Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Vinicio Villani

Matematica, Didattica della Matematica, Ricerche in Didattica della Matematica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2002), n.1, p. 1–24.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. V-A, Aprile 2002, 1-24

Matematica, Didattica della Matematica, Ricerche in Didattica della Matematica.

VINICIO VILLANI

Introduzione.

In quanto segue parlerò soprattutto di *ricerche in didattica della matematica*. Ma, proprio per questo, spero di trovare lettori interessati anche tra i matematici di professione (quelli che «dimostrano nuovi teoremi», tanto per intenderci) visto che anch'essi dedicano una parte del loro tempo e delle loro energie all'insegnamento e quindi sono costretti a confrontarsi, più o meno volentieri, con gli aspetti didattici della nostra disciplina.

Le origini della matematica si perdono nella notte dei tempi, e fin dall'antichità i matematici hanno affrontato il problema di come trasmettere le conoscenze via via acquisite ai loro allievi e alle future generazioni. Nell'introduzione all'articolo [2] si citano in proposito vari esempi emblematici, come il papiro Rhind (di impostazione pragmatica e utilitaristica, circa 1650 a. C.) e gli Elementi di Euclide (di impostazione decisamente teorica, circa 300 a.C.).

Ma è solo in epoche assai più recenti, e principalmente a seguito della rivoluzione francese, che l'introduzione di un sistema di istruzione di massa ha posto con forza un nuovo problema, fino a quel momento praticamente inesistente: quello di redigere (per tutte le discipline, non solo per la matematica) programmi di studio e libri di testo destinati ad un gran numero di allievi di estrazioni sociali eterogenee e con prospettive professionali fortemente diversificate. È iniziata allora una riflessione critica sulla scelta dei contenuti da considerare essenziali in relazione agli obiettivi prefissati, sulla scansione temporale del loro insegnamento, sulla maggiore o minore efficacia dei diversi stili di insegnamento, sulle forme più idonee per verificare e valutare le conoscenze acquisite dagli allievi (1).

Da una fase iniziale di esperienze sul campo e di riflessioni più o meno empiriche è scaturito tutto un nuovo ambito di ricerche. Ricerche aventi le didattiche disciplinari come loro oggetto di studio. Nel caso che ci interessa si tratta delle *ricerche in didattica della matematica* (2).

Queste ricerche si sono sviluppate in due direzioni distinte ma intimamente intrecciate: una sperimentale, basata su indagini statistiche e studio di casi emblematici, l'altra finalizzata a costruire un quadro teorico globale e coerente dei processi di insegnamento-apprendimento. Nell'articolo [10] le ricerche del primo tipo vengono dette «applicate», o anche di «ingegneria didattica», mentre quelle del secondo tipo vengono dette «pure», o anche di «scienza di base».

Contributi significativi alle ricerche in didattica della matematica sono stati dati fin dalla seconda metà dell'800 e all'inizio del '900 da numerosi grandi matematici, soprattutto tedeschi, francesi e italiani. Tra questi ultimi basti ricordare il nome di Federigo Enriques. Per citare un caso forse meno noto, segnalo l'attenzione di Francesco Severi alle problematiche di ricerca didattica, come testimonia per esempio un suo breve articolo [11] in buona parte ancora attuale al giorno d'oggi. L'articolo è stato recentemente ripubblicato in [12], dove sono segnalati anche vari altri contributi di Severi su temi di natura didattica (3).

(1) I termini «verifica» e «valutazione» non sono esattamente sinonimi. La *verifica* consiste in una misurazione per quanto possibile obiettiva delle conoscenze, competenze e abilità di un determinato individuo o gruppo di individui. La *valutazione* comporta invece un giudizio di merito, secondo specifiche scale di valori, su ciò che è stato verificato, in vista per esempio di attività di recupero, di promozioni o bocciature, ecc.

(2) Gli autori di tradizione anglosassone preferiscono parlare di «educazione matematica» mentre la dizione «didattica della matematica» è in uso nella maggior parte delle altre lingue.

(3) A titolo di esempio riporto un passo particolarmente significativo, tratto dall'articolo [11]:

«Ricordo che all'inizio della mia carriera d'insegnante [...] volli, nella sicura fiducia di riuscire, far comprendere ai miei scolari la struttura ipotetico-deduttiva della matematica. E mi parve che il modo migliore per convincerli che un teorema è una proposizione condizionale, la quale regge, una volta poste certe premesse, qualunque sia l'in-

Il processo di sensibilizzazione alle problematiche della ricerca didattica in ambito matematico ha subìto un'accelerazione dopo l'ultimo conflitto mondiale: il primo congresso internazionale di didattica della matematica, organizzato dall'ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) si è tenuto nel 1969. A partire dallo stesso anno è iniziata la pubblicazione della rivista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (brevemente ZDM) [14], che recensisce, per lo più in inglese, tutte le ricerche che si pubblicano nel mondo su argomenti di didattica della matematica. Lo ZDM è suddiviso in una dozzina di sezioni, codificate con lettere dell'alfabeto; le sezioni sono a loro volta suddivise in numerose sottosezioni, codificate con numeri a due cifre. Attualmente il numero annuo di recensioni ammonta ad oltre 6000.

La molteplicità degli obiettivi e dei metodi delle ricerche in didattica della matematica fa sì che tali ricerche possano essere classificate secondo vari criteri. Nel § 1 accennerò ad una possibile griglia

tuizione che ci formiamo degli oggetti del discorso, fosse quello di designare gli enti geometrici primordiali (punto, retta, piano) con parole nuove, che non rievocassero nei miei ascoltatori alcuna immagine intuitiva.

Poste là le parole denotanti i concetti fondamentali non definiti, e che altro non eran che simboli, vuoti pel momento di ogni senso, enumerai le proposizioni primitive (postulati) esprimenti le proprietà fondamentali di quei concetti, i quali così risultavano definiti solo per quel tanto che di loro si diceva nei postulati. E cominciai poscia a dedurre alcuni teoremi. La dimostrazione del primo di essi risolvevasi in tal guisa in una catena di discussioni logiche, ciascuna delle quali, in difetto di ogni imagine intuitiva, doveva poggiare sopra un postulato; la dimostrazione del secondo si conseguiva similmente poggiandone i singoli passi sopra i postulati e sopra il teorema già stabilito, e così di seguito.

Fortunatamente la mia inesperienza didattica - altrettanto entusiastica, quanto ingenua - non mi annebbiò talmente il buon senso, ch'io presto non tornassi al vecchio linguaggio. Dopo tre o quattro lezioni aprii la *boite à surprise* con un discorsetto di questo genere: «E adesso proviamo a porre al posto delle parole che ho usato finora, le parole punto, retta, piano, e verifichiamo se i postulati, che vi ho chiesto di ammettere, non risultino verificati dall'intuizione che voi avete di queste parole. Se sarà così, potremo senz'altro applicare ai punti, rette, piani i teoremi ottenuti e resterete per tal guisa persuasi che per dimostrare un teorema non occorre appoggiarsi all'intuizione: che cioè non occorre affatto di *veder la figura* ...».

Pregustavo già la gioia di cogliere negli occhi dei miei giovani un'intima soddisfazione intellettuale e invece non vi colsi che un senso di sollievo e di liberazione! E si trattava di giovanotti universitari!»

di classificazione che mi sembra particolarmente efficace nel contesto di questo articolo.

Nel § 2 mi soffermerò su quattro temi di ricerche in didattica della matematica, che al giorno d'oggi sono di grande attualità, e precisamente:

Tema I. *Quali sono le conoscenze e le capacità essenziali da trasmettere a tutti nella scuola dell'obbligo, tenendo conto dei recenti progressi della tecnologia e della diffusione degli strumenti di calcolo elettronico?*

Tema II. *Come strutturare (a livello universitario) i corsi «di servizio» di matematica per futuri non-matematici (per esempio economisti, architetti, geologi, biologi, medici,...)?*

Tema III. *Come strutturare (a livello universitario) i corsi per la preparazione dei futuri insegnanti di matematica della scuola secondaria?*

Tema IV. *Come strutturare (a tutti i livelli scolari) le prove di verifica e valutazione, in modo tale che esse risultino coerenti con le finalità dell'insegnamento?*

Infine, nel § 3, tenterò di fare il punto sull'attuale «stato dell'arte» e sulle prospettive future.

1. – Obiettivi e metodi delle ricerche in didattica della matematica.

Schematizzando al massimo, si può affermare che le ricerche didattiche (riferite nel nostro caso specifico ai processi di insegnamento/apprendimento della matematica) si propongono di rispondere alle classiche domande: *Chi? Cosa? Come? Quando? Dove? Perché?* Il tutto, con la consapevolezza che le possibili risposte sono tra loro correlate e non necessariamente univoche. Quest'ultima caratteristica è particolarmente ostica da accettare da parte di chi, possedendo una *forma mentis* matematica, è abituato ad una dicotomia netta tra risposte «giuste» e risposte «sbagliate».

Il CHI mira a identificare gli attori in gioco, ossia in primo luogo a stabilire la tipologia degli allievi ai quali un certo tipo di insegnamento è destinato. Include inoltre i «detentori del sapere» ossia gli insegnanti aventi titolo per trasmettere ai propri allievi quel determinato «sapere». E non è finita qui. Nel «chi» hanno un ruolo non marginale anche tutti coloro che in qualche modo condizionano e influenzano dall'esterno i processi di insegnamento/apprendimento, per esempio gli estensori dei programmi, gli ispettori ministeriali, gli autori dei libri di testo, i familiari, i responsabili del reclutamento del personale nelle aziende, ecc.

Il COSA si riferisce ai contenuti dell'insegnamento e quindi comprende tutto il settore dei programmi (teoria, applicazioni, problemi ed esercizi). Nel parlare di «programmi» occorre poi distinguere tra cosa prevedono i programmi ufficiali, cosa avviene nella loro trasposizione nelle classi e infine cosa viene recepito dagli allievi (nella terminologia anglosassone si parla di *intended, implemented, attained curriculum*).

Fra le «cose» da prendere in considerazione figurano anche gli eventuali sussidi didattici e l'individuazione delle conoscenze e competenze che si intendono sottoporre a verifica e valutazione.

Il COME comprende tutte le molteplici e complesse modalità attraverso le quali si attuano i processi di insegnamento/apprendimento, ed in particolare le scelte della metodologia didattica. Per esempio: insegnamento frontale o interattivo, per teorie o per problemi, secondo unità didattiche indipendenti o in forma integrata, con o senza uso di strumenti di calcolo, privilegiando gli aspetti teorici e concettuali o piuttosto le abilità di affrontare e risolvere determinate tipologie di esercizi e problemi. Comprende altresì l'attenzione agli aspetti motivazionali e ai fattori metacognitivi che possono condizionare in positivo o in negativo l'efficacia delle attività didattiche. Comprende infine le modalità di formazione e reclutamento degli insegnanti.

Il QUANDO riguarda la scansione temporale dell'insegnamento, secondo percorsi che possono essere lineari (ossia basati su una trattazione sequenziale lungo l'intero arco degli studi) o a spirale (vale a dire ritornando ciclicamente sui concetti fondamentali, con approfondimenti via via maggiori). Riguarda inoltre i tempi delle verifiche (per segmenti circoscritti del programma, oppure vertenti globalmente su un programma annuale, o pluriennale,...). Include anche lo studio degli effetti a lungo termine (ossia la permanenza o labilità delle conoscenze a distanza di tempo).

Il DOVE è a prima vista banalizzato dall'ovvia risposta: «La matematica si studia nelle istituzioni scolastiche». Ma sotto molti aspetti questo stereotipo andrebbe rivisto, valorizzando una maggiore integrazione fra il sapere scolastico disciplinare e la capacità di utilizzare le nozioni apprese, in contesti significativi, scolastici ed extrascolastici, come avviene per es. per l'insegnamento delle lingue straniere. Quanto alla matematica, diventa in particolare sempre più pressante l'esigenza di insegnare a riconoscere la matematica «sepolta» in altri ambiti disciplinari e nelle situazioni della vita quotidiana.

Il PERCHÉ è forse l'aspetto più importante. Si tratta di esplicitare gli obiettivi dell'insegnamento, motivando perché si ritiene opportuno inserire (o escludere) dai curricula determinati argomenti, o proporre determinate metodologie didattiche e valutative, per le varie categorie dei potenziali destinatari dell'insegnamento. Per esempio: perché insistere, in determinati tipi di corsi, sulle dimostrazioni formali dei teoremi, o, viceversa, perché limitarsi ad enunciare i teoremi senza dimostrarli, privilegiando altri tipi di attività?

Come ho già anticipato nell'introduzione, anche le ricerche più dichiaratamente teoriche in didattica della matematica scaturiscono da dati sperimentali e a loro volta le teorie dell'apprendimento che ne derivano aspirano ad essere validate sperimentalmente, in base alla loro capacità di prevedere e spiegare ciò che avviene nella realtà concreta dei processi di insegnamento/apprendimento.

Si può anzi dire, senza esagerazione, che le teorie dell'apprendimento nascono proprio per dare risposte esplicite e coerenti ai molteplici «perché » che ogni insegnante si pone più o meno inconsapevolmente nella sua attività didattica. Naturalmente, partendo da presupposti diversi, ne possono derivare teorie dell'apprendimento diverse.

Inevitabilmente la grande quantità dei parametri in gioco, l'enorme varietà delle situazioni che si possono presentare, e la difficoltà di indagare a fondo sui processi mentali attraverso i quali si realizza l'apprendimento, rendono le ricerche didattiche più simili a quelle mediche o sociologiche, piuttosto che a quelle matematiche. Viceversa, le «certezze» delle ricerche matematiche sono rese possibili solo grazie ad un processo di astrazione spinto alle estreme conseguenze, che volutamente esclude ogni ricorso alla realtà (si tratta di una constatazione, non di una critica).

Per ulteriori approfondimenti sui rapporti fra la matematica e la sua didattica rinvio all'interessante contributo di J. Mason [6].

2. – Riflessioni e commenti su quattro temi specifici.

Negli articoli [1], [2], [10] recentemente pubblicati sul BUMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, gli autori dedicano un'attenzione particolare ad evidenziare le *specificità* che contraddistinguono la *ricerca didattica di base* in campo matematico, differenziandola dalla matematica stessa.

Per non ripetere cose già dette dagli autori sopra citati, in quanto segue io darò maggiore spazio alla *ricerca didattica applicata*, mettendo in rilievo soprattutto i *punti di contatto* tra la didattica della matematica e la matematica. Più precisamente, cercherò di illustrare, attraverso una riflessione sui quattro esempi di temi già citati nell'introduzione, le implicazioni concrete che possono (ma forse è più appropriato usare il condizionale: potrebbero) derivare da una maggiore attenzione dei matematici alle ricerche didattiche su tali temi, in vista di migliorare e rendere più efficace l'insegnamento.

TEMA I. – *Quali sono le conoscenze e le capacità essenziali da trasmettere a tutti nella scuola dell'obbligo, tenendo conto dei recenti progressi della tecnologia e della diffusione degli strumenti di calcolo elettronico?*

Commento. Negli ultimi vent'anni l'impetuosa e pervasiva diffusione dei moderni mezzi di calcolo ha cambiato profondamente la scala dei valori per quanto riguarda l'uso della matematica nella nostra vita quotidiana e in molte professioni. Basti pensare al fatto che la padronanza del calcolo aritmetico, un tempo indispensabile per la vita quotidiana e a maggior ragione per le più svariate professioni (commercianti, artigiani, ragionieri, geometri, farmacisti,...) è stata soppiantata dall'uso delle calcolatrici tascabili. Ad un livello più sofisticato, la conoscenza della trigonometria e la capacità di usare le tavole logaritmiche, un tempo essenziali per naviganti e geometri, è stata soppiantata da sistemi di telemetria che, codificati una volta per tutte in programmi al calcolatore, consentono a migliaia di naviganti e geometri di fare senza fatica il «punto nave» o rispettivamente di eseguire i rilevamenti topografici semplicemente premendo i tasti giusti e interpretando correttamente la risposta fornita dal calcolatore. O ancora, il disegno geometrico con riga e compasso, un tempo strumento fondamentale per rappresentare secondo precise regole prospettiche le immagini bidimensionali di oggetti dello spazio, è ormai completamente soppiantato a livello professionale dai programmi di «computer graphics».

Viceversa, altre conoscenze e competenze matematiche, un tempo appannaggio di una ristretta élite, sono entrate nell'uso quotidiano (anche se, purtroppo, la stragrande maggioranza della popolazione non le padroneggia a dovere). Mi riferisco, tanto per fare un paio di esempi, all'uso sempre più diffuso della statistica e delle stime probabilistiche che condizionano, spesso in modo distorto, molte nostre scelte. Anche l'uso elementare dell'algebra (o quanto meno quello delle notazioni letterali) è entrato nell'uso corrente, visto che praticamente tutti i programmi al calcolatore (dalla gestione delle scorte di magazzino al calcolo delle buste paga) ne fanno largo uso.

La scuola, istituzione tendenzialmente refrattaria ai cambiamenti, ha dovuto prendere atto della rivoluzione epocale dovuta all'informatica, ma lo ha fatto in modo superficiale. Per esempio, le attività al calcolatore svolte nelle scuole secondarie sotto l'etichetta di «laboratorio di informatica» diventano solo sporadicamente occasioni per ripensare da un punto di vista diverso gli argomenti di matematica «tradizionale» affrontati nelle ore di lezione in classe. Perfino le calcolatrici tascabili sono spesso bandite, altre volte tollerate, quasi mai utilizzate secondo le loro reali potenzialità per impostare diversamente l'insegnamento della matematica.

Il guaio è che i nuovi insegnanti tendono a riproporre gli stessi contenuti e soprattutto a seguire gli stessi metodi utilizzati a suo tempo dai loro vecchi insegnanti, incuranti delle modifiche intervenute nel frattempo nella società, nella tecnologia, nelle professioni. Non deve quindi meravigliare il fatto che le innovazioni, pur se introdotte nei programmi ufficiali, restano spesso lettera morta. Orbene, a livello internazionale esistono migliaia di ricerche didattiche che analizzano nei loro diversi aspetti i problemi delle finalità, dei contenuti e dei metodi di un insegnamento adatto alle giovani generazioni di oggi, nell'intento di trovare un ragionevole punto d'incontro fra le posizioni estreme di chi vorrebbe continuare ad insegnare la matematica in modo tradizionale, nel suo splendido isolamento, col divieto di usare qualsiasi strumento di calcolo, e di chi invece vorrebbe ridurre drasticamente – al limite azzerare – l'insegnamento della matematica classica, per focalizzare l'attenzione sulle sole capacità di usare strumenti e programmi di calcolo commerciali, nel quadro di una concezione utilitaristica della disciplina.

La prima posizione è chiaramente anacronistica e pertanto alla lunga perdente. La seconda posizione rischia di far passare nell'opinione pubblica un messaggio fuorviante del tipo: «la matematica è ormai morta e sostituita dall'informatica» con l'ovvio corollario: «La matematica va abolita come disciplina obbligatoria nella scuola secondaria». Non si tratta di una provocazione estemporanea. A livello internazionale se ne discute vivacemente. Mi limito a citare in proposito il libro [4] scritto con riferimento alla scuola tedesca e ampiamente recensito sulle pagine dello ZDM (vol. 29, fasc. 2, pagg. 36-61). Un segnale preoccupante è dato dal fatto che il messaggio centrale del libro, banalizzato dai mass media, è giunto all'opinione pubblica tedesca come un'indicazione che sette anni di insegnamento obbligatorio della matematica sarebbero più che sufficienti per la formazione di base dei futuri cittadini!

D'altronde, se ci si limita ai soli aspetti grettamente utilitaristici, un po' di ragione la si deve pur dare ai detrattori della matematica obbligatoria in tutti gli indirizzi e per tutta la durata della scuola secondaria. Occorre dunque presentare all'opinione pubblica un'immagine diversa e più positiva della matematica, puntando più decisamente sul suo *valore culturale*, sulla capacità di *modellizzazione e interpretazione del mondo reale*, sull'importanza di una *struttura-*

zione razionale del pensiero e dei *processi di astrazione* (il che è ben diverso dall'imporre definizioni, enunciati e dimostrazioni da imparare acriticamente a memoria).

Il libro [4] e le discussioni che ne sono seguite sullo ZDM sono solo un piccolo esempio delle numerose ricerche dedicate agli aspetti curricolari dell'insegnamento della matematica. Tali ricerche, se fossero meglio conosciute e calate nella realtà scolastica, consentirebbero, se non di formulare un itinerario didattico ideale, obiettivo chiaramente utopico, quanto meno di evitare gli errori pedagogici e didattici più gravi. Esempio emblematico: il fallimento della cosiddetta «matematica moderna» calata dall'alto nelle scuole di mezzo mondo tra il 1960 e il 1970, e violentemente ripudiata pochi anni dopo, con conseguenze negative per l'immagine della matematica, perduranti tutt'oggi nell'opinione pubblica.

Un'ampia documentazione bibliografica di successi e insuccessi, condizioni di fattibilità, pregi e difetti delle varie ipotesi curricolari, utile per chi redige i programmi, per chi scrive libri di testo e soprattutto per chi deve poi trasporli nel proprio insegnamento, nella realtà viva delle classi, si trova nelle sezioni B (*Educational Policy and Educational Systems*) e D (*Education and Instruction in Mathematics*) dello ZDM, e in particolare nelle sottosezioni B 70 (*Syllabuses, curriculum guides, official documents*), e D 30, D 33, D 34 (*Objectives of Mathematics Teaching*, per i diversi livelli scolastici).

TEMA II. – *Come strutturare (a livello universitario) i corsi «di servizio» di matematica per futuri non-matematici (per esempio economisti, architetti, geologi, biologi, medici...)?*

Commento. Qui sono in discussione contenuti e metodi dei corsi universitari, ma le problematiche sono sostanzialmente le stesse già elencate per l'insegnamento di base (cfr. i commenti al tema I). Con un'aggravante: a livello universitario la matematica diventa ancora più astratta e almeno apparentemente più lontana dalle sue applicazioni in contesti extra-matematici.

La complessità del problema di elaborare curricula adatti per i corsi di servizio universitari è evidenziata da un'accesa polemica fra i fautori di due posizioni estreme.

Da un lato c'è chi propende per un insegnamento tradizionale, fatto di definizioni rigorose, teoremi enunciati nella massima generalità, con le rispettive dimostrazioni formali, e con particolare insistenza su esempi «patologici», il tutto senza riferimenti significativi alle discipline che caratterizzano i diversi corsi di laurea.

Sul versante opposto, troviamo i fautori di un insegnamento alternativo, fatto di problemi concreti attinenti alle discipline che caratterizzano i diversi corsi di laurea, con ampio ricorso alle sperimentazioni al calcolatore, e col minimo indispensabile di formalizzazione.

Per chi volesse liquidare frettolosamente questa seconda alternativa, bollandola come «anti-matematica», mi limito a segnalare che uno dei più convinti sostenitori di tale impostazione è D. Mumford (illustre allievo di Zariski, insignito della medaglia Fields per la matematica, già presidente dell'Unione Matematica Internazionale). Rinvio a [7] dove Mumford consiglia addirittura di fare a meno dell'introduzione formale della nozioni di limite con i tradizionali ε e δ nei corsi di «Calculus» per i «Colleges» americani (presumibilmente assimilabili ai corsi di Istituzioni di Matematiche che si terranno a partire dal corrente anno accademico per le lauree triennali italiane, di recentissima istituzione).

Credo che una maggiore conoscenza della polemica che ne è seguita sui *Notices* dell'AMS e in altre sedi, potrebbe essere utile a chi tiene corsi «di servizio» per prendere decisioni ponderate e consapevoli dei vantaggi e dei rischi che possono derivare dalle diverse impostazioni.

Non mi dilungo oltre su questo tema, anche perché il lettore interessato potrà rendersi conto delle mie convinzioni personali sfogliando il libro [13] (mi scuso per l'autocitazione) scritto qualche anno fa e destinato a quelle facoltà e a quei corsi di laurea dove la matematica è poco apprezzata e molto sofferta. Per ulteriori approfondimenti sul dibattito relativo all'insegnamento/apprendimento dell'analisi, rinvio a [1] e [10] e alla bibliografia ivi citata.

Al di là della polemica sul «Calculus Reform Movement» esiste anche nel campo delle problematiche dei corsi «di servizio» una vasta letteratura di ricerca didattica, purtroppo ignorata dalla maggior parte dei matematici che hanno la responsabilità di tali corsi. Le recensioni relative a questi aspetti si trovano sullo ZDM, sezione M (*Mathematical Modelling, Applications of Mathematics*) e più specificamente nelle sottosezioni dedicate all'insegnamento post-secondario: M 15 (*Mathematical modelling, Interdisciplinarity*), M 35 (*Financial mathematics, Insurance mathematics*), M 45 (*Operations research, Economics*), M 55 (*Physics, Engineering, Computer science, Earth sciences*), M 65 (*Biology, Chemistry, Medicine*).

Presumo che, almeno a parole, la stragrande maggioranza dei matematici si dichiara ben convinta del *valore culturale* della matematica, nonché del suo ruolo fondamentale per la *modellizzazione e interpretazione del mondo reale*, e per la *strutturazione razionale del pensiero* e dei *processi di astrazione* (ho citato intenzionalmente, con le stesse parole, gli aspetti già evidenziati nel commento al tema I). Purtroppo non sempre alle parole corrispondono i fatti.

Anche nel nostro paese dobbiamo constatare che la sottovalutazione dell'importanza di un ripensamento contenutistico e metodologico dei corsi «di servizio» genera in molti ambienti accademici un preoccupante atteggiamento di chiusura nei confronti della nostra disciplina; ne consegue in un primo tempo l'estromissione dei matematici dall'insegnamento di tali corsi e in un secondo momento addirittura l'emarginazione o la soppressione dell'insegnamento della matematica.

TEMA III. – *Come strutturare (a livello universitario) i corsi per la preparazione dei futuri insegnanti di matematica della scuola secondaria?*

Commento. Già nel commentare il tema I ho lamentato il fatto che troppo spesso i nuovi insegnanti prendono a modello i loro vecchi insegnanti, senza tenere conto dei mutamenti avvenuti nella società, nella tecnologia, nelle professioni. Circa un secolo fa Felix Klein esprimeva questo stato delle cose dicendo che la grande maggioranza degli insegnanti considerava l'università come una parentesi dopo la quale ritornare alle proprie esperienze di studenti liceali.

Nel mondo (buona ultima l'Italia) sono state recentemente istituite apposite *Scuole di Specializzazione all'Insegnamento Secondario* (brevemente SSIS), che fanno da ponte fra la preparazione universitaria di base e l'immissione nell'insegnamento. In tali scuole di specializzazione si tratta quindi non tanto di far apprendere ulteriore matematica, quanto piuttosto di far ripensare la stessa matematica già appresa al liceo e all'università secondo un'ottica diversa, e di far riflettere gli specializzandi sulle forme più idonee della sua trasmissione alle varie fasce d'età e tipologie degli allievi. L'efficacia delle scuole di specializzazione si basa principalmente su un «tirocinio guidato» nelle scuole secondarie e su attività di «laboratorio» nel corso delle quali i futuri insegnanti hanno l'opportunità di discutere con docenti universitari e secondari ciò che essi osservano nelle classi dove svolgono il tirocinio, di confrontare criticamente libri di testo con impostazioni diverse, di elaborare trattazioni didattiche alternative, di approfondire gli aspetti didattici, pedagogici e sociologici che possono influire sull'apprendimento disciplinare, ecc. C'è quindi una fondata speranza che ciò lasci qualche traccia duratura nella preparazione professionale degli specializzandi ([4]).

Personalmente, ho tenuto nella SSIS Toscana un ciclo di incontri interattivi, a metà strada tra «lezioni» e attività di «laboratorio», nell'intento di problematizzare e ri-contestualizzare le frammentarie conoscenze o reminiscenze liceali e universitarie degli specializzandi. Ho evidenziato i collegamenti fra temi apparentemente slegati e ho coinvolto attivamente l'uditorio con domande provocatorie e riflessioni critiche.

Naturalmente molte mie «provocazioni» sono state viste inizialmente dagli specializzandi come una violazione delle consolidate

([4]) La futura collocazione delle SSIS nel contesto della riforma globale del sistema universitario italiano è tuttora incerta. È auspicabile che gli aspetti positivi di questa esperienza innovativa vengano comunque preservati e valorizzati anche negli anni a venire.

abitudini scolastiche, dove un contratto didattico non scritto impone di evitare domande «imbarazzanti».

Superato lo sconcerto iniziale, ne sono seguite vivaci discussioni tese a collegare tra loro le conoscenze «adulte» che pure gli specializzandi possedevano frammentariamente dai loro studi universitari, e ad inquadrarle in una prospettiva didattica coerente. Mi ha particolarmente colpito il fatto, emerso durante questi scambi di idee, che nessuno dei docenti universitari di cui gli specializzandi avevano seguito i corsi, si era mai preso la briga di esplicitare tali collegamenti. Collegamenti che gli specializzandi non erano poi stati in grado di fare da soli. Ecco un piccolo campionario delle mie domande. Farò seguire ad ogni «provocazione» quella che era la mia «risposta attesa», il che non significa affatto che fosse scontata.

A). *Perché* $1+1$ *fa* 2*? E perché* $2+2$ *fa* 4*?* Risposta attesa: Riflessione sulla convenzionalità dei nomi e dei simboli. Collegamenti con l'assiomatica di Peano.

B). *Nel corso degli studi di matematica si incontra una pluralità di strutture numeriche:* **N** (*naturali*), **Z** (*interi*), **Q** (*razionali*), **R** (*reali*) *e talvolta anche* **C** (*complessi*). *Nella pratica quotidiana si usano invece quasi esclusivamente i numeri decimali finiti.*

In quale contesto didattico andrebbero collocati i numeri decimali finiti? Perché i matematici non li amano, al punto da non avere avvertito la necessità di introdurre una lettera standard (*per es.* **D**) *per denotarli?*

Risposta attesa: I decimali finiti si collocano fra **Z** e **Q**. Non sono amati perché la «finitezza» di una scrittura decimale è legata alla scelta della base del sistema di numerazione. Inoltre **D** non ha una buona struttura moltiplicativa: per esempio l'inverso di un numero decimale finito non è necessariamente un decimale finito.

C). *In matematica si parla, tra l'altro, di numeri interi e di numeri reali. Nel linguaggio informatico* (*per es. in pascal*) *si parla di «integer» e di «real». Quali sono le analogie e le differenze fra interi e «integer»? E fra reali e «real»?*

Risposta attesa: Gli insiemi **Z** ed **R** sono infiniti; il calcolatore invece è in grado di lavorare solo con insiemi finiti, sia pure molto grandi. Ne derivano rilevanti diversità strutturali. Per esempio gli «integer» hanno una struttura ciclica; gli arrotondamenti usati per i calcoli con i «real» fanno sì che in talune situazioni non valgano le proprietà formali delle operazioni (per esempio la proprietà distributiva).

D). *Perché la manipolazione delle espressioni trigonometriche è tanto più difficile di quella delle espressioni polinomiali?*

Risposta attesa: Il *teorema di identità* dei polinomi non si estende alle funzioni trigonometriche: per esempio $\sin^2\theta$ e $1 - \cos^2\theta$ sono espressioni formalmente distinte, che rappresentano la stessa funzione. Non vale neppure la proprietà della *fattorizzazione unica.* Per esempio $\sin^2\theta$ può essere fattorizzato sia come $\sin\theta \cdot \sin\theta$, sia come $(1 - \cos\theta)\cdot(1 + \cos\theta)$. La ragione di fondo sta nel fatto che l'anello dei polinomi in x , y è una struttura libera, a differenza dell'anello delle espressioni polinomiali in $\cos\theta$, $\sin\theta$ ([5]).

E). *Perché il teorema dell'angolo esterno viene dimostrato in molti testi di geometria dapprima in una versione debole* (*in un triangolo, ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti*) *e solo in un secondo tempo nella versione forte* (*in un triangolo, ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti*)?

Risposta attesa: La versione debole è indipendente dal quinto postulato di Euclide (unicità della parallela), quella forte no. Quindi

([5]) Questa diversità strutturale fra l'anello delle funzioni trigonometriche generate da $\cos\theta$, $\sin\theta$ e l'anello dei polinomi in due variabili x, y non è evidenziata né nei corsi di trigonometria delle scuole secondarie, né nei corsi universitari di algebra e di analisi, per cui nell'articolo [9] scritto congiuntamente con Giovanni Prodi abbiamo ritenuto opportuno farne menzione esplicita. Peraltro non mi risulta che l'articolo abbia avuto una qualche ricaduta didattica significativa nelle nostre scuole. Quando va bene, nei corsi universitari di algebra viene presentato l'esempio dell'anello quoziente dell'anello $\boldsymbol{R}[x, y]$ modulo l'ideale generato dal polinomio $x^2 + y^2 - 1$, ma non si menziona affatto l'isomorfismo esistente tra questo anello e l'anello delle espressioni polinomiali in $\cos\theta$, $\sin\theta$. Gli allievi non si rendono conto di questo collegamento e pertanto si limitano ad immagazzinare l'esempio algebrico nella loro memoria a breve termine, destinandolo all'oblio non appena superato l'esame.

la prima versione vale nella geometria assoluta, la seconda solo nella geometria euclidea.

F). *Elencate almeno 5 situazioni afferenti ad ambiti disciplinari diversi, nelle quali interviene la nozione di integrale.*

Risposta attesa: Almeno qualche esempio tratto dalla fisica classica. Invece niente, solo panico diffuso, data la scarsa familiarità degli specializzandi con domande tanto «aperte» e per di più «interdisciplinari». Scarso successo anche dopo avere menzionato, nel corso della discussione, oltre alla fisica, altre discipline come l'astronomia, l'ingegneria, la chimica, la biologia, la geologia, la medicina, l'economia.

Posso comprendere la scarsa propensione per i collegamenti interdisciplinari da parte di chi affronta per la prima volta lo studio di un argomento matematico impegnativo, quale il calcolo differenziale e integrale; ma non certo da parte di chi, come gli allievi delle scuole di specializzazione, aspira ad insegnare «Matematica e Fisica» o «Matematica Applicata». Ed è una ben magra consolazione sapere che i nostri studenti sono in buona compagnia, leggendo in [1], nel paragrafo intitolato *Introdurre nuove sfaccettature in un concetto*, che «se si chiede agli studenti [universitari francesi] di decidere da soli se determinate situazioni in problemi di modellizzazione richiedono l'uso di una procedura di integrazione, essi si trovano completamente in imbarazzo».

Per le informazioni bibliografiche sul tema della preparazione dei futuri insegnanti rinvio alla già citata sezione B (*Educational Policy and Educational Systems*) dello ZDM, e in particolare alla sottosezione B 50 (*Teacher Education*).

TEMA IV. – *Come strutturare* (*a tutti i livelli scolari*) *le prove di verifica e valutazione, in modo tale che esse risultino coerenti con le finalità dell'insegnamento?*

Commento. È esperienza comune che il momento della verifica e della valutazione viene vissuto con un senso di disagio e frustrazione non solo dagli studenti, ma anche dagli insegnanti. D'altra parte è innegabile (e umanamente comprensibile) che gli allievi studino in vista delle interrogazioni, delle prove scritte, degli esami in genere, piuttosto che per un desiderio disinteressato di aumentare la propria cultura. Di conseguenza – piaccia o no – i contenuti e le modalità stabilite per la verifica e la valutazione condizionano pesantemente il tipo di preparazione degli studenti.

Naturalmente chi insegna vorrebbe rovesciare questa ottica: non «far studiare per gli esami» ma piuttosto «strutturare gli esami in modo da riuscire a valutare la preparazione culturale degli studenti negli aspetti ritenuti più qualificanti».

Per esempio: dare minore peso alle abilità tecniche di routine (ormai demandabili ai calcolatori) e viceversa privilegiare prove atte a valutare *la comprensione dei concetti, la progettualità, la capacità di costruire esempi significativi e di interpretare i risultati ottenuti, la confidenza necessaria per applicare la matematica ad altri contesti*, ecc.

Purtroppo si tratta di obiettivi ambiziosi, difficili da raggiungere e ancor più difficili da sottoporre a verifica e valutazione. A riprova di ciò basti riflettere sulla diffusione e sul successo delle lezioni private e di istituzioni come il CEPU. Devo confessare che io stesso, nelle rare occasioni nelle quali non ho potuto esimermi dall'aiutare qualche figlio di amici a superare lo scoglio di una prova di matematica, sia di scuola secondaria che di università, ho contribuito ben poco a migliorarne la cultura matematica e mi sono consapevolmente limitato a individuare la probabile tipologia degli esercizi che il loro docente avrebbe inserito nella prova, e a fornire le «ricette» atte a risolverli. E devo dire, non so bene se con orgoglio per il successo scolastico fatto conseguire con poca fatica, o con vergogna per il fallimento culturale, che in una manciata di ore sono riuscito a raddrizzare situazioni critiche, a volte quasi disperate. Merito mio o non piuttosto segno che le prove che questi allievi dovevano superare erano magari tecnicamente impegnative, ma culturalmente povere e marginali?

Spero di essere riuscito ad evidenziare con le considerazioni precedenti la grande rilevanza di una seria riflessione sui pregi e sui limiti delle diverse modalità delle prove (prove scritte variamente articolate, questionari o test a risposta multipla, interrogazioni orali, lavori di gruppo, tesine, ...).

La rilevanza delle problematiche connesse con la verifica e valutazione è testimoniata anche dal fatto che, all'interno della ricerca didattica generale, queste problematiche si sono a loro volta configurate come una disciplina autonoma: la *docimologia*.

E la matematica è forse la disciplina per la quale le ricerche docimologiche sono le più numerose e approfondite. Per un'estesa panoramica sull'argomento, rinvio allo studio ICMI, in due volumi, [8].

Ecco, al solito, qualche esempio di problematiche particolarmente attuali nel settore, con specifico riferimento alla situazione italiana.

Fino a qualche decennio fa, la prova scritta di matematica alla maturità constava di un unico problema, articolato in numerose domande, strutturate in modo tale che la risposta alla prima fosse il punto di partenza della seconda, e così via. Naturalmente questa tipologia rendeva altamente aleatorio il risultato della prova in quanto il non saper rispondere ad una domanda (o anche un semplice errore di distrazione nei calcoli) comprometteva irrimediabilmente anche le risposte a tutte le domande successive.

Credo che questa struttura delle prove scritte sia ancora in auge per molti esami universitari.

Attualmente invece, almeno per quanto concerne le prove scritte agli Esami di Stato (così è stata ridenominata la maturità) la tendenza va verso l'estremo opposto: assegnare prove sotto forma di test con quesiti a scelta multipla, indipendenti tra loro. Qualora tutto l'esame dovesse ridursi a test di questo tipo, si andrebbe incontro ad un altro inconveniente: gli allievi finirebbero con l'optare per una preparazione frammentaria e prevalentemente mnemonica, a scapito di un allenamento a ragionare autonomamente anche su problemi più complessi. Come al solito, sarebbe opportuno rifuggire dalle soluzioni estreme e seguire una giusta via di mezzo: i test ben strutturati possono essere utili sia per valutare determinati tipi di conoscenze e competenze, sia come strumento di autovalutazione da parte degli allievi. Per altre conoscenze e competenze sono più significativi altri tipi di prove (scritte e orali).

Vale la pena di segnalare in proposito che la moda di valutare esclusivamente mediante test, importata con molto ritardo dagli

USA, è ora soggetta a forti critiche proprio nel paese di origine di questa prassi valutativa.

Per completezza di informazione segnalo che, viceversa, le interrogazioni orali, un tempo bandite dalle scuole dei paesi anglosassoni a causa della difficoltà di trarne giudizi «obiettivi», stanno ora tornando in auge, in forme opportunamente strutturate, in Inghilterra e negli stessi USA.

Quanto detto a commento di questo tema mi sembra sufficiente a testimoniare il fatto che la competenza docimologica, così come ogni altra seria competenza, non si improvvisa, ma è il frutto di uno studio approfondito del problema, con tutte le sue implicazioni didattiche. Lo ZDM dedica alla verifica e alla valutazione, nella già menzionata Sezione D (*Education and Instruction in Mathematics*) varie sottosezioni accomunate dallo stesso titolo (*Achievement control and rating*): D 60 (di carattere generale), D 62 (per gli anni di scolarità – in inglese *grades* – da 1 a 4), D 63 (per gli anni di scolarità da 5 a 10), D 64 (per gli anni di scolarità da 11 a 13), D 65 (per il livello universitario).

3. – Resta ancora molta strada da percorrere....

In [2] l'autrice mette in rilievo la crescita qualitativa e quantitativa delle ricerche in didattica della matematica in ambito mondiale, con specifico riferimento ai contributi dati dai ricercatori italiani. Tutto bene, allora? Non direi, perché purtroppo queste ricerche sono assai poco conosciute dai loro naturali destinatari (in primo luogo i docenti di tutti gli ordini scolastici, dalle scuole materne all'università) ([6]).

Inoltre non sempre tali ricerche sono sufficientemente attente alle «condizioni di fattibilità» indispensabili per poter trasferire fruttuosamente nella realtà viva delle classi le proposte elaborate in altra sede, di solito in situazioni ambientali ben più favorevoli.

([6]) Per una testimonianza diretta, sia pure minima, di questa incomunicabilità, rinvio alla precedente nota ([5]).

La crescita quantitativa del settore ha poi prodotto, o quanto meno evidenziato, vari inconvenienti.

In primo luogo, la progressiva specializzazione e settorializzazione delle ricerche ha determinato una sempre più netta separazione fra i matematici e gli esperti in didattica della matematica. Ancora alla fine dell'800 e all'inizio del '900 la situazione era diversa. Per esempio in Italia matematici di grande prestigio (come i già citati Enriques e Severi, ma anche molti altri, come Betti, Cremona, Peano, Cipolla, Castelnuovo, Vailati, Vitali,...) non disdegnavano di occuparsi con cognizione di causa di problemi di natura didattica, e viceversa chi si occupava di didattica della matematica possedeva in genere anche una solida formazione disciplinare.

Esisteva poi un'osmosi fra scuola secondaria e università. In [5] l'autore cita i nomi di ben trenta docenti italiani che nel periodo compreso fra il 1860 e il 1920 sono passati dall'insegnamento secondario alla cattedra universitaria.

In anni più recenti la situazione si è deteriorata. Basti ricordare la presunzione con la quale Jean Dieudonné e altri esponenti del gruppo Bourbaki hanno di fatto imposto la «matematica moderna» nella scolarità preuniversitaria, senza curarsi delle difficoltà didattiche che un'astrazione troppo precoce avrebbe inevitabilmente causato. Se solo Dieudonné e i suoi colleghi bourbakisti si fossero presi la briga di leggere e meditare quanto era stato già pubblicato al riguardo nel campo della didattica della matematica (a cominciare dal brano di Severi citato nella nota ([3])), forse le cose sarebbero andate diversamente!

Comunque sia, al giorno d'oggi la separazione tra matematici e didattici esiste, per cui sono frequenti, e non sempre ingiustificate, recriminazioni reciproche del tipo:

I matematici ai didattici: «*Voi conoscete troppo poca matematica*»; «*Non c'è bisogno di ricerche specifiche in didattica; basta sapere la matematica e avere un po' di buon senso*».

I didattici ai matematici: «*Voi siete insensibili ai problemi di una efficace trasmissione delle conoscenze matematiche*«; «*Avete la presunzione di atteggiarvi ad esperti di un settore che non conoscete*».

Un secondo inconveniente, imputabile al proliferare delle ricerche didattiche, sta nell'enorme numero dei lavori che vengono pubblicati annualmente rendendo difficile districarsi in una specie di giungla, e discernere i lavori realmente importanti da quelli velleitari o troppo specialistici o viceversa troppo banali o semplicemente divulgativi (temo che anche il presente articolo possa essere fatto rientrare in quest'ultima categoria).

Non ho difficoltà a riconoscere che lo standard qualitativo delle ricerche in didattica della matematica è tuttora mediamente più basso di quello dei lavori di ricerca matematica avanzata. Ma ciò non deve sorprendere, data la lunga tradizione della ricerca matematica, contrapposta alla solo recentissima costituzione della didattica della matematica al ruolo di disciplina. E anche le pubblicazioni a carattere divulgativo hanno una loro ragion d'essere, in quanto mirano a raggiungere il maggior numero possibile di potenziali lettori (preoccupazione, questa, che non tocca gli autori di pubblicazioni di ricerca matematica avanzata).

Infine, segnalo un terzo inconveniente, al quale è particolarmente difficile porre rimedio: i (relativamente pochi) docenti che si interessano alle ricerche in didattica della matematica provano il più delle volte un senso di frustrazione quando si scontrano con l'ostilità più o meno palese di genitori, colleghi e dirigenti scolastici, nel momento in cui tentano di tradurre in pratica, nelle loro classi, un qualunque progetto di innovazione didattica.

Temo che un miglioramento della situazione si potrà avere solo quando gli insegnanti disposti a sobbarcarsi la fatica di un ripensamento critico dei contenuti e dei metodi del loro insegnamento avranno raggiunto un'adeguata «massa critica».

Come recita il titolo del paragrafo, resta dunque ancora molta strada da percorrere...

A mio parere, il primo passo nella direzione giusta dovrebbe essere quello di un riavvicinamento fra il settore matematico e quello della ricerca didattica. Pur mantenendo la loro specificità, i didattici della matematica dovrebbero possedere tutti una solida cultura matematica di base: per insegnare una disciplina, e a maggior ragione per insegnare ad insegnare una disciplina, occorre conoscerla a fondo, vale a dire occorre conoscere assai più di quanto si insegna.

Simmetricamente, tutti coloro che hanno responsabilità di insegnamento in qualunque ordine scolastico dovrebbero rendersi conto che una maggiore attenzione e una migliore conoscenza delle principali ricerche didattiche fa parte integrante dei loro doveri professionali.

Chiudo con una battuta (non mia), rivolta a coloro che vorrebbero espungere il settore delle ricerche didattiche disciplinari dal novero delle discipline universitarie: nessuno mette in discussione il diritto ad istituire cattedre universitarie di etologia (studio del comportamento animale); perché alle ricerche didattiche (studio del comportamento umano in situazioni di insegnamento/apprendimento di una determinata disciplina) non dovrebbe essere riconosciuto almeno lo stesso diritto?

Avevo già terminato la stesura di questo articolo, quando ho letto il contributo di Willi Dörfler [3] (già rettore dell'università di Klagenfurt e mio predecessore nella carica di presidente del «Committee for Education» della European Mathematical Society). I punti di contatto fra il lavoro di Dörfler e il presente articolo sono numerosi, a cominciare dai titoli.

Con riferimento al problema chiave dei rapporti fra matematici e didattici della matematica lascio quindi volentieri la parola a Dörfler (la traduzione dall'inglese, non del tutto letterale, è mia):

«È notorio che fra le comunità dei matematici e dei didattici della matematica ci sono, a parte alcune notevoli eccezioni, pochissimi legami efficienti e mutuamente arricchenti. Indicatori per questa carenza sono a mio avviso specialmente i seguenti:

* La matematica e l'educazione matematica sono abitualmente coltivate in istituzioni separate, senza canali formali di comunicazione tra loro.

* Nella maggior parte delle sedi è fortemente separata anche la formazione di esperti delle due comunità.

* Non vi sono quasi convegni in comune, o iniziative simili, né riviste comuni.

* Gli uni non leggono le pubblicazioni degli altri.

* Prevalgono opinioni e pregiudizi negativi sull'altro ambito e sui

rispettivi esponenti, anche se ciò non viene dichiarato esplicitamente.

* Le caratteristiche dell'altra disciplina sono viste come deficit o debolezze.

[...]»

«La mia posizione – prosegue Dörfler – è quella che si debba prendere atto delle differenze profondamente radicate fra le due comunità dei matematici e dei didattici della matematica, per volgerle in positivo e farle diventare dapprima un tema di riflessione e ricerca e, se possibile, in seguito, una fonte di comprensione reciproca e di sviluppo comune.»

Mi associo ben volentieri a questo auspicio.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. ARTIGUE, *L'insegnamento e l'apprendimento della matematica a livello universitario*, Bollettino UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. III-A, Aprile 2000, 81-103.

[2] M. BARTOLINI BUSSI, *Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani*, Bollettino UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. IV-A, Aprile 2001, 117-150.

[3] W. DÖRFLER, *Mathematics, Mathematics Education and Mathematicians: an Unbalanced Triangle*, ICMI Bulletin n. 49, Dec. 2000, 60-65 (l'ICMI Bulletin è disponibile anche in rete all'indirizzo http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/).

[4] H. W. HEYMANN, *Allgemeinbildung und Mathematik*, Beltz, 1996.

[5] C. MAMMANA, *La storia della didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni*, Boll. Acc. Gioenia, Catania, **25** (1992), 195-210.

[6] J. MASON, *Enquiry in Mathematics and Mathematics Education*, Cap 15 di *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Math Education*, P. Ernest Ed., Falmer Press, 1994.

[7] D. MUMFORD, *Calculus Reform - For the Millions*, AMS Notices, **44**, May 1997, 559-563.

[8] M. NISS, *Investigations into Assessment in Mathematics Education* e *Cases of Assessment in Mathematics Education* (ICMI Study, 2 voll) Kluwer, 1993.

[9] G. PRODI - V. VILLANI, *Anche il calcolo letterale può essere intelligente*. Archimede **34**, n. 4 (1982), 163-173.

[10] A. SCHOENFELD, *Obiettivi e metodi di ricerca in didattica della matematica*, Bollettino UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. III-A, Agosto 2000, 175-199.
[11] F. SEVERI, *La Matematica*, Energie nove, 1919, 196-199.
[12] E. VESENTINI, *Un contributo di Francesco Severi alle riviste di Piero Gobetti*, Archimede 48, n. 2 (1996), 115-121
[13] V. VILLANI, *Matematica per Discipline Bio-Mediche*, McGraw-Hill, 1991.
[14] *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (International Reviews on Mathematical Education)*, FIZ (Karlsruhe).

Vinicio Villani, Dipartimento di Matematica, Via Buonarroti 2,
Università di PISA