

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

ANTONIO AMBROSETTI

## Le equazioni funzionali in analisi non lineare

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 5-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2002), n.3, p. 393–406.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2002\\_8\\_5A\\_3\\_393\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_3_393_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Le equazioni funzionali in analisi non lineare <sup>(1)</sup>.

A. AMBROSETTI

*A Giovanni Prodi, grande maestro e caro amico*

### 1. – Introduzione.

L'Analisi non lineare si occupa essenzialmente della ricerca di metodi astratti (analitici, topologici, variazionali, eccetera) per risolvere problemi, tipicamente equazioni differenziali o integrali, non lineari che quasi sempre nascono in altre scienze (ad esempio, Meccanica, Fisica, Biologia, Chimica e, più recentemente, Economia). L'approccio tipico consiste nella traduzione del problema in una *Equazione Funzionale* ambientata in uno spazio di funzioni, cioè uno spazio di Banach di dimensione infinita. Questo *setting* funzionale fornisce spesso un quadro che permette di risolvere, assieme a quel problema specifico, anche altri problemi con le stesse caratteristiche. Si riesce così ad avere una visione «panoramica» nella quale questioni inizialmente considerate differenti rivelano una comune natura e possono essere risolte con strategie simili e, a volte, relativamente semplici. In questo procedimento una delle tappe fondamentali è l'estensione a dimensione infinita di risultati matematici noti in dimensione finita, cioè negli spazi Euclidei. Va anche sottolineato che, a differenza di quanto accade in altri rami della Matematica, non si cerca qui la massima astrazione fine a se stessa, ma il grado di generalità nella quale conviene porsi è dettato essenzialmente dal problema stesso che si sta affrontando.

<sup>(1)</sup> Gli argomenti esposti in questo articolo sono stati discussi, in forma più sintetica, durante una conferenza tenuta nell'ambito dell'incontro dal titolo *Aspetti della Matematica: Ricerca, Applicazioni, Insegnamento*, che ha avuto luogo a Palermo il 25 maggio 2001 in concomitanza con il conferimento della laurea honoris causa a Giovanni Prodi in Scienze della Formazione.

Nella Sezione 2 del presente Articolo cercheremo di illustrare questo approccio funzionale con un semplice esempio.

Nella Sezione 3 discuteremo brevemente il *Calcolo Differenziale* e i *Teoremi di Inversione*.

Infine, nella Sezione 4, tratteremo alcuni aspetti di un argomento molto importante per le applicazioni e abbastanza suggestivo per gli aspetti geometrici che coinvolge: la *Teoria della Biforcazione*. Si tratta, tra l'altro, di un tema molto caro a Giovanni Prodi che ha dedicato ad esso profonde ricerche. Su tale tema Prodi ha anche pubblicato un mirabile articolo di rassegna, cfr. [1]. Per la ricchezza dei risultati riportati esso è stato per molti (e non solo italiani) un punto di riferimento importante, fornendo un esempio fondamentale di come si dovrebbe portare avanti l'attività di ricerca.

Ovviamente il contenuto di questo Articolo è ben lungi da esaurire i temi dell'Analisi non lineare. Per una panoramica un po' più ampia si rimanda, ad esempio, al volume [2] e a due Articoli pubblicati sull'Enciclopedia del Novecento, cfr. [3] e [4], tutti in collaborazione con Giovanni Prodi.

## 2. – Le equazioni funzionali.

Come abbiamo già detto, una passo fondamentale in Analisi non lineare è la traduzione dei problemi differenziali in equazioni funzionali in spazi di Banach di dimensione infinita. Illustreremo questo procedimento con un esempio.

Supponiamo di voler trovare una soluzione  $u = u(x)$  di una equazione differenziale del secondo ordine del tipo

$$(1) \quad u''(x) + h(x, u(x)) = 0, \quad x \in (a, b)$$

che assuma agli estremi dell'intervallo  $[a, b]$  un valore assegnato, diciamo

$$(2) \quad u(a) = u(b) = 0.$$

L'equazione (1) assieme alle *condizioni al contorno* (2) prende il nome di *Problema ai Limiti* e descrive una grande quantità di fenomeni della Meccanica e, più in generale, della Fisica. Per risolvere

(1-2) possiamo procedere nel modo seguente. Introduciamo i seguenti spazi

- $X$ , lo spazio delle funzioni  $C_0^2(a, b)$  di classe  $C^2$  in  $[a, b]$  verificanti le condizioni al contorno (2);

- $Y$ , lo spazio delle funzioni continue in  $[a, b]$ .

$X$  e  $Y$  sono degli spazi vettoriali lineari e muniti, rispettivamente, delle norme

$$\|u\|_X = \max \{ |u(x)| + |u'(x)| + |u''(x)| : x \in [a, b] \},$$

$$\|u\|_Y = \max \{ |u(x)| : x \in [a, b] \},$$

sono completi (spazi di Banach). Consideriamo poi l'applicazione  $F: X \rightarrow Y$  che associa ad  $u \in X$  la funzione  $v = F(u)$  definita ponendo

$$v(x) = u''(x) + h(x, u(x)).$$

Con queste notazioni, risolvere il problema ai limiti (1-2) equivale a risolvere l'equazione funzionale  $F(u) = 0$ . Infatti, se  $F(u) = 0$  allora:

- $u$  (è di classe  $C^2$  in  $[a, b]$  e) verifica l'equazione (1);
- $u$ , appartenendo ad  $X$ , verifica le condizioni al contorno (2).

Il procedimento descritto sopra in relazione al problema (1-2) può essere ripetuto per equazioni molto più generali ed anche per equazioni alle derivate parziali. Ad esempio, se  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  con frontiera  $\partial\Omega$  e  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  indica l'operatore di Laplace, il problema al contorno

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta u(x) + h(x, u(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

si traduce nell'equazione funzionale  $F(u) = 0$ ,  $u \in X$ , dove

- $X$  è lo spazio  $C_0^2(\overline{\Omega})$  delle funzioni  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tali che  $u(x) = 0$  per  $x \in \partial\Omega$ ;

- $Y$  è lo spazio delle funzioni  $u \in C(\overline{\Omega})$ ;

- $F: X \rightarrow Y$  è definita ponendo  $F(u)(x) = \Delta u(x) + h(x, u(x))$ .

In generale, lo spazio dove ambientare lo studio astratto è tale da tener conto dell'equazione (negli esempi precedenti, trattandosi di equazioni del secondo ordine, prendiamo uno spazio di funzioni  $C^2$ ) e delle condizioni al contorno <sup>(2)</sup>.

### 3. – Il calcolo differenziale e i teoremi di inversione.

Per risolvere un'equazione del tipo  $F(u) = 0$ , con  $F$  applicazione (non lineare) tra due spazi di Banach  $X$  ed  $Y$ , un primo procedimento naturale è quello di estendere agli spazi di Banach di dimensione infinita l'Analisi Infinitesimale sviluppata negli spazi Euclidei di dimensione finita. Innanzi tutto occorre estendere le nozioni di limite e di continuità. Questo passaggio è concettualmente delicato perchè mentre negli spazi Euclidei tutte le metriche sono equivalenti fra loro, ciò non è più vero, in generale, negli spazi di Banach infinito dimensionali ed è necessario distinguere fra vari tipi di convergenze. Questi argomenti hanno dato origine ad un capitolo importante della matematica: quello della Topologia.

Il secondo passo è di introdurre la nozione di derivata, che viene definita, in analogia al caso Euclideo, come l'applicazione lineare e continua  $A : X \rightarrow Y$  che approssima  $F$  al prim'ordine:

$$F(u + v) = F(u) + A[v] + R(v),$$

dove il resto  $R = R_u : X \rightarrow Y$  è tale che

$$\lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|R(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0.$$

L'applicazione  $A$  è univocamente individuata dalle relazioni precedenti, prende il nome di *Differenziale* (di Fréchet) di  $F$  nel punto  $u$  e verrà indicata col simbolo  $DF(u)$  o  $F'(u)$ . Diremo che  $F$  è di classe  $C^1$ ,  $F \in C^1(X, Y)$ , se  $F$  è differenziabile in tutto  $X$  e la funzione  $u \mapsto F'(u)$  è continua, come applicazione di  $X$  in  $L(X, Y)$  (spazio delle applicazioni lineari e continue di  $X$  in  $Y$ ). In modo analogo si defi-

<sup>(2)</sup> Nella Sezione seguente vedremo come, a volte, anche la scelta  $X = C_0^2(\bar{\Omega})$  e  $Y = C(\bar{\Omega})$  debba essere modificata.

niscono le derivate successive  $D^k F(u) \in L_k(X, Y)$  (spazio delle applicazioni  $k$ -lineari e continue di  $X$  in  $Y$ ) e le derivate parziali, quando  $X$  è uno spazio prodotto,  $X = X_1 \times X_2$ . Diremo che  $F \in C^k(X, Y)$ , se  $F$  è differenziabile  $k$  volte in tutto  $X$  e la funzione  $u \mapsto D^k F(u)$  è continua da  $X$  in  $L_k(X, Y)$ .

A questo punto si possono estendere i Teoremi classici dell'Analisi. Tra questi ricordiamo il Teorema di Inversione Locale.

**TEOREMA 1.** – *Supponiamo che  $F : X \rightarrow Y$  sia di classe  $C^1$ . Dato  $u_0 \in X$  supponiamo inoltre che il differenziale di Fréchet  $F'(u_0)$  sia invertibile come applicazione lineare di  $X$  in  $Y$ .*

*Allora esistono un intorno  $U$  di  $u_0$  ed un intorno  $V$  di  $F(u_0)$  tra i quali  $F$  subordina un diffeomorfismo.*

Per illustrare la portata del Teorema precedente, vediamo come esso si applica al problema al contorno (3). Supponiamo, per semplicità, che  $h$  non dipenda da  $x$  e che  $h(0) = 0$  di modo che  $F(0) = 0$ . Vogliamo vedere se  $F$  è localmente invertibile in  $u_0 = 0$ . Ora è necessario fare una scelta diversa degli spazi funzionali. Per rendersi conto di questo, consideriamo il caso particolare in cui  $h(s) \equiv 0$ . La nostra  $F$  diventa lineare:  $F(u) = \Delta u$  ed è noto dalla Teoria della regolarità delle equazioni ellittiche che è opportuno ambientare il problema di Dirichlet per il Laplaciano negli spazi Hölderiani. Precisamente, per ogni  $v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  esista una unica  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tale che  $\Delta u = v$ ,  $u_{\partial\Omega} = 0$ . Conviene dunque prendere  $X = C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : u_{\partial\Omega} = 0\}$  e  $Y = C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ . L'applicazione  $F : u \mapsto \Delta u + h(u)$  è di classe  $C^1$  e risulta:

$$F'(0)[v] = \Delta v + h'(0)v.$$

Verificare l'invertibilità di  $F'(u_0)$  equivale a far vedere che il problema lineare

$$\begin{cases} \Delta v(x) + h'(0)v(x) = p(x), & x \in \Omega, \\ v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ha un'unica soluzione  $v \in X$ , per ogni  $p \in Y$ . Com'è noto, ciò accade

non appena  $\lambda = h'(0)$  non è un autovalore del problema

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v_{\partial\Omega} = 0.$$

In tal caso il Teorema 1 ci permette di concludere che *esistono*  $\varepsilon, \delta > 0$  tali che per ogni  $g \in Y$  con norma  $\|g\|_Y < \delta$  il problema

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta u(x) + h(u(x)) = g(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ha una soluzione unica  $u_g \in X$  con norma  $\|u_g\|_X < \varepsilon$ . Inoltre, l'applicazione  $g \mapsto u_g$  di  $Y$  in  $X$  è di classe  $C^1$ . Si osservi come il risultato sia locale: ad esempio, non si esclude che (4) abbia altre soluzioni al di fuori della palla  $\|u\|_X < \varepsilon$ .

Dal Teorema di Inversione Locale si può dedurre il seguente Teorema della Funzione Implicita.

**TEOREMA 2.** – *Supponiamo che  $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$  sia di classe  $C^1$  e che risulti  $F(\lambda_0, u_0) = 0$  per qualche  $(\lambda_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ . Supponiamo inoltre che la derivata parziale  $D_u F(\lambda_0, u_0)$  sia invertibile come applicazione lineare di  $X$  in  $Y$ .*

*Allora esistono un intorno  $A$  di  $\lambda_0$ , un intorno  $U$  di  $u_0$  ed un'applicazione  $g : A \rightarrow U$  di classe  $C^1$  tali che  $F(\lambda, u) = 0, (\lambda, u) \in A \times U \Leftrightarrow u = g(\lambda)$ .*

Si può anche dimostrare che risulta

$$g'(\lambda) = -(D_u F(\lambda, g(\lambda)))^{-1} \circ D_\lambda F(\lambda, g(\lambda)), \quad (\lambda \in A).$$

Inoltre, se  $F \in C^k, k \geq 1$ , la funzione implicita  $g$  è di classe  $C^k$ .

Terminiamo questa Sezione enunciando alcuni risultati di natura globale. Il primo, sul quale va ricordato un celebre articolo di R. Caccioppoli, cfr. [5], riguarda l'estensione a dimensione infinita del classico Teorema di Monodromia di Hadamard.

**TEOREMA 3.** – *Data  $F \in C^1(X, Y)$  supponiamo che*

(i)  $F'(u)$  sia invertibile per ogni  $u \in X$

(ii)  $F^{-1}(K)$  sia compatto in  $X$  per ogni compatto  $K$  di  $Y$ .

*Allora  $F$  è un diffeomorfismo globale di  $X$  su  $Y$ .*



Come applicazione, consideriamo il solito problema (4). Poniamo ancora  $X = C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  e  $F(u) = \Delta u + h(u)$ . Indicati con  $\lambda_i$  ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ ) gli autovalori di  $\Delta u + \lambda u = 0$ ,  $u_{\partial\Omega} = 0$ , si vede che le ipotesi (i-ii) sono verificate, per esempio, non appena si suppone che  $h'(s) \leq c < \lambda_1$ , oppure  $\lambda_k < c_1 \leq h'(s) \leq c_2 < \lambda_{k+1}$ . In tal caso, dunque, dal Teorema 3 si deduce che (4) ha una, ed una sola, soluzione  $u \in X$  per ogni  $g \in Y$ .

Possiamo ora chiederci cosa accade se la derivata  $h'(s)$  interseca lo spettro del Laplaciano cioè quando l'ipotesi (i) del Teorema 3 viene a mancare. In generale, in tal caso,  $F$  non è un diffeomorfismo globale. La questione è stata affrontata per la prima volta nel lavoro [6]. Invece di enunciare il risultato astratto, ci limitiamo qui a considerare il problema al contorno (4). Supponiamo che la funzione  $h$  sia di classe  $C^2(\mathbb{R})$  e che verifichi le seguenti ipotesi:

$$(h_1) \quad h''(s) > 0 \text{ per ogni } s \in \mathbb{R};$$

$$(h_2) \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} h'(s) = a_-, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} h'(s) = a_+, \quad 0 < a_- < \lambda_1 < a_+ < \lambda_2.$$

Si dimostra che, in queste condizioni, esiste nello spazio  $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  una varietà  $S$  di codimensione uno tale che  $Y \setminus S$  consiste di due componenti connesse  $Y_0$ ,  $Y_2$  e si ha:

- 1) se  $g \in Y_0$  il problema (4) non ha soluzioni;
- 2) se  $g \in Y_2$  il problema (4) ha esattamente due soluzioni;
- 3) se  $g \in S$  il problema (4) ha una sola soluzione.

Dunque, se  $h$  verifica  $(h_1) - (h_2)$  allora  $F$  mappa  $X$  su  $S \cup Y_2$  e l'equazione funzionale  $F(u) = v$  ha due soluzioni se  $v \in Y_2$ , una soluzione se  $v \in S$  e nessuna soluzione se  $v \in Y_0 := Y \setminus (S \cup Y_2)$ .

Il lavoro [6] è stato il punto di partenza di numerosi lavori dedicati allo studio del problema (4) nel caso in cui  $h'(s)$  interseca lo spettro del Laplaciano. L'estensione del teorema astratto relativo alla descrizione geometrica di  $F(X)$  quando  $F$  ha delle singolarità è invece una questione più delicata e su tale argomento c'è ancora molto da fare.

#### 4. – Problemi di biforcazione.

Un fenomeno caratteristico di molti problemi nonlineari è di avere più soluzioni che, nelle applicazioni, corrispondono a dei cambiamenti di stato.

Se, ad esempio, consideriamo un filo pesante con un estremo fisso e l'altro libero e facciamo ruotare il filo intorno all'asse verticale con velocità angolare costante  $\omega \geq 0$ , noteremo che fino a quando  $\omega$  è piccola il filo resta in posizione verticale, corrispondente alla soluzione «banale» che è stabile. Invece, quando  $\omega$  supera una soglia critica  $\omega_1 > 0$ , il filo assume una posizione «arcuata» che corrisponde ad una nuova soluzione, diversa dalla precedente. La soluzione banale (che continua ad esistere) diventa instabile, mentre la nuova soluzione è stabile.

Un altro esempio riguarda il moto di un fluido viscoso posto tra due piani orizzontali distanti fra loro  $l > 0$ . Si suppone che il piano inferiore sia a temperatura  $T_0$  e quello superiore a temperatura  $T_1$ , con  $T_0 > T_1$ . Se il parametro  $\lambda = (T_0 - T_1)/l$  è piccolo c'è solo conduzione di calore e il fluido rimane in quiete. Quando invece  $\lambda$  supera una soglia critica  $\lambda_1 > 0$ , si notano moti convettivi.

La modellizzazione matematica di questi fenomeni porta a studiare delle equazioni funzionali  $F(\lambda, u) = 0$  che contengono un parametro reale  $\lambda$ . Per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'equazione ha una soluzione banale, ad esempio la soluzione  $u = 0$ , cioè si ha  $F(\lambda, 0) \equiv 0$ . Si tratta allora di trovare quei valori di  $\lambda$  dove «nascono» nuove soluzioni  $u \neq 0$ . Tali valori di  $\lambda$  <sup>(3)</sup> vengono chiamati punti di *biforcazione* o di *diramazione*. Indicato con  $S$  l'insieme delle soluzioni non banali dell'equazione  $F = 0$ ,

$$S = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : F(\lambda, u) = 0, u \neq 0\},$$

i punti di biforcazione sono, per definizione, quei  $\lambda_0$  tali che  $(\lambda_0, 0)$  appartiene alla chiusura di  $S$  in  $\mathbb{R} \times X$ .

Nel caso finito dimensionale, cioè quando  $u = x \in \mathbb{R}^n$ , equazioni contenenti un parametro possono essere studiate mediante il Teore-

<sup>(3)</sup> In altri problemi, come nella biforcazione delle soluzioni periodiche (biforcazione di Hopf), il parametro può essere multidimensionale.

ma della Funzione Implicita. Se per un certo  $\lambda = \lambda_0$  la matrice Jacobiana  $D_x F(\lambda_0, 0)$  è invertibile, l'equazione  $F(\lambda, x) = 0$  ha l'unica soluzione  $x = 0$  per ogni  $\lambda$  vicino a  $\lambda_0$  e quindi non ci sono «diramazioni». La versione infinito dimensionale del Teorema della Funzione Implicita, cioè il Teorema 2, ci assicura che la stessa cosa accade nel caso generale: *condizione necessaria perchè  $\lambda_0$  sia di biforcazione è che l'operatore lineare  $D_u F(\lambda_0, 0)$  non sia invertibile.*

Vediamo ora di enunciare delle condizioni sufficienti perchè ci sia biforcazione. Per semplicità, ci metteremo nel caso in cui  $X = Y$  e l'equazione  $F(\lambda, u) = 0$  ha la forma particolare  $G(u) = \lambda u$ . Supporremo che

- (i)  $G \in C^1(X, X)$  e  $G(0) = 0$ .
- (ii)  $G$  e  $G'(0)$  sono compatti.

**TEOREMA 4.** [Krasnoselski]. – *Ogni autovalore di molteplicità (algebraica) dispari di  $G'(0)$  è di biforcazione.*

In effetti, Rabinowitz, cfr. [7], ha dimostrato che da ogni autovalore dispari di  $G'(0)$  si biforca un connesso il quale: o è illimitato o passa per un altro autovalore di  $G'(0)$ . Ricordiamo anche che nel caso dell'autovalore semplice, cioè di molteplicità algebrica = 1, il risultato precedente può essere provato in ipotesi molto più generali, senza richiedere la compattezza di  $G$  e di  $G'(0)$ . In tal caso l'insieme  $S$  delle soluzioni non banali di  $G(u) = \lambda u$  è, localmente, una curva cartesiana che dipende in modo esplicito da  $D^2 G(0)$ . A questo riguardo, rimandiamo al Capitolo 5 di [2].

Come applicazione, possiamo considerare il problema (non lineare) di autovalori

$$(5) \quad \begin{cases} u''(x) + \lambda(u - u^3) = 0, & x \in [a, b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Per poter applicare il Teorema 4 prendiamo  $X = \{u \in C(a, b) : u(a) = u(b) = 0\}$  e consideriamo l'operatore lineare  $K : X \rightarrow X \cap C^2(a, b)$  definito ponendo

$$K(u) = v \Leftrightarrow -v'' = u, \quad v \in X \cap C^2(a, b).$$

Dal Teorema di Ascoli-Arzelà segue subito che  $K$ , come operatore di  $X$  in sè, è compatto. Poniamo infine  $G(u) = K(u - u^3)$ . Se  $G(u) = \mu u$ ,  $\mu > 0$ , si ha che  $K(u - u^3) = \mu u$  e dalla definizione di  $K$  segue che  $u$  è una soluzione di (5) con  $\lambda = 1/\mu$ . Le ipotesi (i)-(ii) fatte su  $G$  sono verificate e si ha  $G'(0) = K$ . Dunque,  $\mu > 0$  è un autovalore dell'operatore lineare  $G'(0)$  se e solo se  $\lambda = 1/\mu$  è un autovalore del problema linearizzato

$$(6) \quad v'' + \lambda v = 0, \quad v(a) = v(b) = 0.$$

Poichè è noto che (6) ha una successione di autovalori  $\lambda_k = k^2 \pi^2 / (b - a)^2$  che sono tutti semplici, possiamo concludere che  $\mu_k = (\lambda_k)^{-1}$  sono punti di biforcazione per l'equazione funzionale  $G(u) = \mu u$ . Per brevità, diremo che  $\lambda_k$  è di biforcazione per (5). Più precisamente, sfruttando il fatto che il problema (5) è unidimensionale, si può dire che da ogni autovalore  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  si dirama un connesso illimitato  $S_k$  tale che  $S_k \cap S_j = \emptyset$  ( $k \neq j$ ).

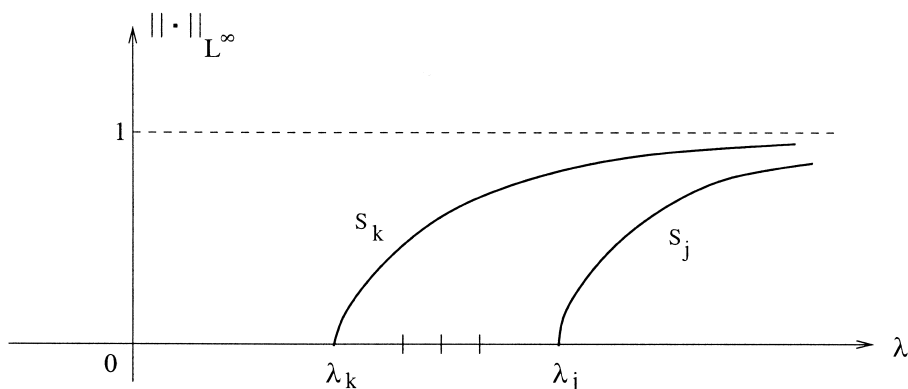


Figura 1. - Diagramma di biforcazione per il problema (5).

Con semplici modifiche si può considerare il problema alle derivate parziali

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta u(x) + \lambda(u - u^3) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si trova che ogni autovalore  $\lambda^* > 0$  di molteplicità algebrica dispari

del problema linearizzato

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta u(x) + \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

è di biforcazione per (7). In particolare, il risultato si applica a  $\lambda^* = \lambda_1$ , il primo (minimo) autovalore di (8), che è semplice.

Il Teorema 4 può essere generalizzato quando  $G$  è *variazionale*, cioè è il gradiente di un funzionale. Ricordiamo che se  $X$  è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare  $(\cdot | \cdot)$  e  $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ , il gradiente di  $\Phi$ ,  $\nabla\Phi$ , è l'operatore definito, mediante il Teorema di Riesz, dalla posizione  $(\nabla\Phi(u) | v) = D\Phi(u)[v]$ ,  $\forall v \in X$ .

**TEOREMA 5** [Krasnoselski]. – *Supponiamo, oltre alle (i)-(ii) del Teorema 4, che  $X$  sia uno spazio di Hilbert e che esista  $\Phi \in C^2(X, \mathbb{R})$  tale che  $G(u) = \nabla\Phi(u)$ .*

*Allora ogni autovalore di  $G'(0)$  è di biforcazione.*

Vogliamo ricordare che una dimostrazione molto elegante del Teorema 5 (che usa la Teoria di Morse) è stata data da Giovanni Prodi in un lavoro in collaborazione con A. Marino, cfr. [8].

Se, nel Teorema 5 si fa l'ipotesi che  $G$  sia analitico, R. Böhme ha dimostrato da che da ogni autovalore di  $G'(0)$  si dirama un *connesso* di soluzioni, almeno localmente. Alcuni esempi mostrano che, in mancanza di analiticità, il risultato precedente non è vero, in generale. Si veda anche il lavoro recente [9] dove l'esistenza di *rami* di biforcazione locali è stata provata per una classe abbastanza ampia di operatori variazionali di classe  $C^2$ .

Terminiamo questa breve esposizione ricordando un risultato relativo alla biforcazione nel caso non compatto. Ci limiteremo ancora una volta ad un esempio, rimandando a [10] (e alla sua bibliografia) per i risultati generali e le dimostrazioni.

Consideriamo il problema di autovalori su tutto l'asse reale

$$(9) \quad \begin{cases} \psi''(x) + \lambda\psi + h(x) |\psi(x)|^{p-1}\psi(x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) \rightarrow 0, \end{cases}$$

con  $p > 1$ . Il cambio di variabile  $u(x) = \varepsilon^{-2/(p-1)} \psi(x/\varepsilon)$ ,  $\lambda = -\varepsilon^2$  trasforma (9) in

$$(10) \quad u'' - u + h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |u|^{p-1} u = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Se  $h(x)$  è una costante  $c > 0$ , la (10) ha una soluzione esplicita  $z_0$  (per esempio, per  $p = 3$  e  $h \equiv 1$ , si ha  $z_0(x) = \sqrt{2}/\cosh(x)$ ) alla quale corrisponde il ramo di soluzioni di (9)

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{2/(p-1)} z_0(\varepsilon x), \quad \lambda = -\varepsilon^2$$

che si biforca da  $\lambda = 0$ . Osserviamo che il problema linearizzato corrispondente a (9) è dato da

$$\psi'' + \lambda \psi = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0,$$

che possiede la semiretta  $[0, +\infty)$  come spettro essenziale. Dunque si ha una biforcazione dall'estremo inferiore dello spettro essenziale.

Per studiare il caso in cui  $h \neq c$ , supporremo che

$$(11) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = c > 0.$$

Scriviamo la (10) nella forma

$$u'' - u + c |u|^{p-1} u + \left( h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - c \right) |u|^{p-1} u = 0,$$

che, per  $\varepsilon > 0$  piccolo, può essere vista come una perturbazione di

$$u'' - u + c |u|^{p-1} u = 0.$$

Osserviamo ora che questa equazione è invariante rispetto alle traslazioni e perciò possiede, oltre alla soluzione  $z_0(x)$ , anche le soluzioni:

$$z_\theta(x) = z_0(x - \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Possiamo dire che la (10) ha la soluzione «banale»  $\varepsilon = 0$ ,  $u = z_\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , e il problema diventa quello di trovare i possibili valori di  $\theta$  dai quali si «biforcano» delle soluzioni  $(\varepsilon, u)$  di (10), con  $\varepsilon > 0$ . Per trovare questi «valori di biforcazione» si può usare un metodo perturbativo variazionale (si veda [10] per i dettagli). Ad esempio, si può di-

mostrare che (10) ha soluzioni per  $\varepsilon > 0$  piccolo, sotto l'ipotesi che  $h(x) - c \in L^1(\mathbb{R})$  e che  $\int_{\mathbb{R}} (h(x) - c) dx \neq 0$ . A queste soluzioni corrispondono delle soluzioni  $\lambda = -\varepsilon^2$ ,  $\psi_\lambda$  di (9) tali che  $\|\psi_\lambda\|_{L^\infty} \rightarrow 0$  per  $\lambda \uparrow 0$ . In tal modo si prova che c'è una biforcazione dall'estremo inferiore dello spettro essenziale per il problema (9). Osserviamo infine che, per  $1 < p < 5$ , le soluzioni  $\psi_\lambda$  tendono a zero anche nello spazio di Sobolev  $H^1(\mathbb{R})$ .

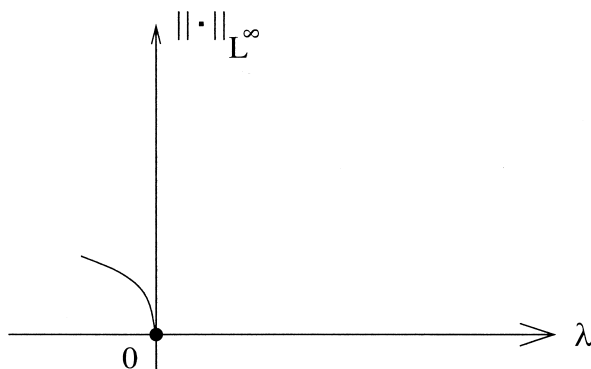


Figura 2. – Diagramma di biforcazione per il problema (9).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. PRODI, *Problemi di diramazione per equazioni funzionali*, Boll. U.M.I., **22** (1967), 413-433.
- [2] A. AMBROSETTI - G. PRODI, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [3] A. AMBROSETTI - G. PRODI, *Analisi non lineare*, Enciclopedia del Novecento, vol. VIII, Istituto della Enciclopedia Italiana (Treccani).
- [4] A. AMBROSETTI, *Analisi non lineare, Metodi Variazionali*, Enciclopedia del Novecento, vol. X, Istituto della Enciclopedia Italiana (Treccani).
- [5] R. CACCIOPPOLI, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali*, Atti Acc. Naz. Lincei, **16** (1032), 392-400.
- [6] A. AMBROSETTI - G. PRODI, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Annali Mat. Pura Appl., **93** (1973), 231-247.

- [7] P. H. RABINOWITZ, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, Jour. Funct. Analysis, **7** (1971), 487-513.
- [8] A. MARINO - G. PRODI, *La teoria di Morse per gli spazi di Hilbert*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **41** (1968), 43-68.
- [9] A. AMBROSETTI, *Branching points for a class of variational operators*, J. d'Analyse Math., **76** (1998), 321-335.
- [10] A. AMBROSETTI - M. BADIALE, *Variational perturbative methods and bifurcation of bound states from the essential spectrum*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **128A** (1998), 1131-1161.

A. Ambrosetti, SISSA, via Beirut 2-4, 34014 Trieste, Italy