - a(\nabla u_n^+))\, \nabla T_k u^+ \, \psi'_k(T_k u^+) \\
& \leqslant b_k \int_{E_n} e^{\beta \cdot x} |\nabla u_n|^p \psi_k(v_n^-) + \int_{E_n} c_k(x)\, \psi_k(v_n^-) + c_n \\
& -\langle \tilde{h}, \psi_k(v_n^-)\rangle + \int_\Omega a(\nabla T_k u^+)\, \nabla v_n^- \, \psi'_k(v_n^-) \\
& +\int_\Omega (a(\nabla u_n) - a(\nabla u_n^+))\, \nabla T_k u^+ \, \psi'_k(T_k u^+) .
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en remarquant que $(\nabla v_n)\, \psi_k(v_n^-) = -(\nabla v_n^-)\, \psi_k(v_n^-)$, nous avons

$$\begin{aligned}
(7.19) \quad \int_{E_n} e^{\beta . x} |\nabla u_n|^p \psi_k(v_n^-) = \int_\Omega e^{\beta . x} |\nabla u_n^+|^p \psi_k(v_n^-) \\
& = -\int_\Omega (a(\nabla u_n^+) - a(\nabla T_k u^+))\, \nabla v_n^- \psi_k(v_n^-) + \\
& + \int_\Omega a(\nabla u_n^+)\, \nabla T_k u^+ \psi_k(v_n^-) + \int_\Omega a(\nabla T_k u^+)\, \nabla v_n \psi_k(v_n^-) .
\end{aligned}$$

En utilisant finalement (7.15), (7.18), (7.19) et le fait que $(a(\nabla u_n^+) - a(\nabla T_k u^+))\nabla v_n^- \leqslant 0$, il vient

$$\text{(7.20)} \quad -1/2\int_\Omega (a(\nabla u_n^+) - a(\nabla T_k u^+))\nabla v_n^- \leqslant b_k \int_\Omega a(\nabla u_n^+)\nabla T_k u^+ \psi_k(v_n^-)$$

$$+ b_k \int_\Omega a(\nabla T_k u^+)\nabla v_n \psi_k(v_n^-)$$

$$+ \int_\Omega c_k(x)\,\psi_k(v_n^-) + c_n - \langle \tilde{h}, \psi_k(v_n^-)\rangle$$

$$+ \int_\Omega (a(\nabla u_n) - a(\nabla u_n^+))\nabla T_k u^+ \psi_k'(T_k u^+)$$

$$+ \int_\Omega a(\nabla T_k u^+)\nabla v_n^- \psi_k'(v_n^-)\,.$$

On va maintenant passer à la limite pour $n \to \infty$. Les suites $(a(\nabla u_n))$ et $(a(\nabla u_n^+))$ sont bornées dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et donc, pour une suite partielle, $a(\nabla u_n) \rightharpoonup \chi$ et $a(\nabla u_n^+) \rightharpoonup \eta$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. Rappelons que $v^- = (u^+ - T_k u^+)^- = 0$ et que $\psi_k(0) = 0$. Par passage à la limite dans (7.20), on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} I_n^2(k) = \limsup_{n\to+\infty} -\int_\Omega (a(\nabla u_n^+) - a(\nabla T_k u^+))\nabla v_n^-$$

$$\leqslant 2\int_\Omega (\chi(x) - \eta(x))\nabla T_k u^+(x)\,\psi_k'(T_k u^+)\,.$$

D'autre part, il est clair que $(a(\nabla u_n) - a(\nabla u_n^+))(T_k(u_n))^+ = 0$, et par conséquent $(\chi(x) - \eta(x))\,T_k u^+(x) = 0$. Par suite $(\chi(x) - \eta(x))\nabla T_k u^+(x) = 0$, d'où finalement

$$\text{(7.21)} \qquad \limsup_{n\to+\infty} I_n^2(K) \leqslant 0\,.$$

3) Il est clair que

$$\text{(7.22)} \qquad \limsup_{n\to+\infty} I_n^3(K) = \int_\Omega \chi(x)\,\nabla(T_k u^+ - u^+)\,.$$

Revenant finalement à (7.13) et utilisant (7.14), (7.21) et (7.22), nous obtenons

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle -\Delta_p^\beta u_n^+, u_n^+ - u^+\rangle \leqslant I_k + \int_\Omega \chi(x)\,\nabla(T_k u^+ - u^+)$$

pour tout $k > 0$. Comme $T_k u \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $I_k \to 0$ quand $k \to +\infty$, il en résulte que $\limsup_{n\to+\infty} \langle -\Delta_p^\beta u_n^+, u_n^+ - u^+ \rangle \leqslant 0$, d'où la relation (7.12) et le lemme 7.5. ■

LEMME 7.6. – *La suite des fonctions $f_n(x, u_n, \nabla u_n)$ est equi-absolument intégrable dans $L^1(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.6. – Nous allons d'abord établir les estimations:

$$\int_\Omega (f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n)^+ \leqslant c_2, \tag{7.23}$$

$$\int_\Omega (f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n)^- \leqslant c_3, \tag{7.24}$$

où c_2 et c_3 sont deux constantes indépendantes de n. Pour cela on déduit d'une part de l'inégalité (7.8) et du lemme 7.4 que

$$\int_\Omega (f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n)^+ \leqslant$$

$$\left| \int_\Omega (\alpha |u_n|^p + (\beta .\, |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n)\, u_n + \delta(|u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1} + a_\delta(x))|u_n| \right|$$

$$\leqslant c_2,$$

d'où (7.23). D'autre part, en multipliant (7.9) par u_n, il suit du lemme 7.4 que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n \right| &= \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^p - \langle h, u_n \rangle \right| \\ &\leqslant c_0^p + c_0 \|h\|_{-1, p'} \\ &= c_4. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Par conséquent les inégalités (7.23) et (7.25) impliquent

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n)^- &= -\left(\int_\Omega f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n \right) + \int_\Omega (f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n)^+ \\ &\leqslant c_4 + c_2 = c_3, \end{aligned}$$

d'où (7.24).

Entamons maintenant la démonstration du lemme 7.6 proprement dite.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit E une partie mesurable de Ω. Pour tout $R > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_{n,R} = \{x \in E;\ |u_n(x)| < R; \text{p.p}\},$$
$$B_{n,R} = \{x \in E;\ |u_n(x)| \geqslant R; \text{ et } u_n(x)\, f_n(x, u, \nabla u_n(x)) \geqslant 0 \text{ p.p.}\},$$
$$C_{n,R}\{x \in E;\ |u_n(x)| \geqslant R \text{ et } u_n(x)\, f_n(x, u_n, \nabla u_n(x)) < 0 \text{ p.p.}\},$$

de sorte que $A_{n,R} \cup B_{n,R} \cup C_{n,R} = E$. En utilisant le lemme 7.4 et (7.7), on déduit

$$\int_{A_{n,R}} |f_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx \leqslant \int_E (\phi_R(x) + b_R |\nabla u_n|^p).$$

Comme $\phi_R \in L^1(\Omega)$ et $|\nabla u_n|^p \to |\nabla u|^p$ dans $L^1(\Omega)$, la famille $(\phi_R + b_R |\nabla u_n|^p)$ est equi-absolument intégrale et donc il existe $\eta > 0$ tel que $\int_E (\phi_R(x) + b_R |\nabla u_n|^p) \leqslant \varepsilon/2$ si $\operatorname{mes}(E) \leqslant \eta$. Par ailleurs l'inégalité (7.23) implique

$$\begin{aligned}\int_{B_{n,R}} |f_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx &\leqslant \frac{1}{R} \int_{B_{n,R}} f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n\, dx \\ &= \frac{1}{R} \int_\Omega (f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n)^+\, dx \\ &\leqslant \frac{c_2}{R}.\end{aligned}$$

Enfin, de l'estimation (7.24) résulte que

$$\begin{aligned}\int_{C_{n,R}} |f_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx &\leqslant -\frac{1}{R} \int_{C_{n,R}} f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n\, dx \\ &= \frac{1}{R} \int_\Omega (f_n(x, u_n, \nabla u_n)\, u_n)^-\, dx \\ &\leqslant \frac{c_3}{R}.\end{aligned}$$

Faisant la somme des trois inégalités précédentes, on obtient

$$\int_E |f_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx \leqslant \int_E (\phi_R(x) + b_R |\nabla u_n|^p) + \frac{c_2 + c_3}{R}.$$

Choisissons $R > (2(c_2 + c_3))/\varepsilon$. Il résulte alors des inégalités précédentes et du choix de R que pour toute partie mesurable $E \subset \Omega$ vérifiant $mes(E) < \eta$, on a

$$\int_E |f_n(x, u_n, \nabla u_n)|\, dx \leqslant \varepsilon \qquad \text{pourtout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui démontre le lemme 7.6. ■

Le dernier lemme concerne la convergence de $f(x, u_n, \nabla u_n)$.

LEMME 7.7. – (i) $f_n(x, u_n, \nabla u_n) \to f(x, u, \nabla u)$ *dans* $L^1(\Omega)$,
(ii) $f(x, u, \nabla u)\, u \in L^1(\Omega)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.7. – (i) D'après le lemme 7.5, $u_n(x) \to u(x)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc, pour une suite partielle, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ p.p. $x \in \Omega$ et

$$(7.26) \qquad f_n(x, u_n, \nabla u_n) \to f(x, u, \nabla u) \qquad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Le lemme 7.6 implique alors que $f_n(x, u_n, \nabla u_n) \to (f(x, u, \nabla u)$ dans $L^1(\Omega)$.

(ii) Des estimations (7.23) et (7.24), on obtient, en utilisant le lemme de Fatou, $(f(x, u, \nabla u)\, u)^+$ et $(f(x, u, \nabla u)\, u)^- \in L^1(\Omega)$, d'où $(f(x, u, \nabla u)\, u \in L^1(\Omega)$. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.1. – Nous avons vu qu'une suite partielle de la suite u_n des solutions de (7.9) converge vers une fonction u. Montrons que u est une solution du problème (7.1). D'après le lemme 7.7, l'assertion (i) du théorème est vérifiée. Comme

$$-\Delta_p u_n = f_n(x, u_n, \nabla u_n) + h \qquad \text{dans} \qquad W^{-1,p'}(\Omega),$$

on déduit des lemmes 7.7 et 7.5 que

$$(7.27) \quad \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\, \phi + \langle h, \phi \rangle \;\; \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Il reste à voir que (7.27) a encore lieu pour $\phi = u$. Pour ce faire on déduit de (7.27) que

$$-\Delta_p u = f(x, u, \nabla u) + h \qquad \text{dans} \qquad W^{-1,p'}(\Omega).$$

Par le lemme 7.7, la distribution $-\Delta_p u - h = f(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega)$ et de plus $(-\Delta_p u - h)\, u = f(x, u, \nabla u)\, u \in L^1(\Omega)$. Il résulte alors du lemme de Brezis-Browder [B,B] que

$$\langle -\Delta_p u, u \rangle = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, u + \langle h, u \rangle.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 7.1. ■

8. – Non-résonance entre deux surfaces propres consécutives.

Nous considérons maintenant la situation où la non-linéarité f dans (7.1) se trouve asymptotiquement entre deux surfaces propres consécutives de $\sigma_1(-\Delta_p, 1)$. Dans le cas linéaire $p=2$ nous traiterons effectivement cette situation générale, mais dans le cas non linéaire $p \neq 2$, nous nous limiterons à la situation où f se trouve asymptotiquement entre les deux premières surfaces propres. Cette limitation provient évidemment de notre connaissance partielle du spectre de $-\Delta_p$ (cf. section 6).

On suppose donc qu'il existe $\alpha_1 < \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^N$ tels que pour tout $\delta > 0$ il existe $a_\delta \in L^{p'}(\Omega)$ avec

$$\text{(8.1)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 |s|^p + (\beta . |\xi|^{p-2}\xi) s - \delta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + a_\delta(x))|s| \leqslant sf(x, s, \xi) \leqslant \\ \alpha_2 |s|^p + (\beta . |\xi|^{p-2}\xi) s + \delta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + a_\delta(x))|s| \end{cases}$$

p.p. $x \in \Omega$ et $\forall (\xi, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

THÉORÈME 8.1. – *Supposons* (8.1) *avec soit* $p=2$ *et* $\Lambda_k(\beta, -\Delta, 1) < \alpha_1 < \alpha_2 < \Lambda_{k+1}(\beta, -\Delta, 1)$ *pour un certain entier* $k \geqslant 1$, *soit* $p \neq 2$ *et* $\Lambda_1(\beta, -\Delta_p, 1) < \alpha_1 < \alpha_2 < \Lambda_2(\beta, -\Delta_p, 1)$. *Alors, pour tout* $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$, *le problème (7.1) admet une solution au sens faible usuel.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8.1. – Nous allons faire la démonstration dans le cas $p=2$. La démonstration dans le cas $p \neq 2$ est tout à fait analogue. Soit donc $p=2$. On commence comme précédemment à transformer le problème (7.1) en le problème (7.5). Soit $(T_t)_{t \in [0,1]}$ la famille d'opérateurs définie de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ définie par

$$\text{(8.2)} \quad T_t(u) := -\Delta^\beta(u) - e^{\beta . x}(t(f(x, u, \nabla u) + h) + (1-t)\,\alpha u - t\beta . \nabla u)$$

où α est fixé avec $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Comme $f(x, s, \xi)$ a une croissance au plus linéaire en $|s|$ et $|\xi|$ (une conséquence de (8.1)), l'opérateur T_t est de type (S_+) pour tout $t \in [0, 1]$ (voir [B,M]). Par la théorie du degré de [B,M], le théorème 8.1. sera donc démontré si on établit l'estimation à priori:

$$\text{(8.3)} \qquad \{u \in H_0^1(\Omega);\ \exists t \in [0, 1] \text{ avec } T_t(u) = 0\} \text{ est borné}.$$

Pour ce faire, on suppose par l'absurde qu'il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$, $t_n \in [0, 1]$ tels que $T_{t_n}(u_n) = 0$ et $\|u_n\|_{1,2} \to +\infty$. On a donc

$$\text{(8.4)} \quad -\Delta^\beta(u_n) = e^{\beta . x}(t_n(f(x, u_n, \nabla u_n) + h) + (1-t_n)\,\alpha u_n - t_n\beta . \nabla u_n).$$

Posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{1,2}}$. Pour une suite partielle, $v_n \rightharpoonup v$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $v_u \to v$

dans $L^2(\Omega)$. Posons

$$g_n(x) := \frac{f(x, u_n, \nabla u_n)}{\|u_n\|_{1,p}} - \beta . \nabla v_n .$$

Ces fonctions g_n restent clairement bornées dans $L^2(\Omega)$ et donc, pour une suite partielle, $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^2(\Omega)$. On va décomposer la suite de la démonstration en plusieurs étapes.

1ÈRE ÉTAPE. – $g(x) = 0$ p.p. dans $A := \{x \in \Omega;\, v(x) = 0 \text{ p.p.}\}$.

PREUVE. – Définissons $\phi(x) = sgn(g(x))\chi_A$. D'après (8.1) on a

$$|g_n(x)\phi(x)| \leq a\left(|v_n| + \delta\left(|v_n| + |\nabla v_n| + \frac{a_\delta(x)}{\|u_n\|_{1,2}}\right)\right)\chi_A(x),$$

pour une constante a, et donc

$$\|g_n\phi\|_2 \leq a\left(\|v_n\chi_A\|_2 + \delta\left(1 + \frac{\|a_\delta\chi_A\|_2}{\|u_n\|_{1,2}}\right)\right).$$

Comme $v_n\chi_A \to 0$ dans $L^2(\Omega)$, il vient lim sup $\|g_n\phi\|_2 \leq a\delta$, et comme δ est arbitraire, $g_n\phi \to 0$ dans $L^2(\Omega)$. Comme par ailleurs $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^2(\Omega)$, on a $\int_\Omega g_n\phi \to \int_\Omega g\phi = \int_\Omega |g(x)|\chi_A(x)$, et on conclut $\int_A |g(x)| = 0$, d'où la 1ère étape.

Définissons maintenant la fonction

$$d(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{v(x)} & \text{si } x \in \Omega \backslash A , \\ \alpha & \text{si } x \in A . \end{cases}$$

2ÈME ÉTAPE. – $\alpha_1 \leq d(x) \leq \alpha_2$ p.p. $x \in \Omega$.

PREUVE. – Il s'agit de montrer que $\alpha_1 \leq (g(x)/v(x))$ p.p. $x \in \Omega \backslash A$ (la démonstration de l'autre inégalité est analogue). Posons $B = \{x \in \Omega \backslash A;\, \alpha_1(v(x))^2 > v(x)\, g(x) \text{ p.p.}\}$. Il suffit clairement de montrer que $mes\, B = 0$. D'après (8.1), on a

$$\alpha_1(u_n)^2 - \delta(|u_n| + |\nabla u_n| + a_\delta(x))|u_n| \leq u_n(f(x, u_n, \nabla u_n) - \beta . \nabla u_n) .$$

En divisant par $\|u_n\|^2_{1,2}$ puis en multipliant par χ_B et en intégrant, il vient

$$\alpha_1 \int_\Omega (v_n)^2 \chi_B - \delta \int_\Omega \left(|v_n| + |\nabla v_n| + \frac{a_\delta(x)}{\|u_n\|_{1,2}} \right) |v_n| \chi_B \leqslant \int_\Omega v_n g_n(x) \chi_B ,$$

et par l'inégalité de Hölder,

$$\alpha_1 \int_\Omega (v_n)^2 \chi_B \leqslant \int_\Omega v_n g_n(x) \chi_B + \delta \left(c + \frac{c_\delta}{\|u_n\|_{1,2}} \right),$$

où c et c_δ sont des constantes. En passant à la limite sur n puis sur δ, on obtient

$$\int_\Omega (v(x)\, g(x) - \alpha_1 v(x)^2)\, \chi_B \geqslant 0 \, .$$

De la définition de l'ensemble B résulte alors que $mes\, B = 0$, d'où la 2ème étape.

Il est clair qu'on peut supposer que $t_n \to t$. Posons $m(x) = td(x) + (1-t)\,\alpha$. Clairement $\alpha_1 \leqslant m(x) \leqslant \alpha_2$ p.p.x.

3ÈME ÉTAPE. – La fonction v est une solution du problème avec poids

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta^\beta u = e^{\beta . x} m(x)\, u & \text{dans} \quad \Omega \, , \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \, . \end{array} \right. \tag{8.5}$$

PREUVE. – En divisant (8.4) par $\|u_n\|_{1,2}$, il vient

$$-\Delta^\beta v_n = e^{\beta . x} \left(t_n g_n(x) + (1-t_n)\, \alpha v_n + \frac{t_n h}{\|u_n\|_{1,2}} \right), \tag{8.6}$$

et en passant à la limite

$$\int_\Omega e^{\beta . x} \nabla v \, \nabla \phi = \int_\Omega e^{\beta . x} (tg(x) + (1-t)\, \alpha v)\, \phi , \qquad \forall \phi \in H^1_0(\Omega) \, .$$

D'après la 1ère étape et la définition de $d(x)$, on a $g(x) = d(x)\, v(x)$ p.p. $x \in \Omega$, et il en résulte que

$$-\Delta^\beta v = e^{\beta . x} (td(x) + (1-t)\, \alpha) v \qquad \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

d'où (8.5), ce qui termine la 3ème étape.

4ÈME ÉTAPE. – $v \not\equiv 0$.

PREUVE. – En multipliant (8.6) par v_n, il vient

$$\int_\Omega e^{\beta \cdot x}(t_n g_n(x)\, v_n + (1-t_n)\, \alpha (v_n)^2) + \frac{t_n \langle h,\, v_n\rangle}{\|u_n\|_{1,2}} = \int_\Omega e^{\beta \cdot x}\, |\nabla v_n|^2 \geq a$$

où $a = \min\limits_{\overline{\Omega}} e^{\beta \cdot x} > 0$. Par passage à la limite, on déduit $0 < a \leq \int_\Omega e^{\beta \cdot x} m(x)\, v^2$, d'où la 4ème étape.

Finalement, d'après la 3ème et la 4ème étape, $(\beta,\, 1)$ est une valeur propre d'ordre 1 du problème (5.2) avec $p = 2$, et donc $1 = \Lambda_l(\beta,\, -\Delta,\, m)$ pour un certain l. Par ailleurs $\Lambda_k(\beta,\, -\Delta,\, 1) < \alpha_1 \leq m(x) \leq \alpha_2 < \Lambda_{k+1}(\beta,\, -\Delta,\, 1)$, et par la propriété de stricte monotonie des surfaces propres (voir proposition 6.2), il vient

$$\Lambda_k(\beta,\, -\Delta,\, m) < 1 < \Lambda_{k+1}(\beta,\, -\Delta,\, m),$$

une contradiction. Ceci termine la démonstration du théorème 8.1. ■

REMARQUE 8.2. – 1) Lorsque $p = 2$ et Ω est régulier, alors l'opérateur $(-\Delta)^{-1} T_t \colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ est compact, où T_t est défini en (8.2). On peut alors utiliser la théorie usuelle du degré de Leray-Schauder dans la démonstration précédente.

2) Lorsque $p = 2$, on peut remplacer $-\Delta$ par un opérateur L comme dans la section 2.

REFERENCES

[A1] A. ANANE, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris,t. 305 Série I (1987), 725-728.

[A2] A. ANANE, *Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur p-laplacien*, Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1987.

[A,C] A. ANANE - O. CHAKRONE, *Sur un théorème de point critique et application à un problème de non-résonance entre deux valeurs propres du p-laplacien*, à paraître.

[A,C,G] A. ANANE - O. CHAKRONE - J. P. GOSSEZ, *Spectre d'ordre supérieur et problèmes de non-résonance*, C. R. Acad. Sci. Paris,t. **325** Série I (1997), 33-36.

[A,T] A. ANANE - N. TSOULI, *On the second eigenvalue of the p-laplacian*, Pitman Res. Notes in Math., **343** (1996), 1-9.

[Az] C. AZIZIEH, *Méthodes variationnelles et spectre du p-laplacien*, Mémoire de Licence, Université Libre de Bruxelles (1997).

[B,M] J. BERKOVITS - V. MUSTONEN, *Nonlinear mappings of monotone type (classification and degree theory)*, Math. Univer. Oulu, Linnanmaa, Oulu, nland (1998).

[B,B,M] A. BENSOUSSAN - L. BOCCARDO - F. MURAT, *On a non linear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non-linéaire, **5** (1988), 347-364.

[B,B] H. BRÉZIS - F. BROWDER, *Sur une propriété des espaces de Sobolev*, C. R. Acad. Sc Paris, **287** (1978), 113-115. Operators, Nonli., **10** (1986), 1083-1103.

[C] O. CHAKRONE, *Spectre d'ordre supérieur dans les problèmes aux limites quasilinéaires et un théorème de point critique et application à un problème de non-résonance entre deux valeurs propres du p-laplacien*, Thèse, Univ. Oujda (1998).

[De] D. DE FIGUEIREDO, *Positive solutions of semilinear elliptic equation*, Lecture Notes in Mathematics, **957** (1982), 34-87.

[D,G] D. DE FIGUEIREDO - J. P. GOSSEZ, *Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation*, Comm. Part. Diff. Equat., **17** (1992), 339-346.

[D] C. L. DOLPH, *Nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, Trans. Amer. Math. Soc., **66** (1949), 289-307.

[DV] T. DELVECCHIO, *Strongly nonlinear problems with gradient dependent lower order non linearity*, Nonlinear Anal. TMA, **11** (1987), 5-15.

[F,G,T,T] J. FLECKINGER - J.-P. GOSSEZ - P. TAKAC - F. DE THELIN, *Existence, nonexistence et principe de l'antimaximum pour le p-laplacien*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **321**, Série I (1995), 731-734.

[H] A. HAMMERSTEIN, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst anwendungen acta*, Math. **54** (1930), 117-176.

[L,L] E. LANDESMAN - A. LAZER, *Nonlinear perturbation of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech., **19** (1970), 609-623.

[L] P. LINDQUVIST, *On the equation* $div(|\nabla u|^p \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0$, Proc. of Amer. Math. Soc., **109** (1) (1990).

[S] A. SZULKIN, *Ljusternik-Schnirelmann theory on C^1-manifolds*, Ann. I. H. Poincaré, Anal. non linéaire, **5** (1988), 119-139.

[T] A. TOUZANI, *Quelques résultats sur le A_p-laplacien avec poids indéfini*, Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles (1992).

Aomar Anane, Omar Chakrone: Département de mathématiques
Université Mohamed I, Oujda, Maroc
E-mail: anane@sciences.univ-oujda.ac.ma; chakrone@sciences.univ-oujda.ac.ma

Jean-Pierre Gossez: Département de mathématiques, C. P. 214
Université Libre de Bruxelles, 1050 Bruxelles, Belgique. E-mail: gossez@ulb.ac.be

Pervenuta in Redazione
il 17 giugno 1999