Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Lacava

Algebre di Łukasiewicz quasi-locali Stoneane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **4-B** (2001), n.3, p. 759–766.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_3_759_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2001.

Bollettino U. M. I.
(8) 4-B (2001), 759-766

Algebre di Łukasiewicz Quasi-Locali Stoneane.

FRANCESCO LACAVA

Summary. – *We prove some properties of quasi-local Ł-algebras. These properties allow us to give a structure theorem for Stonean quasi-local Ł-algebras. With this characterization we are able to exhibit an example which provides a negative answer to the first problem posed in* [4].

0. – Introduzione.

Le algebre di Łukasiewicz furono introdotte per la prima volta nel lontano 1958 da C. C. Chang [5], [6] per dare una dimostrazione algebrica del teorema di completezza della logica di Łukasiewicz a infiniti valori. Negli anni successivi la scuola argentina si occupò essenzialmente di algebre di Łukasiewicz trivalenti (vedi [18]-[22]). Nel 1973 P. Mangani [17], fornì una assiomatizzazione particolarmente semplice e caratterizzò tutte le catene archimedee, ponendo così le basi per le successive ricerche. Da allora sono comparsi molti articoli che forniscono classificazioni di particolari sottoclassi della varietà delle algebre di Łukasiewicz sia per via algebrica (ad esempio [1], [2], [7], [9], [11], [15]) o per via model-teoretica (vedi [10], [12], [13]). Recentemente [4] è stata data una classificazione attraverso lo studio topologico dello spettro primo di un'algebra di Łukasiewicz. La presente nota vuole essere un piccolo contributo in questa direzione. In particolare vuole fornire una risposta al primo problema posto in [4] p. 344. Per la risposta al secondo problema vedi [16]. Nella sezione successiva vengono fornite le definizioni e i risultati più importanti che verranno usati nel seguito.

1. – Premessa.

DEFINIZIONE. – Diciamo *algebra di Łukasiewicz* [17](Ł-algebra o *MV-algebra* [2], [5]) una struttura $\mathcal{A} = \langle A, +, '; 0, 1\rangle$ che soddisfi le seguenti proprietà:

1) $< A, +, 0 >$ è un monoide abeliano;
2) $x + 1 = 1$;
3) $(x')' = x$;
4) $0' = 1$;

5) $x + x' = 1$;
6) $(x' + y)' + y = (x + y')' + x$ per ogni $x, y \in A$.

Si definiscono inoltre le seguenti operazioni:

i) $x \vee y = (x' + y)' + y$
ii) $x \wedge y = (x' \vee y')'$
iii) $x \cdot y = (x' + y')'$

e inoltre la seguente relazione di ordine:

iv) $x \leqslant y$ se e solo se $x' + y = 1$.

Si ha il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.1. – Se $\mathcal{A}$ è una Ł-algebra allora $\langle A, \vee, \wedge; 0, 1\rangle$ è un reticolo distributivo dotato di massimo e di minimo, e l'ordine parziale ad esso associato coincide con la relazione $\leqslant$ definita in iv).

Un elemento x si dice *booleano* o *idempotente* se $2x = x$ (o equivalentemente se $x^2 = x$).

Se $\mathcal{A}$ è una Ł-algebra, indicheremo con B_A l'insieme degli elementi di $\mathcal{A}$ che sono booleani.

PROPOSIZIONE 1.2. – $\langle B_A, \vee, \wedge, '; 0, 1\rangle$ è un'algebra di Boole. Inoltre B_A è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$ e per ogni $x, y \in B_A$ $x + y = x \vee y$ e $x \cdot y = x \wedge y$.

Una Ł-algebra totalmente ordinata da si dice *Ł-catena*.

PROPOSIZIONE 1.3. – Ogni Ł-algebra è un prodotto sottodiretto di Ł-catene.

Fissati $a, b \in A$ con $a < b$ indichiamo con $A_{a,b}$ il sottoinsieme di A degli $x \in A$ con $a \leqslant x \leqslant b$.

Definiamo $x \oplus y = a + [(x' + a) \cdot (y' + a)]' \wedge (b' + a)'$ $\bar{}\!\!^{7} = a + (b' + x)'$

PROPOSIZIONE 1.4. – [11] $\mathcal{A}_{a,b} = \langle A_{a,b}, \oplus, {}^{7}; a, b\rangle$ è una Ł-algebra.

DEFINIZIONE. – Sia $a \in \mathcal{A}$. Se esiste n intero positivo tale che $na \in B_A$, diremo che a è *quasi-archimedeo*. Se tale n non esiste diremo che a è *non-archimedeo*.

Si dice *ordine* di a ($ord(a)$) [4] il minimo intero positivo n tale che $nx = 1$, se tale intero esiste, altrimenti si dirà che a ha *ordine infinito* ($ord(a) = \infty$).

$\mathcal{A}$ si dice *locale* [12] se ha un solo ideale massimale.

PROPOSIZIONE 1.5-[3] $\mathcal{A}$ è locale se e solo se qualunque sia $x \in A$, o x o x' ha periodo finito.

Se a quasi-archimedeo diremo *periodo* [16] di a il minimo intero positivo n tale che $na \in B$ e indicheremo con $per(a)$ tale periodo. Se $B_A = \{0, 1\}$

e $a \neq 0$ allora $per(a) = ord(a)$. Se a è non-archimedeo diremo che a ha periodo infinito ($per(a) = \infty$).

OSSERVAZIONE x è quasi-archimedeo se e solo se esiste un naturale n tale che $(nx)' \wedge x = 0$. Infatti se $nx \in B_A$ allora $nx \wedge (nx)' = 0$ quindi anche $nx \wedge n(nx)' = n(x \wedge (nx)') = 0$ il che implica che $x \wedge (nx)' = 0$. Viceversa se $(nx)' \wedge x = 0$ anche $n((nx)' \wedge x) = 0$ e quindi $0 = n(nx)' \wedge nx \geqslant (nx)' \wedge nx = 0$ e d'altra parte $(nx)' \vee nx = (nx \wedge (nx)')' = 1$ e quindi $nx \in B_A$.

DEFINIZIONE. – Sia $\mathcal{A}$ una Ł-algebra. $\mathcal{A}$ si dice *iperarchimedea* [7] se ogni suo elemento ha periodo finito. $\mathcal{A}$ si dice *quasi-locale* [16] se, per ogni $x \in A$, x oppure (*vel*) x' ha periodo finito.

Indichiamo inoltre con $Rad(A)$ l'intersezione di tutti gli ideali massimali di $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ si dirà *semisemplice* se $Rad(A) = \{0\}$.

Se $\mathcal{A}$ è non iperarchimedea, indichiamo con $\mathcal{F} = \{b \in B : b > x$ per qualche $x \in A$ non-archimedeo$\}$.

PROPOSIZIONE 1.6. – [16] Sia $\mathcal{A}$ una Ł-algebra quasi-locale non iperarchimedea. Allora $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro di B_A.

2. – Ł-algebre quasi-locali stoneane.

LEMMA 2.1. – Sia $\mathcal{A}$ una Ł-algebra e $x \in A$ non archimedeo. Allora esiste un ideale primo P tale che $[x] \in Rad(\mathcal{A}/P)$ e $[x] \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\mathfrak{I}$ la famiglia di ideali I di tali che $(nx)' \wedge x \notin I$ per ogni n intero positivo. Per l'osservazione precedente $\mathfrak{I}$ non è vuota. Per il lemma di Zorn, $\mathfrak{I}$ ammette elementi massimali (rispetto all'inclusione). Sia P un tale elemento; mostriamo che P è l'ideale cercato. Mostriamo innanzitutto che è primo. Sia $a \wedge b \in P$ e supponiamo che nè a nè b sono in P. Allora sia P_1 l'deale generato da $P \cup \{a\}$ e P_2 l'deale generato da $P \cup \{b\}$. Allora $P_1, P_2 \notin \mathfrak{I}$, quindi esistono $y_1, y_2 \in P$ e k_1, k_2 interi positivi tali che $y_1 + k_1 a \geqslant (nx)' \wedge x$ e $y_2 + k_2 a \geqslant (nx)' \wedge x$ per un opportuno n. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $y_1 = y_2 = y$ e $k_1 = k_2 = k$. Allora $(y + ka) \wedge (y + kb) \geqslant (nx)' \wedge x$ cioè $y + k(a \wedge b) \geqslant (nx)' \wedge x$. Questo significa che $(nx)' \wedge x \in P$, assurdo. Che $[x] \in Rad(\mathcal{A}/P)$ segue dal fatto che $n[x] \neq 1$ per ogni n intero positivo e $[x] \neq 0$.

DEFINIZIONE. – Un sottoinsieme I di A si dice che ha la *proprietà delle somme finite* (*f.s.p.*) se comunque presi un numero finito di elementi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in I$, si ha che $\sum_{k=0}^{n} a_k \neq 1$.

PROPOSIZIONE 2.2. – Un sottoinsieme I di A si puo' estendere ad un ideale proprio se e solo se I ha la f.s.p.

DIMOSTRAZIONE. – Ovvia.

PROPOSIZIONE 2.3. – Sia $\mathcal{A}$ quasi-locale e I un sottoinsieme di A con la f.s.p. Se $I \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, allora ogni ideale massimale che estende I è primo minimale.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\mathcal{M}$ un ideale massimale che estende I, sia $b \in I \cap \mathcal{F}$. Sia $P \subsetneq \mathcal{M}$ un ideale primo e supponiamo per assurdo che esista un $x \in \mathcal{M} - P$. Allora $[x] \in \mathcal{A}/P$ e $[x] \neq [0]$. Se esistesse n intero positivo tale che $[nx] = [1]$ allora $(nx)' = ((n-1)x)' \cdot x' \in P$, quindi per la primalità di P si ha che $x' \in P$ quindi $x' \in \mathcal{M}$ assurdo. Ne segue che $[x]$ è non-archimedeo e quindi x non-archimedeo in $\mathcal{A}$. Per la proposizione 1.6 allora $b' \wedge x$ è quasi-archimedeo. D'altra parte $b \in P$, per cui $[b' \wedge x] = [b'] \wedge [x] = [x]$ per cui $[x]$ archimedeo, in contraddizione con quanto mostrato prima. Quindi $\mathcal{M}$ è primo minimale.

PROPOSIZIONE 2.4. – Sia $\mathcal{A}$ una Ł-algebra. $\mathcal{A}$ è quasi-locale se e solo se esiste un ideale massimale $\mathcal{M}$ tale che ogni ideale primo non massimale è contenuto in $\mathcal{M}$.

DIMOSTRAZIONE. – ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{A}$ è iperarchimedea la proposizione è banalmente vera. Supponiamo $\mathcal{A}$ quasi-locale e non iperarchimedea. Sia I l'ideale generato da $\mathcal{F}' = \{x \in \mathcal{A} : x' \in \mathcal{F}\}$. $I \cap B_A = \mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}'$ è un ideale massimale di B_A. $\mathcal{A}/I$ è quindi locale (vedi [16] osservazione 1). Sia $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{A} : [x] \in Rad(\mathcal{A}/I)\}$. Allora si ha:

a) $\mathcal{M}$ è un ideale massimale;

b) se P è un ideale primo non massimale allora $P \subsetneq \mathcal{M}$.

a) è ovvio; *b*) se P non è massimale esiste un elemento x non archimedeo tale che $x \notin P$ e $[x]$ in $\mathcal{A}/P$ è non archimedeo. Mostriamo che $I \subsetneq P$. Basta mostrare che $\mathcal{F}' \subsetneq P$. Se $b \in \mathcal{F}'$ e $b \notin P$ allora $b \wedge x$ è quasi-archimedeo e $[b] = [1]$ in $\mathcal{A}/P$. Ma allora $[b \wedge x] = [b] \wedge [x] = [x]$ in contraddizione con l'ipotesi che $[x]$ deve essere non archimedeo. Quindi $I \subsetneq P$ e poiché $\mathcal{A}/I$ è locale $P \subsetneq \mathcal{M}$.

($\Leftarrow$) Se esiste x tale che x e x' sono non archimedei, allora per il lemma 2.1 è possibile costruire un ideale primo P_x tale che $x \notin P_x$ tale che $\mathcal{A}/P_x$ è non archimedeo e $[x] \in Rad(\mathcal{A}/P_x)$. Se $\mathcal{M}$ è l'ideale massimale che contiene P_x, allora, detto f l'omomorfismo canonico di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}/P_x$, $f(\mathcal{M})$ è massimale in $\mathcal{A}/P_x$ e quindi $[x] \in f(\mathcal{M})$. Analogamente $[x'] \in f(\mathcal{M})$. Assurdo.

COROLLARIO 2.5. – $\mathcal{M}$ massimale è primo minimale se e solo se $\mathcal{M} \cap F \neq \emptyset$.

Seguendo [4], indicheremo con **SpecA** l'insieme di tutti gli ideali primi di $\mathcal{A}$, cui è stata data una struttura di spazio topologico alla maniera di Zariski. Se indichiamo con $\mathfrak{A}_x = \{P$ ideali primi di $\mathcal{A}$: $x \notin P\}$, allora l'insieme degli $\mathfrak{A}_x$ al variare di x in A, costituisce una base di aperti per **SpecA**. Indichiamo inoltre con **MaxA** e **MinA** i sottospazi di **SpecA** rispettivamente di tutti gli ideali massimali di $\mathcal{A}$ e di tutti gli ideali primi minimali di $\mathcal{A}$ con la topologia indotta. Se $X \subseteq A$, indichiamo con $X^{\perp} = \{a \in A : a \wedge x = 0$ per ogni $x \in X\}$; nel caso che $X = \{x\}$ allora scriveremo $x^{\perp}$. Indichiamo inoltre con $id(X)$ l'ideale generato da X.

Ricordiamo inoltre le seguenti:

DEFINIZIONE ([4], [16]). – $\mathcal{A}$ si dice *regolare* se per ogni $x, y \in A$ con $x \wedge y = 0$, esistono $b_1, b_2 \in B_A$ tali che $b_1 \geq x$, $b_2 \geq y$ e $b_1 \wedge b_2 = 0$. $\mathcal{A}$ si dice *stoneana* se per ogni $x \in A$ esiste un $b \in B_A$ tale che $x^{\perp} = id(b)$.

PROPOSIZIONE 2.6 ([4] p. 343). – $\mathcal{A}$ è stoneana se e solo se $\mathcal{A}$ è regolare e **MinA** è compatto.

PROPOSIZIONE. – 2.7. – $\mathcal{A}$ è stoneana se e solo se per ogni $x, y \in A$ con $x \wedge y = 0$, esistono $b_1, b_2 \in B_A$ tali che $b_1 \geq x$, $b_2 \geq y$ e $b_1 \wedge b_2 = 0$ minimi rispetto a tale condizione.

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo innanzitutto che da $s \wedge t = 0$ si ha $s \leq t'$ (infatti $s' + t' = s' + t' + t \wedge s = s' + (s + t') = 1$). Supponiamo $\mathcal{A}$ stoneana e siano $x, y \in A$ con $x \wedge y = 0$. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, $x, y \neq 0$. Allora $y \in x^{\perp} = id(b)$ e $x \in y^{\perp} = id(c)$ con $b, c \in B_A$; quindi $y \wedge c = 0$ e $x \wedge b = 0$ e di conseguenza $x \leq b'$ e $y \leq c'$. Poniamo $b_1 = b'$ e $b_2 = c'$. Allora $b' \wedge y \leq b' \wedge b = 0$ cioè $b' \in id(c)$ e $b' \leq c$. Di conseguenza $b_1 \wedge b_2 = b' \wedge c' = (b' \wedge c) \wedge c' = 0$. Sia ora $b_3 \in B_A$ e $b_3 \geq x$. Sia (*) $b_4 = b_3 \wedge b_1 \geq x$. Allora $b_4 \leq b_1$; inoltre si ha $b_4' \wedge x \leq b_4' \wedge b_4 = 0$ e quindi $b_4' \in id(b)$, vale a dire $b_4' \leq b = b_1'$ da cui segue che $b_4 = b_1$ e per (*) $b_3 \geq b_1$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{A}$ soddisfi le condizioni del teorema e mostriamo che $\mathcal{A}$ stoneana. Sia $x \in A$ e sia $y \in x^{\perp}$. Allora $x \wedge y = 0$. Per ipotesi esistono $b_1, b_2 \in B_A$ con $b_1 \geq x$, $b_2 \geq y$ e $b_1 \wedge b_2 = 0$ e minimi rispetto a tali condizioni. Mostriamo che $x^{\perp} = id(b_1')$. Se $z \leq b_1'$ allora $x \wedge z \leq x \wedge b_1' \leq b_1 \wedge b_1' = 0$ da cui $z \in x^{\perp}$. Viceversa se $t \wedge x = 0$ allora $0 = (x \wedge b_1') \vee (t \wedge x) = x \vee (b_1' \wedge t)$ per cui esistono $c_1, c_2 \in B_A$ con $c_1 \wedge c_2 = 0$ e $c_1 \geq x$ e (**) $c_2 \geq (b_1' \vee t) \geq b_1'$ minimi rispetto a tali condizioni. D'altra parte $c_1 \wedge b_1 \geq x$ e $(c_1 \wedge b_1) \wedge c_2 = 0$ da cui $c_1 = b_1$. Allora da $c_1 \wedge c_2 = 0$ segue che $c_2 \leq c_1' = b_1'$ cioè $c_2 = b_1'$ da cui per la (**) $t \wedge b_1 = 0$ vale a dire $t \leq b_1'$. Segue che $x^{\perp} = id(b_1')$.

PROPOSIZIONE 2.8. – Sia $\mathcal{A}$ quasi-locale e non iperarchimedea. Allora se **MinA** è compatto allora $\mathcal{F}$ è principale.

DIMOSTRAZIONE. – Supponiamo $\mathcal{F}$ non principale. Sia $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{A}_{b \vee x}$: al variare di x non-archimedeo e $b \in \mathcal{F}'\}$. $\mathfrak{R}$ è un ricoprimento di **MinA**. Infatti sia $P \in$ **MinA**: se $P \in$**MaxA** allora esiste $b \in P$ tale che $b > x$ per qualche $x \in A$ x non-archimedeo. Ne segue che $b' \notin P$ e quindi $P \in \mathfrak{A}_{b' \vee x}$. Se P non è massimale esiste un x non-archimedeo tale che $x \notin P$ e quindi $P \in \mathfrak{A}_{b \vee x}$ per qualunque $b \in B_A$. Sia ora $\mathfrak{R}_0 = \{\mathfrak{A}_{b_1 \vee x1}, \mathfrak{A}_{b_2 \vee x_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{b_m \vee x_m}\}$ un sottoricoprimento finito di **MinA**. Sia $I_0 = \{b_i \vee x_i : 1 \leq i \leq m\}$. Sia $b_0 \in \mathcal{F}$ tale che $0 \neq b_0 < \bigcap_{i=1}^{m} b_i'$; allora $I = I_0 \cup \{b_0\}$ ha la f.s.p. e per una proposizione precedente pu essere esteso ad un ideale primo minimale $\overline{P}$ che non appartiene a $\mathfrak{R}_0$.

COROLLARIO 2.9. – Se $\mathcal{A}$ è quasi-locale, stoneana e B_A è priva di atomi, allora $\mathcal{A}$ è iperarchimedea.

COROLLARIO 2.10. – Se $\mathcal{A}$ è quasi-locale non iperarchimedea e **MinA** è compatto allora $\mathcal{A}$ è isomorfa ad un prodotto diretto di una Ł-algebra iperarchimedea per una Ł-algebra locale.

COROLLARIO 2.11. – Sia $\mathcal{A}$ semisemplice e quasi-locale. Allora **MinA** è compatto se e solo se $\mathcal{A}$ è iperarchimedea.

COROLLARIO 2.12. – Se $\mathcal{A}$ è semisemplice e quasi-locale, $\mathcal{A}$ è stoneana se e solo se **MaxA** è omeomorfo a **MinA**.

TEOREMA 2.13. – Se $\mathcal{A}$ è quasi-locale e stoneana allora o è iperarchimedea o è prodotto diretto di un'algebra iperarchimedea e di una catena non semplice.

DIMOSTRAZIONE. – Segue facilmente dalla proposizione precedente, dal corollario 3 e proposizione 18 di [16].

In [4] è stato posto il seguente problema: supponiamo che **MaxA** è omeomorfo a **MinA:** possiamo concludere che $\mathcal{A}$ è stoneana? Il risultato del corollario 2.12 potrebbe far pensare ad una possibile risposta positiva a tale quesito. Il seguente esempio mostrerà, invece, che in generale la risposta negativa.

ESEMPIO. – Sia B un'algebra di Boole completa, atomica, contenente una infinità numerabile di atomi. Indichiamo con $\mathcal{C}$ la Ł-catena di Chang generata dall'elemento c di periodo infinito. Sia C_1 la sottoalgebra di $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ generata dai due elementi $(0, c)$ e $(c, 0)$. Osserviamo che C_1 è una Ł-algebra locale il cui unico ideale massimale $\mathfrak{I}$ è formato da tutti gli elementi di ordine infinito. In $\mathcal{A} = B$ x C_1 consideriamo l'algebra $\mathcal{D} = \mathcal{A}_{0,(1,(c,c))}$. Allora abbiamo i seguenti fatti:

i) $\mathcal{D}$ è un'algebra di Boole;

ii) se P è un ideale primo di $\mathcal{A}$, allora se $(1,(c, c)) \in P$ allora $P \notin$**MinA** (infatti l'ideale generato da $(1,(0, c))$ è primo e contenuto in P);

iii) **SpecD**, **SpecB**, **SpecB$_{\mathbf{A}}$** sono spazi omeomorfi (infatti D, B, B_A sono algebre di Boole complete, atomiche con l'insieme di atomi numerabile, quindi isomorfe).

Sia ora f un'applicazione da **MinA** nell'insieme degli ideali di $\mathcal{D}$, così definita:

$$f(P) = \{x \wedge (1,(c,\, c)) : x \in P\}\,.$$

Mostriamo che $f(P)$ è un ideale massimale di $\mathcal{D}$. Sia $x \in \mathcal{D}$ e $x \notin f(P)$; allora $x \notin P$. D'altra parte $x \wedge x^{\urcorner} = x \wedge ((1,(c,\, c))' + x)' = 0$. per la primalità di P si ha che $x' \in P \cap D$ e quindi $x^{\urcorner} \in f(P)$. Inoltre, sia $P \in$**MinA**, abbiamo che $x \in P$ se e solo se $x \wedge (1,(c,\, c)) \in P$. Questo ci garantisce che f è iniettiva. f è anche suriettiva. Infatti gli ideali massimali J di $\mathcal{D}$ o sono della forma $(I,(c,\, c))$ con I ideale massimale di B e in questo caso $J = f(I \times C_1)$, oppure della forma $(B,(0,\, c))$ o $(B,(c,\, 0))$ e in tal caso $J = f(B,(0,\, C))$ o $J = f(B,(C,\, 0))$.

Sia ora $\mathfrak{A}_x = \{P \in \mathbf{MinA} : x \notin P\}$ e $\overline{\mathfrak{A}}_x = \{M \in \mathbf{SpecD} : x \notin M\}$. Allora si ha che $f(\mathfrak{A}_x) = f(\mathfrak{A}_{x \wedge (1,(c,\, c))}) = \overline{\mathfrak{A}}_{x \wedge (1,(c,\, c))}$ cioè f è un omeomorfismo da **MinA** a **SpecD**. Sia ora g l'applicazione da **MaxA** a **SpecB$_{\mathbf{A}}$** così definita:

$$g(M) = M \cap B_A\,.$$

g è iniettiva. Infatti se $M_1 \cap B_A = M_2 \cap B_A$ e $M_1 \neq M_2$ allora esiste $x = (b,(s,\, t)) \in M_1$ e $x \notin M_2$. Se $(0,(1,\, 1)) \in M_2$ allora $y = (b,(0,\, 0)) \notin M_2$. Ma $y \in B_A$ quindi dall'ipotesi si ha che $y \notin M_1$ da cui $x \notin M_1$; assurdo. Se $(0,(1,\, 1)) \notin M_2$, allora $(1,(0,\, 0)) \in M_2$ e quindi $(1,(0,\, 0)) \in M_1$. Se $x \notin M_2$, allora esiste un $m \in M_2$ e un intero positivo n tale che $m + nx = 1$. Ma $(s,\, t)$ non ha ordine finito (perchè altrimenti $(1,(0,\, 0)) + kx = 1 \in M_1$), quindi $m + (1,(0,\, 0)) = 1$; assurdo.

g è suriettiva. Se M' è un ideale massimale di B_A, allora, nel caso in cui $(0,(1,\, 1)) \in M'$, $id(M')$ è l'ideale massimale di $\mathcal{A}$ tale che $g(id(M')) = M'$. Altrimenti $g(B \times \mathfrak{I}) = M'$. È semplice verificare che g un omeomorfismo di **MaxA** in **SpecB$_{\mathbf{A}}$**. Per *iii*) allora abbiamo che **MinA** è omeomorfo a **MaxA**, ma per il teorema prima dimostrato $\mathcal{A}$ non è stoneana. Questo esempio dà quindi risposta negativa alla domanda 1 posta in [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] R. AMBROSIO - A. LETTIERI, *A classification of bipartite MV-algebras.*

[2] L. P. BELLUCE, *Semi-simple and complete MV-algebras*. Algebra universalis, **29** (1992), 1-9.

[3] L. P. BELLUCE - A. DI NOLA - A. LETTIERI, *Local MV-algebras*. Rend. Circ. Mat. Palermo Serie II, Tomo **XLII** (1993), 347-361.

[4] L. P. BELLUCE - A. DI NOLA - S. SESSA, *The prime spectrum of an MV-algebra*, Math. Log. Quart., **40** (1994), 331-346.
[5] C. C. CHANG, *Algebraic analysis of many-valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 467-490.
[6] C. C. CHANG, *A new proof of the completeness of Lukasiewicz axioms*, Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 74-80.
[7] V. CAVACCINI - A. LETTIERI, *Some results on hyperarchimedean MV-algebras*, Combinatorics '90, 71-79.
[8] G. GRATZER, *Universal algebra*, Springer-Verlag, secon edition, 1979.
[9] C. S. HOO, *Semilocal MV-algebras*, Math. Japonica, **40**, No. 3 (1994), 451-453.
[10] F. LACAVA - D. SAELI, *Proprietà e model-completamento di alcune varietà di algebre di Lukasiewicz*, Acc. Naz. dei Lincei, Rendiconti Serie VIII, vol. **IX**, 4 (1976), 359-367.
[11] F. LACAVA, *Sulla struttura delle L-algebre*, Acc. Naz. dei Lincei, Rendiconti Serie VIII, vol. **LXVII**, 5 (1979), 275-281.
[12] F. LACAVA, *Alcune proprietà delle L-algebre e delle L-algebre esistenzialmente chiuse*, Boll. Un. Mat. Ital., (5) **16-A** (1979), 360-366.
[13] F. LACAVA, *Sulle classi delle L-algebre e degli l-gruppi abeliani algebricamente chiusi*, Boll. Un. Mat. Ital., (7) **1-B** (1987), 703-712.
[14] F. LACAVA, *Sulle L-algebre iniettive*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **3-A** (1989), 319-324.
[15] F. LACAVA, *Una caratterizzazione delle L-algebre complete prive di atomi*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **9-A** (1995), 609-618.
[16] F. LACAVA, *Algebre di Lukasiewicz quasi-locali*, in corso di stampa su Boll. Un. Mat. Ital.
[17] P. MANGANI, *Su certe algebre connesse con logiche a più valori*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), 8 (1973), 68-78.
[18] GR. C. MOISIL, *Sur les ideaux des algbres Lukasiewicziennes trivalentes*, Analele Universitatii C. I. Parhon. Serie Acta Logica, **3** (1960), 83-95.
[19] A. MONTEIRO, *Sur la definition des algbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phy. R.P. Roum., **7** (55) (1963), 3-12.
[20] A. MONTEIRO, *Costruction des algbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algbres de Boole monadiques*, J. Math. Japon., **12** (1967), 1-23.
[21] L. MONTEIRO, *Axiomes indpendants pour les algbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phy. R.P. Roum., **7** (1963), 199-202.
[22] L. MONTEIRO, *Extension d'omomorphismes dans les algbres de Lukasiewicz trivalentes*, International Logic Review, **2** (1970), 193-200.

Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, Viale Morgagni, 67/A

Pervenuta in Redazione
il 9 giugno 2000