Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Claudio Bernardi

Ricerche in Didattica della Matematica e in Matematiche Elementari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2002), n.2, p. 193–213.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_2_193_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. V-A, Agosto 2002, 193-213

Ricerche in Didattica della Matematica e in Matematiche Elementari.

CLAUDIO BERNARDI

Parte I.

La ricerca didattica.

Quasi tutti i docenti universitari di matematica si impegnano con serietà nella loro didattica e hanno a cuore l'insegnamento pre-universitario della matematica. D'altra parte, è tuttavia diffusa una qualche diffidenza verso la ricerca in didattica della matematica: ben vengano persone che tengono i contatti fra Università e Scuola, ben vengano le Scuole di Specializzazione all'Insegnamento Secondario, ma ... che cosa è la ricerca didattica?

La diffidenza, in Italia come all'estero, aumenta quando si scopre non solo che gli «esperti» non hanno ricette pronte per gli insegnanti, ma addirittura che suggerimenti e indicazioni dirette per la pratica didattica non costituiscono l'obiettivo principale («primary business») delle loro ricerche [Sch, p. 177].

Ma allora, *che cosa fa chi si occupa di didattica?*

In questo articolo mi propongo di rispondere alla domanda precedente, nella Parte I con varie considerazioni sviluppate a partire dalla lettura di [Art] e [Sch], nella Parte II con un esempio concreto.

Ringrazio i numerosi colleghi ed amici con cui ho avuto occasione di discutere temi collegati all'argomento qui esposto; ringrazio anche Giovanni Olivieri per avermi segnalato la vignetta riportata in figura 1 e lo studente di filosofia Flavio Zelazek per utili notizie e precisazioni.

In primo luogo, vorrei riprendere un paio di riflessioni dai due articoli citati.

Anche in didattica della matematica, accanto alla ricerca applicata, c'è una *ricerca pura*, o scienza di base [Sch, p. 176]; dopo tutto, l'esistenza di ricerche che prescindono da applicazioni dirette non dovrebbe stupire più di tanto i matematici.

In secondo luogo, come è detto in [Art, p. 85-86], l'apprendimento avviene in modo *non lineare*, sia nel senso che in ciò che oggi sembra acquisito potremo domani riscontrare insicurezze ed errori, sia perché in più momenti è necessaria una ricostruzione di concetti e tecniche note in un nuovo contesto. Parlando di un nuovo contesto, alludo sia al passaggio da un livello scolastico al successivo, che comporta quasi sempre un cambiamento nel «modo di far matematica», sia alle estensioni di concetti, in cui non si conservano tutte le proprietà precedenti e che quindi richiedono, fra l'altro, uno sviluppo degli strumenti di controllo. Si pensi ai numeri e alle operazioni fra di essi: nel passaggio dai naturali agli interi relativi non solo si usano nuovi algoritmi, ma si presentano

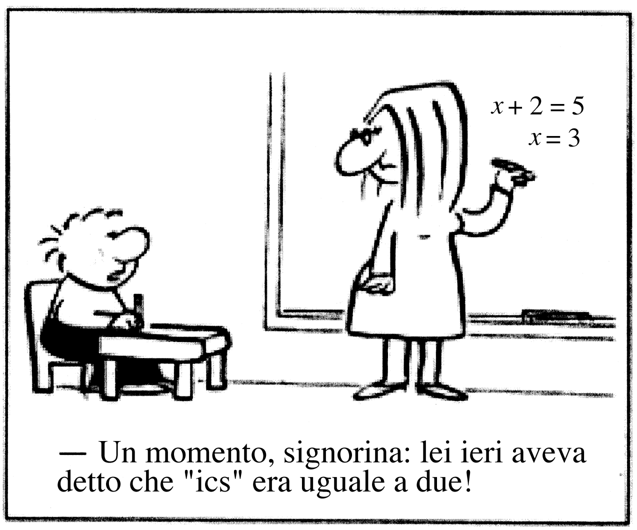

Figura 1. – La vignetta è ripresa da Minirelax del 3/4/2001. Non sempre quello che l'insegnante dà per sottinteso è recepito in modo corretto dagli studenti. E, d'altra parte, non è ragionevolmente possibile (e nemmeno opportuno) dire espressamente tutto.

situazioni nuove (ad esempio, capita che la differenza di due numeri sia maggiore di ciascuno dei due termini).

Proprio per la loro complessità, i processi di apprendimento sono oggetto di molte ricerche. Tali ricerche non conducono a risultati definitivi accettati da tutti, ma, per essere concreto ed esplicito, mostrano quanto siano ingenue e inadatte per la matematica proposte quali la didattica breve o l'insegnamento per moduli indipendenti. E fanno capire che non ha alcun senso che un docente, all'inizio di un nuovo ciclo di studi, dica «dimenticate tutto: si riparte da zero».

Qual è l'approccio migliore?

Per l'insegnamento di alcuni settori matematici sono possibili diversi approcci. Ad esempio, per la geometria euclidea nelle Superiori, a fianco della tradizionale trattazione assiomatica, abbiamo la cosiddetta geometria delle trasformazioni e anche un'impostazione prevalentemente analitica. In questo come in altri casi, il ricercatore in didattica non ha il compito di indicare la strategia ottimale perché tutti gli insegnanti la seguano, ma piuttosto di *rendere esplicite e consapevoli le scelte didattiche* [Sch, p. 180], chiarendo per ognuna di esse i presupposti storici ed epistemologici, le conseguenze (anche in vista di collegamenti con altri settori), gli strumenti di valutazione più idonei, i tempi necessari, ecc. Ciascun insegnante fa con ogni classe la sua scelta; e deve potersi documentare per farla nel modo migliore.

I ricercatori in didattica della matematica si occupano tra l'altro di curricoli scolastici e, per usare la terminologia corrente, cercano di individuare e descrivere nuclei fondanti e aree tematiche, specificando le capacità e le competenze che gli studenti devono acquisire. I ricercatori fanno anche cose più normali, come formulare esempi ed esercizi adatti ai vari approcci, oppure esaminare gli errori più frequenti cercando di capirne le cause.

Personalmente, conferisco grande importanza ad esempi ed esercizi, forse perché non mi attirano le lunghe pagine di esercizi di una medesima tipologia che compaiono in certi libri di testo, o forse solo perché mi diverto ad affrontare un esercizio di matematica. Qualunque sia il motivo, mi rammarico quando vedo un articolo di didattica, magari interessante e scritto bene, ma avaro di esempi. Francamente ritengo che, sotto questo aspetto, neppure i due articoli [Art] e [Sch] siano del tutto soddisfacenti.

Le ricerche su questioni di insegnamento-apprendimento della matematica presentano stretti legami non solo con la pedagogia e la psicologia, ma anche con la sociologia (l'insegnamento avviene in un gruppo) e perfino con le neuro-scienze. Ma perché il discorso non rimanga generico, va sempre reso esplicito il riferimento alla matematica (in effetti, è indicativo che taluni concetti pedagogici siano stati introdotti per la prima volta in ambito matematico); se l'autore esamina diversi problemi matematici, le sue argomentazioni divengono più chiare e convincenti.

Innovazione e sperimentazione.

Tornando al curricolo, vorrei sottolineare la differenza fra due termini che sono talora confusi: *innovazione* e *sperimentazione.* In particolare, i Progetti PNI e Brocca promossi in Italia dal Ministero per le Superiori mi sembrano innovazioni (in gran parte condivisibili), ma non sperimentazioni vere e proprie. Una sperimentazione presuppone che si organizzi un esperimento, a partire da certi dati e per trovare risposte a determinate domande; un'innovazione consiste in una modifica di contenuti e metodi che sembra rispondere meglio alle esigenze attuali.

A proposito di innovazione didattica, mi pare che, fra i criteri citati in [Sch, p. 194], sia molto importante la *riproducibilità.* Talvolta, parlando di didattica, si citano ottimi insegnanti che riescono a coinvolgere attivamente gli studenti. Ebbene, non va confuso il carisma del singolo insegnante (fondamentale quando c'è) con una metodologia didattica oggetto di una ricerca.

Quanto al *rinnovamento dei contenuti*, ho sentito persone (più o meno esperte in didattica) sostenere idee completamente diverse, da «non è importante quello che si fa, ma come lo si fa» a «buttiamo via gli argomenti tradizionali e cerchiamone di nuovi».

Come è spiegato in [Art, p. 101], è ingenuo pensare che ci siano metodi semplici per migliorare l'apprendimento in modo significativo. Non basta introdurre un nuovo argomento (e poco importa che siano gli insiemi, l'informatica, o la matematica discreta) per far sì che, automaticamente, tutti gli studenti si appassionino alla matematica, così come non basta scrivere o adottare un nuovo libro di testo per rendere tutto facile. La ricerca in didattica non si deve muovere lungo queste strade e non deve avere queste prospettive.

Aggiungo che non ho mai creduto troppo nemmeno a ricerche in cui si predispongono classi parallele per confrontare gli esiti di due trattazioni diverse di uno stesso argomento, o di due stili didattici diversi (si vedano le critiche sui gruppi di controllo in [Sch, p. 185]). In un'ottica analoga, ho sempre pensato che sia necessaria un'enorme cautela quando si svolgono indagini internazionali per confrontare l'efficacia dell'insegnamento della matematica in diversi Paesi: periodicamente, troviamo sui giornali titoli vistosi in proposito, ma, per quanto mi risulta, le ricerche che dovrebbero supportarli non sono affidabili ([1]).

Tornando al rinnovamento dei contenuti, negli anni '70 sentivo spesso critiche alla presenza stessa della *geometria* nei programmi di insegnamento: Dieudonné aveva lanciato la sua invettiva «Abbasso Euclide, abbasso i triangoli» nel 1959, ma in Italia (per fortuna!) il discorso era arrivato con un certo ritardo. I tempi sono cambiati, ma vale comunque la pena di porsi la domanda: a che serve l'insegnamento della geometria euclidea? Anche limitandosi agli studenti che proseguono studi matematici, bisogna onestamente riconoscere che, per frequentare l'Università, basta ben poca geometria: essenzialmente, la disuguaglianza triangolare, qualche proprietà elementare dei parallelogrammi, il teorema di Pitagora. Ma è sciocco trarre conclusioni affrettate: in didattica, oltre al punto d'arrivo, interessa il percorso svolto, il complicato processo che porta all'acquisizione del sapere.

([1]) In particolare, non ho trovato risposte chiare e convincenti a domande come: si confrontano studenti della stessa età o con lo stesso numero di anni di scolarità? Quali contenuti vanno esaminati, visto che i programmi scolastici variano da Paese a Paese? Quale incidenza ha sui risultati la maggiore o minore abitudine ai test a risposta multipla da parte degli studenti?

Proprio questo punto rende così faticoso il recupero degli studenti in difficoltà: una carenza in un contenuto si colma, una lacuna in un processo formativo richiede ben altri tempi.

Flessibilità e motivazioni.

Vorrei soffermarmi ora brevemente su due punti tratti da [Art]. Parlare di *flessibilità fra registri di rappresentazione semiotica* (p. 96) probabilmente sconcerta diversi lettori. Ma il discorso è, a mio parere, molto concreto. Nell'insegnamento della matematica si propongono fin dai primi anni schemi, figure, diagrammi. Ad esempio, si costruiscono schemi per introdurre e giustificare i procedimenti risolutivi delle equazioni di I grado, i sistemi algebrici si interpretano con figure geometriche, i concetti di proporzionalità diretta e inversa vengono illustrati con grafici.

All'inizio, schemi, figure e diagrammi non sono d'aiuto per la maggioranza degli studenti, anzi costituiscono *una difficoltà in più.* La *flessibilità* fra diversi punti di vista è una conquista importantissima, ma faticosa. Io non credo all'unità di tutta la matematica: in particolare, in algebra e in geometria si usano metodi e strumenti concettualmente diversi. Per questo stabilire un legame fra algebra e geometria è così importante, proprio perché la stessa situazione si può allora esaminare con due approcci diversi.

Tornando a schemi e rappresentazioni, è fuori discussione che questi aiutano a memorizzare, e quindi rendono la comprensione più profonda e duratura. Ma non è immediato capire il legame fra lo schema e quanto viene rappresentato: i vari tipi di schema vanno proposti al momento giusto, senza fretta, e poi ripresi sistematicamente. Rimando a [Be] per alcune questioni collegate.

Un discorso analogo si riferisce alle applicazioni dei concetti che si studiano. In un problema posto in [Art, p. 89] si chiede di determinare la forza di attrazione fra due masse; quasi nessuno degli studenti si accorge che si deve ricorrere ad un integrale. A che serve, allora, studiare tanti teoremi e fare tanti esercizi di Analisi, se poi non si sa applicare quanto studiato? È meglio – sostiene Artigue – esaminare a priori varie situazioni «per fare del processo d'integrazione uno strumento esplicito», e solo in un secondo tempo «sviluppare la nozione d'integrale come oggetto matematico».

Su questo punto mi trovo in disaccordo. Io non ritengo necessario partire dalle applicazioni, e non mi scandalizzo di fronte ad uno studente che sa tutto sugli integrali ma non riesce ancora a riconoscere le situazioni fisiche in cui è necessario calcolare un integrale. Ci sono diverse tappe nell'apprendimento. Lo sforzo di motivare *a priori* un concetto o una tecnica non è sempre apprezzato dagli studenti, perché ben raramente contribuisce a chiarire quanto si sta illustrando per la prima volta, mentre spesso si traduce in una difficoltà in più.

Inoltre, l'idea che si debba *partire* dalle applicazioni mi pare sbagliata sul piano epistemologico: nel caso in questione, la teoria dell'integrazione, utilissima in fisica, ha per altro un suo valore matematico autonomo. Questo non toglie che, pensando al punto d'*arrivo*, la conoscenza e l'apprezzamento di applicazioni serie e significative siano opportuni, e migliorino al tempo stesso la comprensione della teoria matematica soggiacente.

Le tabelline e le calcolatrici.

Naturalmente, sono fermamente convinto che le tabelline vadano studiate a memoria, anche oggi che disponiamo di calcolatrici piccole, rapide, potenti. Mi limito ad un'osservazione. Per un bambino le varie tabelline non presentano lo stesso grado di difficoltà: si imparano facilmente le tabelline del 2 e del 5, anche per il 9 si scopre in fretta il trucco, mentre la più ostica penso sia la tabellina del 7. Ebbene, questa semplice constatazione mostra che, imparando le tabelline, il bambino sviluppa la capacità sia di cogliere regolarità, sia di applicarle in modo da alleggerire lo sforzo mnemonico.

Il ruolo della memoria si ripropone in vari momenti successivi, ad esempio nello studio del calcolo algebrico. Da un lato lo studente deve acquisire automatismi di calcolo (che, al di là degli aspetti pratici, contribuiscono a formare una struttura mentale), d'altro lato vanno evitate manipolazioni algebriche inconsapevoli (quante volte uno studente fa un passaggio algebrico totalmente inutile solo perché lo sa fare!).

Il discorso è attuale per la presenza di calcolatrici grafiche e simboliche. Il problema non è se consentirne l'uso o proibirlo, ma delineare un curricolo che favorisca un uso consapevole della calcolatrice, predisponendo esercizi e prove di valutazione adeguate.

Il docente universitario e la didattica.

Dicevo all'inizio che ogni docente universitario si occupa di didattica; talvolta persone di indubbia cultura intervengono in dibattiti sulla Scuola. Purtroppo, non sempre c'è una solida preparazione al riguardo. Tipico è il riferimento ad esperienze personali, o ancor peggio dei figli, per sostenere idee generali. (Mi permetto una provocazione rivolta a coloro che provano a fare esperimenti in famiglia: per sperimentare progetti didattici innovativi, invece dei vostri figli, coinvolgete i figli delle vostre colf.)

Ugualmente tipica è la lamentela della maggioranza dei docenti universitari perché gli studenti che escono dalle Superiori mostrano scarsa sicurezza nel calcolo. A ben pensarci, si tratta della richiesta più prevedibile e meno profonda che ogni docente rivolge a chi insegna al precedente livello scolare.

Intendiamoci. Non ha torto il professore che, all'inizio della Scuola Media, vorrebbe alunni che sanno fare con agilità operazioni fra numeri naturali; così come non ha torto il professore che, all'inizio delle Superiori, vorrebbe studenti che hanno familiarità con il calcolo frazionario. Ma talvolta ho l'impressione che la sicurezza nel calcolo sia vista come il requisito principale, se non l'unico, necessario per affrontare i nuovi argomenti di matematica. E questo non corrisponde alla *mia* visione della matematica.

Mi permetto di suggerire un esercizio a tutti i docenti. Si assegna un test a risposta multipla (ad esempio con 5 alternative), con domande molto semplici, non attinenti gli ultimi argomenti visti a lezione, ma quei concetti e quei teoremi che sembra ragionevole dare per scontati quando si incontrano. Poi, prima della correzione, si fa una previsione sul risultato, cioè si indica la percentuale degli studenti che si prevede risponda correttamente ad ogni singola domanda (rimando ad [Ac] per un'esposizione dettagliata di un esperimento condotto secondo queste linee in varie Università Italiane).

Ritengo che l'esercizio sia utile perché raramente un docente universitario conosce l'effettiva situazione dei suoi discenti. In realtà, nell'insegnamento universitario, specie negli anni successivi al primo, il contratto didattico [Art, p. 84] è ormai chiaro, e in questo senso il rendimento reale è molto inferiore a quello che i docenti credono.

Per inciso, aggiungo che, personalmente, non sono contrario ai «quiz»: dopo tutto, in ogni momento di un processo di risoluzione si sceglie fra un numero finito di alternative.

Parte II.

La dimostrazione per assurdo.

Un settore di ricerca non citato in [Art] e in [Sch], ma in cui l'Italia vanta una certa tradizione, si raccoglie sotto il nome di *Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore.* Il nome risale a Felix Klein che tenne un corso con questo titolo per la prima volta nel 1908.

Il settore presenta un notevole interesse teorico, perché molti argomenti matematici, che pure si studiano nella scuola primaria e secondaria, presentano aspetti non banali. Basta pensare all'uguaglianza (o congruenza) di figure piane, o al concetto di numero naturale, per rendersi subito conto che alla chiarezza intuitiva ed operativa di certe idee non corrisponde un facile inquadramento rigoroso.

Qui mi propongo di sviluppare un esempio, esponendo alcune riflessioni sulla *dimostrazione per assurdo* (detta anche *riduzione all'assurdo*). Non distinguerò fra dimostrazione per assurdo propriamente detta (se da p segue una contraddizione, allora è lecito dedurre $\neg p$) e dimostrazione indiretta (se da $\neg p$ segue una contraddizione, allora è lecito dedurre p); quest'ultimo ragionamento non è accettato nell'intuizionismo, dove in generale $\neg\neg p$ non equivale a p.

Non nascondo un certo imbarazzo, perché quanto mi accingo a dire si presta a diverse critiche. I logici rileveranno che la situazione dipende dalla logica usata (ma quale matematico specifica la logica in cui si muove?); qualcuno troverà banali le mie osservazioni, mentre altri le riterranno inutili bizantinerie, e altri ancora (forse in maggioranza) resteranno poco convinti.

Premetto che, da un punto di vista storico, la dimostrazione per assurdo pare risalire a Zenone di Elea, lo stesso dei celebri paradossi (V sec. a.C.).

Nei paragrafi seguenti, rimarrò nell'ambito delle Matematiche Elementari, senza occuparmi degli aspetti didattici. Riporto qui una sola osservazione didattica. Negli ultimi anni sono state condotte interessanti ricerche sulla dimostrazione (si vedano, ad esempio, gli articoli citati in [Pr]); in particolare, l'uso di software geometrico sembra offrire un aiuto per affrontare le prime dimostrazioni e per comprendere l'idea stessa di dimostrazione. Ora, nel caso di dimostrazioni per assurdo, il ricorso a quegli stessi software è meno efficace o, quanto meno, richiede un'impostazione specifica: come si disegna con precisione una figura che si vuole dimostrare essere scorretta?

Le convinzioni dei neo-laureati.

Nella seconda prova scritta per l'ammissione alla SSIS, assegnata nel Lazio nel 2000, si chiedeva di *spiegare in che cosa consiste una dimostrazione per assurdo e fornire un esempio.* C'era una certa libertà di scelta fra diverse domande, ma quasi tutti i candidati hanno affrontato l'argomento citato. Una buona parte l'ha svolto in maniera sufficiente, ma pochissimi in modo davvero corretto.

La cosa che più m'interessa sottolineare fin d'ora è che, in molti compiti, *l'esempio scelto* di dimostrazione per assurdo *non rientrava nella struttura generale* descritta immediatamente prima. Come dire: anche in un contesto matematico capita che *alcune convinzioni siano così forti da non essere controllate.*

Che cos'è la tesi di un teorema?

Per dimostrare un teorema per assurdo si parte dalla negazione della tesi e si cerca di dedurne una contraddizione. Questo, almeno, si leggeva in gran parte degli elaborati degli aspiranti alla SSIS.

Ma il termine «tesi» è ambiguo. Talvolta è inteso come sinonimo di enunciato, ma quasi sempre la parola *tesi* è legata ad *ipotesi.* Molti hanno appunto iniziato distinguendo, nell'enunciato di un teorema, ipotesi e tesi, e spiegando che una dimostrazione per assurdo consiste nel negare la tesi e nel dedurne la negazione dell'ipotesi. In altre parole, dimostrare per assurdo un enunciato significa dimostrarne la contronominale.

Fra gli esempi di dimostrazioni per assurdo, uno dei più frequenti si riferiva al teorema che afferma che $\sqrt{2}$ non è razionale o, detto meglio, che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2. In proposito, a livello elementare sono diffuse due dimostrazioni, lievemente diverse, entrambe per assurdo:

a) Se $(m/n)^2 = 2$, allora avremmo $m^2 = 2n^2$, il che è impossibile perché il fattore 2 comparirebbe con esponente pari nel primo membro e con esponente dispari nel secondo membro.

b) Assumiamo, come è lecito, che m ed n siano primi fra loro. L'uguaglianza $m^2 = 2n^2$ porta alla conclusione che ogni fattore di n è anche fattore di m, per cui $n = 1$; quindi $m^2 = 2$, il che si esclude senza difficoltà.

Tutt'e due le dimostrazioni presuppongono la scomposizione in fattori primi e, di conseguenza, il principio di induzione; a rigore, il principio di induzione si applica anche quando si assume che m ed n sono primi fra loro.

Segnalo, a titolo di curiosità, un'elegante dimostrazione geometrica di T. M. Apostol, sempre per assurdo, pubblicata di recente ([Ap]). Per assurdo, sia *ABC* un triangolo rettangolo isoscele con i lati di lunghezza intera (figura 2); con la costruzione in figura (dove *TE* è tangente alla circonferenza di centro *B* e raggio *BA*) si trova un altro triangolo rettangolo isoscele *CET*, più piccolo di *ABC.* Anche i lati di *CET* hanno lunghezza intera: infatti, $CT = TE = EA$ è uguale alla differenza fra l'ipotenusa e un cateto del triangolo iniziale, mentre *CE* è la differenza fra *CA* ed *EA*. Applicando il principio

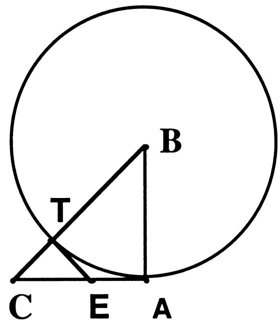

Figura 2. – Dimostrazione geometrica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

della discesa infinita (che equivale al principio di induzione), otteniamo l'asserto.

Tornando alle dimostrazioni classiche, basta un attimo di riflessione per rendersi conto che nei due ragionamenti citati *non si arriva alla negazione dell'ipotesi,* ma ad una contraddizione con teoremi precedenti.

Anzi, nell'enunciato in questione è dubbio che ci sia un'ipotesi. È fuori discussione l'importanza nell'insegnamento secondario della distinzione fra ipotesi e tesi, ma raramente si aggiunge in modo esplicito che non tutti gli enunciati che si dimostrano sono del tipo $p \Rightarrow q$. Basta pensare, ad esempio, a «esistono due rette sghembe» (in geometria dello spazio), oppure a «per ogni insieme X, la cardinalità di $P(X)$, insieme delle parti di X, è maggiore della cardinalità di X» (in teoria degli insiemi).

Si può obiettare che, nel nostro caso, abbiamo a che fare con un'implicazione, perché si tratta di dimostrare che $\forall x\ (x \in Q \Rightarrow x^2 \neq 2)$. Questo è corretto su un piano strettamente formale, ma discutibile sul piano sostanziale, perché, almeno a mio parere, è più naturale scrivere $\neg \exists x\ (x \in Q \wedge x^2 = 2)$.

Segnalo un possibile criterio per scegliere fra due formalizzazioni di uno stesso enunciato, qualora una sola di queste sia di tipo implicativo: va privilegiata l'implicazione quando appare ragionevole porsi il problema se vale o no l'implicazione inversa. Nel caso in esame, credo che nessuno, quando spiega l'argomento, ritenga opportuno aggiungere un controesempio per mostrare che non vale l'implicazione $\forall x\ (x^2 \neq 2 \Rightarrow x \in Q)$.

Del resto, ogni enunciato p si può esprimere con un'implicazione, perché p equivale ad $(x = x) \Rightarrow p$, ma non ha molto senso allungare artificiosamente un enunciato.

I dizionari di matematica.

Ho consultato alcuni dei più diffusi dizionari di matematica. Anche testi abbastanza affidabili ripetono l'errore commesso dagli specializzandi della SSIS, e cioè limitano la dimostrazione per assurdo al caso particolare in cui si sostituisce ad un'implicazione $p \Rightarrow q$ la sua contronominale $\neg q \Rightarrow \neg p$, quasi che l'assurdo si possa ottenere esclusivamente contraddicendo l'ipotesi.

Un testo corretto è naturalmente [EDM], che tuttavia dice solo: «The validity of a proof by reductio ad absurdum lies in the fact that $(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$ is a tautology», e poi aggiunge una precisazione sul «discharge of double negation».

Fra i dizionari disponibili in italiano, uno dei migliori è [Ba], che dà la seguente spiegazione: «Si prova che una proposizione è vera dimostrando che, se non lo fosse, si arriverebbe ad una conseguenza falsa.» Il discorso è sostanzialmente corretto, anche se, a rigore, la distinzione vero/falso ha carattere semantico, mentre una dimostrazione si svolge a livello sintattico. Tuttavia, lo stesso testo si affretta a segnalare il caso della contronominale, prosegue con una distinzione non necessaria, e ripropone erroneamente l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ come esempio di *consequentia mirabilis* (di cui parlerò nel seguito).

Altri esempi.

Vale la pena di esaminare altre dimostrazioni per assurdo, distinguendo varie possibilità di arrivare alla contraddizione; farò riferimento solo a teoremi classici e alle dimostrazioni consuete.

In primo luogo, anche limitandosi a dimostrazioni per assurdo di enunciati del tipo $p \Rightarrow q$, non sempre l'assurdo nasce da una contraddizione con l'ipotesi. Ad esempio, per dimostrare nel piano euclideo che «se una retta a è parallela ad una retta b e b è parallela ad una retta c, allora a è parallela a c», si procede così: a e c, se non fossero parallele, sarebbero due rette distinte incidenti in un punto P, e allora per P passerebbero due distinte rette parallele a b. Si ha, cioè, *una contraddizione con un assioma.*

All'inizio dell'analisi si dimostra per assurdo il teorema di *unicità del limite* di una funzione f in uno spazio metrico o, più in generale, T_2. È ragionevole assumere come ipotesi che L ed M siano due limiti della funzione per $x \to x_0$ e come tesi $L = M$. Supponendo $L \neq M$, con un semplice ragionamento in cui si sfruttano le ipotesi, si conclude che $f(x)$, per opportuni valori di x, dovrebbe appartenere all'insieme vuoto. Su un piano formale, il riconoscimento di ipotesi e tesi non è univoco, ma è arduo sostenere che siamo arrivati alla negazione dell'ipotesi. Abbiamo invece trovato, come conseguenza della negazione della tesi, *due fatti fra loro incompatibili* ($f(x)$ appartiene ad un certo intorno ed $f(x)$ non appartiene allo stesso intorno).

Nel celebre teorema di Brouwer si dimostra l'esistenza di un punto fisso per ogni funzione continua del cerchio in sé: la dimostrazione usuale è condotta per assurdo e, dunque, non è costruttiva. L'assurdo nasce da *una contraddizione con un teorema precedente*, secondo cui non esiste una retrazione dal cerchio alla circonferenza.

Esaminiamo un caso in cui si ha effettivamente una *contraddizione con una delle ipotesi.* Dopo aver dimostrato che, fra numeri positivi, «$a < b \Rightarrow ac < bc$», si deduce il teorema inverso «$ac < bc \Rightarrow a < b$» procedendo per assurdo. Se, infatti, non fosse $a < b$, avremmo $a = b$ oppure $a > b$, da cui segue immediatamente una contraddizione con l'ipotesi.

Questo schema (se p_0, p_1, p_2, … sono situazioni fra loro incompatibili e che esauriscono tutte le possibilità, se per ogni i valgono i teoremi $p_i \Rightarrow q_i$ e se anche q_i sono fra loro incompatibili, allora valgono tutti i teoremi inversi) era indicato in taluni testi classici come *seconda legge delle inverse*; la situazione è interessante perché si ricorre al teorema diretto nella dimostrazione del teorema inverso.

Un ultimo caso, particolarmente elegante, di dimostrazione per assurdo è la *consequentia mirabilis* (rimando a [BP] per un inquadramento teorico e notizie storiche): si nega l'enunciato e si trova *una contraddizione proprio con la negazione assunta.* In altre parole, se si dimostra che da $\neg p$ segue p, allora si conclude p. Riprendendo un'efficace espressione di Gerolamo Saccheri, per ottenere p si dimostra che $\neg p$ «distrugge sé stessa». In termini meno intuitivi: per dimostrare un enunciato è lecito assumerne la negazione come ipotesi aggiuntiva!

Vediamo, come esempio, un possibile modo di presentare il paradosso di Russell. Posto $R = \{X/X \notin X\}$, ci proponiamo di dimostrare che $R \in R$. Se per assurdo accettiamo $R \notin R$, proprio da questa relazione deduciamo che R soddisfa la proprietà caratteristica di R, e pertanto $R \in R$. Quindi $R \in R$. In modo del tutto analogo si dimostra poi anche $R \notin R$; e dunque si ha il paradosso.

Riassumendo.

Cerco di riassumere quanto visto fino a questo punto.

La dimostrazione per assurdo di un enunciato p consiste nel dimostrare che da $\neg p$ segue una contraddizione: in tali condizioni, infatti, è lecito dedurre p per il principio del terzo escluso (se $\neg p$ non è accettabile, non resta che concludere p) (2).

Si ottiene l'assurdo quando si arriva:

– o ad una contraddizione con un assioma

– o a due fatti fra loro incompatibili

– o ad una contraddizione con un teorema precedente

– o ad una contraddizione con una delle ipotesi specifiche dell'enunciato

– o ad una contraddizione proprio con la negazione assunta.

La distinzione fra i vari casi nella classificazione precedente non è sempre netta (ad esempio, in logica matematica un assioma è visto come un particolare teorema). Aggiungo una precisazione sul penultimo caso, in cui si ha a che fare con un enunciato del tipo $p \Rightarrow q$: in

(2) Questa «definizione» di dimostrazione per assurdo è più concisa delle spiegazioni riportate nella maggioranza degli elaborati dei candidati alla SSIS. Personalmente, ritengo che la *brevità* non sia affatto contrapposta alla *chiarezza.* In particolare, nella stesura del presente articolo, ho cercato di scrivere dimostrazioni brevi dei vari teoremi considerati.

tal caso può rimanere il dubbio se si deve negare tutto l'enunciato o solo la tesi q dell'implicazione. Ora, negare l'enunciato significa assumere $\neg(p \Rightarrow q)$, il che equivale a $p \wedge \neg q$. Ne segue che la negazione dell'implicazione coincide con la negazione della tesi, ferma restando l'ipotesi.

Applicazioni «ridondanti».

Molte dimostrazioni di unicità sono presentate per assurdo, ma il discorso non è sempre convincente. Pensiamo all'*unicità dell'elemento neutro* di un'operazione binaria. Se a e b sono elementi neutri, allora $a = ab = b$. C'è una differenza sostanziale rispetto al caso dell'unicità del limite: là avevamo effettivamente sfruttato che $L \neq M$ per trovare due intorni disgiunti. Qui, il fatto che $a \neq b$ non serve, e la dimostrazione, in realtà, non è condotta per assurdo.

Perché, allora, molti testi parlano di dimostrazione per assurdo? Forse c'è un'esigenza didattica, inconsapevole e per altro discutibile: presentando il ragionamento per assurdo, si supera la difficoltà psicologica legata al fatto che due lettere diverse possono indicare uno stesso elemento. Le lettere a e b sono *due* simboli distinti a livello sintattico, e gli studenti meno sicuri rimangono talvolta incerti quando le loro interpretazioni coincidono. Lo stesso Hilbert, all'inizio dei *Fondamenti della Geometria*, afferma che, quando parla di due o più punti A, B, ..., «si deve sempre intendere punti distinti». Questa precisazione è giustamente sparita nei testi attuali, ma forse, in qualche misura, è rimasta a livello psicologico.

Vediamo altri due casi in cui la dimostrazione per assurdo è superflua.

«Esistono infiniti numeri primi» (anche questo enunciato non è sotto forma di implicazione). Pensando al classico procedimento di Euclide, si inizia dicendo: «Supponiamo per assurdo che ...».

Ma che cosa significa *infiniti* numeri primi? Ci sono varie traduzioni formali; la più semplice mi pare «per ogni n esiste un numero primo p maggiore di n». La dimostrazione (non per assurdo) si esaurisce in poche parole: un qualunque fattore primo di $n! + 1$ è maggiore di n.

Formalizzazioni alternative dell'enunciato si ottengono affermando che l'insieme dei numeri primi è infinito secondo Dedekind; oppure che, per ogni $n \in N$, ogni funzione dall'insieme $\{0, 1, \ldots, n\}$ all'insieme dei numeri primi non è suriettiva (direi che quest'ultimo enunciato sia la traduzione più fedele della Proposizione 30 del Libro IX di Euclide). In nessuno dei due casi è utile una dimostrazione per assurdo.

«R non è numerabile», cioè per ogni successione di numeri reali esiste un numero reale che non compare nella successione. Usualmente, si procede per assurdo: si suppone che esista una successione che esaurisce i numeri reali, ma questo fatto *non* si sfrutta nel seguito. Basta togliere la prima riga della dimostrazione e il ragionamento, non più per assurdo, funziona perfettamente.

	a	b	c	d	e	...
a	**1**	0	0	1	1	...
b	0	**0**	0	0	0	...
c	0	0	**1**	0	0	...
d	1	1	1	**1**	1	...
e	0	0	0	0	**0**	...
			...			

Figura 3. – Lo schema illustra una funzione f da un insieme $X = \{a, b, c, d, e, \ldots\}$ all'insieme $P(X)$: in ogni riga è indicata la funzione caratteristica dell'insieme corrispondente all'elemento scritto sulla sinistra. Ad esempio si ha: $f(a) = \{a, d, e, \ldots\}$, $f(b) = f(e) = \varnothing$, $f(c) = \{c\}$, $f(d) = X$. Per costruire un sottoinsieme di X non appartenente ad $\mathrm{Im} f$, basta modificare la «diagonale principale», scrivendo 0 se compare 1 e viceversa: si ottiene così $(0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$, cioè l'insieme $\{b, e, \ldots\}$. L'analogia con la dimostrazione della non numerabilità dei reali è evidente. Si noti che, visto che si parla solo della «diagonale principale», non è necessario che l'insieme X sia ordinato.

La dimostrazione della non numerabilità di R, salvo qualche complicazione legata al periodo 9, è la «stessa» del teorema di Cantor prima citato, secondo cui per ogni X non c'è alcuna funzione suriettiva da X a $P(X)$. In entrambi i casi, si parte da una funzione f e si costruisce uno $z \notin \operatorname{Im} f$: non c'è motivo di supporre all'inizio che f sia suriettiva. L'analogia fra i due procedimenti risulta chiara se da un lato si pensano gli elementi di $P(X)$ come funzioni caratteristiche, e cioè come sequenze di 0 ed 1 (si veda lo schema illustrato in figura 3), dall'altro si scrivono i numeri reali in notazione binaria: in effetti, trascurando il caso dei «decimali» limitati che ammettono una doppia scrittura, l'intervallo $[0; 1]$ è isomorfo a 2^N, che a sua volta è isomorfo a $P(N)$.

Che cos'è l'ipotesi di un teorema?

Credo sia opportuna, prima di concludere l'argomento, una breve digressione su una questione strettamente collegata alle precedenti: che cos'è l'ipotesi di un teorema?

In primo luogo, vorrei osservare che la maggioranza degli enunciati che si trovano nelle usuali trattazioni matematiche (a tutti i livelli) è sotto forma di implicazione. Questo è un dato di fatto, ma non riguarda le teorie in sé, ma il modo in cui la comunità matematica le presenta; in altre parole, si tratta di una scelta didattica ed epistemologica, più che di una caratteristica degli enunciati. Il discorso non si riferisce esclusivamente ai teoremi, ma a tutti gli enunciati che riteniamo interessanti, dagli assiomi alle congetture.

Se l'enunciato è un'implicazione, cioè è del tipo $p \Rightarrow q$, c'è l'ipotesi p, che può essere una congiunzione di più condizioni. Se l'enunciato non è un'implicazione, non c'è alcuna ipotesi.

Si potrebbe obiettare che, in un certo senso, la teoria in cui si lavora funge da ipotesi per un qualunque teorema di quella teoria. Questo non mi pare corretto. In una teoria ci sono assiomi (che possono anche essere in numero infinito), mentre l'ipotesi è una precisa parte del singolo enunciato. Del resto, quando si parla di teorema inverso, ci si riferisce allo scambio fra ipotesi e tesi, non si pretende di ritrovare tutti gli assiomi a partire da un singolo enunciato.

Da un punto di vista non troppo diverso, si tratta di chiarire la differenza fra *implicazione* e *deduzione*. Un'implicazione è una singola espressione della teoria, mentre una deduzione collega fra loro più enunciati. Quando si dimostra un teorema (non importa se difficile o banale), non si rimane all'interno di un unico enunciato, ma si opera una deduzione, applicando le *regole di deduzione o inferenza*. È facile fare confusione fra implicazione e regole di deduzione, perché l'implicazione gioca un ruolo molto importante nelle deduzioni; in effetti, la regola di deduzione più famosa è il *modus ponens*: da p e $p \Rightarrow q$ segue q. Ma ci sono altre regole di deduzione in cui non compare l'implicazione, come da $p \wedge q$ si deduce p, oppure da $\forall x A(x)$ si deduce $A(t)$, dove t denota un qualsiasi elemento.

Da un punto di vista tecnico, un'impostazione chiara dell'argomento si trova nella deduzione naturale, dove si precisano le regole che coinvolgono ogni connettivo e quantificatore (in proposito, sono stati fatti anche tentativi d'introduzione nelle Superiori).

Segnalo il divertente brano [Ca] di Lewis Carroll sulla necessità delle regole di deduzione, che non possono essere rimpiazzate da implicazioni.

Aggiungo qualche altro esempio, premettendo che, in generale, la traduzione in un linguaggio formale aiuta a chiarire la struttura logica dei vari enunciati.

»Ogni multiplo di 4 è pari». Il linguaggio naturale nasconde un'implicazione: per ogni x, se x gode della proprietà A, allora x gode della proprietà B. Ha senso porsi il problema se vale l'implicazione inversa.

«2+2=4» Questa volta non c'è alcuna ipotesi né un ragionevole teorema inverso. Ho scelto un enunciato banale, ma non è difficile pensare ad un enunciato con la stessa struttura che coinvolga un'operazione e termini più complicati.

«Ogni triangolo è inscrivibile in un cerchio» In questo caso direi che, contrariamente alle apparenze, c'è un'ipotesi. Infatti, per tradurre l'enunciato in un linguaggio formale diventa abbastanza spontaneo pensare a una frase del tipo «se tre punti A, B, C non sono allineati, allora c'è un punto che ha la stessa distanza da A, B, C». Ha senso parlare di implicazione inversa, che è a sua volta un teorema, salvo la precisazione che i tre punti devono essere distinti.

Un commento finale.

Nei vari corsi universitari, i docenti applicano lo schema di dimostrazione per assurdo con consuetudine e sicurezza, ma pochissimi neo-laureati sono in grado di chiarirne il significato in modo esauriente. Questo dipende anche dal fatto che i docenti universitari raramente spiegano in che cosa consiste un ragionamento per assurdo. Forse ne danno per scontata la conoscenza, o forse, a livello di regole logiche, anche i migliori docenti si limitano ad un apprendimento per imitazione («si fa così»), seguendo una metodologia che pure tutti ritengono inadeguata nell'insegnamento della matematica.

BIBLIOGRAFIA

[Ac] G. ACCASCINA e altri, *La strage degli innocenti. Problemi di raccordo in matematica tra scuola e università*, Quaderni del Centro Morin, Battagin, 1998.

[Ap] T. M. APOSTOL, *Irrationality of The Square Root of Two - A Geometrical Proof*, The American Mathematical Monthly, **107** (2000), 841.

[Art] M. ARTIGUE, *L'insegnamento e l'apprendimento della matematica a livello universitario*, Bollettino UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. III-A, (Aprile 2000), 81-103 [trad. it. di *The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level*, Notices of the AMS, **46** (1999), 1377-1385].

[Ba] S. BARUK, *Dizionario di Matematica Elementare* (ediz. ital. a cura di F. Speranza e L. Grugnetti), Zanichelli, Bologna 1998.

[Be] C. BERNARDI, *«How formal should a proof be in teaching mathematics?»*, in *«La Logique dans l'Enseignement des Mathématiques»*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, suppl. vol. **5**, n. 5 (1998), 7-18.

[BP] F. BELLISSIMA - P. PAGLI, *Consequentia mirabilis*, Leo S. Olschki Editore, Firenze 1996.

[Ca] L. CARROLL, *What the Tartoise said to Achilles*, Mind, n. s., 4 (aprile 1895), pag. 278-280; trad. ital.: *Quello che la Tartaruga disse ad Achille*, Notizie di Logica, anno I, n. 1 (1982), pag. 23-29, oppure in D.R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach, Adelphi, pag. 47-49.

[EDM] Kiyosi Itô (a cura di), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, Third Edition (trad. dal giapponese), The MIT Press, Cambridge, USA, 1987.

[Pr] sito Internet http://www-didactique.imag.fr/preuve, *La lettre de la Preuve - International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.*

[Sch] A. Schoenfeld, *Obiettivi e metodi di ricerca in didattica della matematica*, Bollettino UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. III-A (Agosto 2000), 175-199 [trad. it. di *Purposes and Methods of Research in Mathematical Education*, Notices of the AMS, **47** (2000), 641-649].

Claudio Bernardi, Dipartimento di Matematica, Università «La Sapienza»
00185 Roma. E-mail: claudio.bernardi@uniroma1.it