Lea Terracini

Sur quelques propriétés des algèbres de Hecke quaternioniques

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-B** (2002), n.3, p. 677–700.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5B_3_677_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
(8) 5-B (2002), 677-700

Sur Quelques Propriétés des Algèbres de Hecke Quaternioniques.

LEA TERRACINI

Sunto. – *Sia B un'algebra di quaternioni indefinita su $\boldsymbol{Q}$ di discriminante divisibile per un primo p. Introduciamo lo spazio delle forme automorfe quaternioniche di livello p^s e l'algebra degli operatori di Hecke che vi agisce. Utilizzando la corrispondenza di Jacquet-Langlands mostriamo che quest'algebra è un quoziente di un'algebra di Hecke classica (privata dell'operatore T_p). Ne deduciamo proprietà di finitezza e di compatibilità per cambiamento di base per l'algebra di Hecke quaternionica.*

Summary. – *Let B be an indefinite quaternion algebra over $\boldsymbol{Q}$, of discriminant divisible by a prime p. We introduce the space of quaternionic automorphic forms of level p^s and the algebra of Heche operators acting on it. By making use of the Jacquet-Langlands correspondence we show that this algebra is a quotient of a classical Hecke algebra (without the T_p operator). We deduce that the quaternionic Hecke algebra is free of finite rank over $\boldsymbol{Z}$ and that it is compatible with base change.*

Introduction.

Soit B une algèbre de quaternions indéfinie sur $\boldsymbol{Q}$, de discriminant Δ et soit N un entier premier à Δ. En utilisant la correspondance de Jacquet-Langlands on a montré dans [15] l'existence d'un homomorphisme surjectif canonique de l'algèbre de Hecke classique de poids k et niveau $N\Delta$ sur l'algèbre de Hecke agissant sur l'espace des formes du même poids qui sont automorphes par rapport au groupe des élément de norme 1 dans un ordre de Eichler de niveau N dans B. Un tel ordre est par définition maximal aux premiers divisant Δ.

Plusieures propriétés de l'algèbre de Hecke classique peuvent être déduites par dualité avec l'espace des formes modulaires du principe de q-développement. Ce principe n'est pas disponible pour les formes quaternioniques, en l'absence de pointes. Cependant certaines propriétés sont héritées par l'algèbre de Hecke quaternionique lorsque on l'identifie à un quotient d'une algèbre classique.

Une caractérisation analytique de la structure entière locale aux premiers qui ne divisent pas $N\Delta$ de l'espace des formes quaternioniques a été obtenu dans [14]. Ce résultat pourrait peut-être offrir un outil pour un étude direct de l'algèbre de Hecke quaternionique.

Dans cet article on considère l'espace des formes automorphes quaternioniques invariantes par un sous-groupe qui n'est pas nécessairement maximal aux premier divisant Δ. Précisément, fixons un tel premier p. Pour tout $s \geqslant 0$, nous définissons l'espace $S_k(V_s(N))$ des formes automorphes quaternioniques de niveau Np^s. Cet espace est muni d'une action naturelle d'une algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(V_s(N))$. En utilisant la correspondance de Jacquet-Langlands on montre que cette algèbre est un quotient de l'algèbre de Hecke classique (privée de l'opérateur T_p) obtenu par restriction au sous-espace des formes classiques, de niveau fixé, qui sont de type spécial ou supercuspidal en p et spécial aux premiers $\neq p$ qui divisent le discriminant. Il s'agit du Théorème 8.0.11 du texte.

Comme conséquence, l'algèbre $\mathcal{H}_k(V_s(N))$ hérite de l'algèbre classique des propriétés de finitude et de compatibilité au changement de base (Corollaire 9.0.16).

Notre motivation pour cet étude est un programme, loin d'être réalisé, qu'on peut esquisser comme suit. Soit $\mathcal{O}$ un anneau d'évaluation contenant $\boldsymbol{Z}_p$, qui soit fini et plat sur $\boldsymbol{Z}_p$. Puisque $\mathcal{H}_k(V_s(N), \mathcal{O}) = \mathcal{H}_k(V_s(N)) \otimes_{\boldsymbol{Z}} \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-module libre de type fini, il est un anneau semi-local p-adiquement complet et donc il est le produit d'un nombre fini d'anneaux locaux. Soit $\boldsymbol{T}^{\mathrm{quat}}$ une telle composante. D'après le Théorème 8.0.11, $\boldsymbol{T}^{\mathrm{quat}}$ est un quotient d'une composante locale $\boldsymbol{T}$ d'une algèbre de Hecke classique. On sait dans certaines situations que $\boldsymbol{T}$ peut être interpretée comme un anneau de déformation universel d'une représentation galoisienne $\bar{\varrho}$ sur $\overline{\boldsymbol{F}}_p$ (voir par exemple [22, 17, 6, 5]). Dans ces cas, on peut se demander quel est le problème de déformation de $\bar{\varrho}$ (au sens de [11]) ayant $\boldsymbol{T}^{\mathrm{quat}}$ comme solution universelle. Un résultat dans cette direction (en poids 2) a été obtenu dans [18].

NOTATIONS ET CONVENTIONS. – On notera $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, respectivement, les nombres naturels, les entiers et le corps des nombres rationnels, réels et complexes. Si A est un anneau, notons $A^{\times}$ le groupe des éléments inversibles de A; $\boldsymbol{R}^{\times,+} = \{r \in \boldsymbol{R} \mid r > 0\}$.

Si p est un nombre premier, l'anneau des entiers p-adiques et le corps des nombres p-adiques sont indiqués respectivement $\boldsymbol{Z}_p$ et $\boldsymbol{Q}_p$. Le symbole $\boldsymbol{A}$ désigne l'anneau des adèles rationnels, $\boldsymbol{A}^{\infty}$ les adèles finis, $\widehat{\boldsymbol{Z}} = \prod_l \boldsymbol{Z}_l$. Pour tout nombre premier p notons $v_p\colon \boldsymbol{Q}_p \to \boldsymbol{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation p-adique. Si $x \in \boldsymbol{Q}_p$, $|x|_p = p^{-v_p(x)}$; si $x \in \boldsymbol{R}$, $|x|_{\infty} = |x|$ est la valeur absolue. Si $a = (a_v) \in \boldsymbol{A}^{\times}$ notons $\|a\|$ la norme idelique de a: $\|a\| = \prod_v |a_v|_v$.

Pour une algèbre de quaternions B sur $\boldsymbol{Q}$, on notera $B_{\boldsymbol{A}}$ l'adélisation de B, $B_{\boldsymbol{A}}^{\times}$ le groupe topologique des éléments inversibles dans $B_{\boldsymbol{A}}$ (cf. [1, Chap. III.6.3], $B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$ le sous-groupe des adèles finis.

Dans le cas où $B = \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q})$ posons, pour tout entier N

$$U_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\boldsymbol{Z}}) \,|\, c \equiv 0 \mod N \right\}$$

$$U_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_0(N) \,|\, a \equiv 1 \mod N \right\}.$$

Ce sont des sous-groupes compacts ouverts de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A}^\infty)$.

Étant donné un espace vectoriel V sur $\boldsymbol{Q}$ et un réseau $\Lambda \subset V$ on pose $\Lambda_p = \Lambda \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Z}_p$ et $V_p = V \otimes_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}_p$.

Notons $\mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R}) \,|\, \det g > 0\}$, et

$$K_\infty = \boldsymbol{R}^\times O_2(\boldsymbol{R}), \qquad K_\infty^+ = \boldsymbol{R}^\times SO_2(\boldsymbol{R}).$$

Le demi-plan complexe superieur $\mathcal{H} = \{x + iy \in \boldsymbol{C} \,|\, y > 0\}$ peut être identifié à

$$\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R})/K_\infty = \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})/K_\infty^+$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R}) \mapsto \begin{cases} \dfrac{ai+b}{ci+d} & \text{si } ad - bc > 0 \\[2ex] \dfrac{-ai+b}{-ci+d} & \text{si } ad - bc < 0 \end{cases}$$

Par cette identification, le groupe $\mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ agit sur $\mathcal{H}$ par homographies: si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ et $z \in \mathcal{H}$

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Soit $j(g, z) = cz + d$.

Si Γ est un sous-groupe discret de $SL_2(\boldsymbol{R})$, nous notons $\mathcal{H}_\Gamma^* = \mathcal{H} \cup P_\Gamma$ où P_Γ est l'ensemble de pointes de Γ (cf. [16, Chap. I]).

1. – Algèbres de quaternions sur $\boldsymbol{Q}$.

On notera

$$(B, \Delta, R) \tag{1}$$

la donnée d'une algèbre de quaternions B indéfinie sur $\boldsymbol{Q}$, de discriminant Δ, et d'un ordre maximal R dans B.

Pour chaque premier l ne divisant pas Δ (y compris $l=\infty$), on fixe un isomorphisme

$$(2)\qquad \begin{aligned} i_l\colon B_l &\xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_2(\boldsymbol{Q}_l), \quad \text{tel que} \\ R_l &\xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_2(\boldsymbol{Z}_l) \quad \text{si } l \neq \infty . \end{aligned}$$

La norme et la trace réduite en B seront notès ν et t respectivement; $\alpha \mapsto \alpha^c$ est l'involution principale dans B.

Si U est un sous-groupe compact ouvert de $B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$, posons

$$(3)\qquad \Gamma(U) = \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})\, U \cap B_{\boldsymbol{Q}}^{\times}$$

Par l'isomorphisme i_∞, le groupe $\Gamma(U)$ peut être identifié à un sous-groupe discret de covolume fini dans $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$, [19, page 104]. Si $\Delta \neq 1$ alors B est un corps, $SL_2(\boldsymbol{R})/\Gamma(U)$ est compact et $\Gamma(U)\backslash\mathcal{H} = \Gamma(U)\backslash SL_2(\boldsymbol{R})/\mathrm{SO}_2(\boldsymbol{R})$ est une surface de Riemann compacte. Par [19, page 107], $\Gamma(U)$ contient un sous-groupe d'indice fini Γ sans torsion. Le groupe Γ agit proprement sur $\mathcal{H}$ et donc il est le groupe fondamental de la surface compacte $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, ce qui montre que les groupes $\Gamma(U)$ sont de type fini.

Si X est un sous-ensemble de B, notons $X^{(1)} = \{\alpha \in X \mid \nu(\alpha) = 1\}$. Par le théorème d'approximation forte pour les algèbres de quaternions sur un corps global (voir [19, page 81]), $B^{(1)} \cdot B_\infty^{(1)}$ est dense dans $B_{\boldsymbol{A}}^{(1)}$.

Donc si U est un sous-groupe ouvert de $B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$, on a $B^{(1)} \cdot (B_\infty^\times \times U)^{(1)} = B_{\boldsymbol{A}}^{(1)}$.

Soit U un sous-groupe compact ouvert de $B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$ de la forme $U_l \times U^{(l)}$, où U_l est un sous-groupe compact ouvert de $B_l^\times$ et $U^{(l)} \subseteq \prod_{q\neq l} B_q^\times$. Si $x \in U_l^{(1)}$ considérons x comme élément de $B_{\boldsymbol{A}}^{(1)}$. Comme B est indéfinie, par le théorème d'approximation forte, x peut être approximé par des éléments $x_n = a_n b_n$, où $a_n \in B^{(1)}$, $b_n \in B_\infty^{(1)}$. Donc $a_n \to x$. Puisque U est ouvert, $a_n \in U$ pour n assez grand; ceci montre que $a_n \in \Gamma(U)$; donc

$$(4)\qquad \Gamma(U) \text{ est dense dans } U_l^{(1)}.$$

Le lemme suivant est bien connu:

LEMME 1.0.1. – *Soit U un sous-groupe compact ouvert de $B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$. Supposons que*

$$\boldsymbol{A}^\times = \coprod_{i=1}^{h} \boldsymbol{Q}^\times \boldsymbol{R}^{\times,+} x_i\, \nu(U),$$

où $x_1, \ldots, x_h \in \boldsymbol{A}^{\times,\infty}$. Choisissons des éléments $t_i \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$ tels que $\nu(t_i) = x_i$. Alors

$$(5)\qquad B_{\boldsymbol{A}}^\times = \coprod_{i=1}^{h} B_{\boldsymbol{Q}}^\times\, \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})\, t_i\, U .$$

DÉMONSTRATION. – Soit $g \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times}$. Puisque $\boldsymbol{A}^{\times} = \boldsymbol{Q}^{\times} \boldsymbol{R}^{\times,+} \widehat{\boldsymbol{Z}}^{\times}$, on peut écrire $\nu(g) = xyx_i \nu(h)$, où $x \in \boldsymbol{Q}^{\times}$, $y \in \boldsymbol{R}^{\times,+}$, $h \in U$. Par [21, § XI, Prop. 3], la norme réduite globale $\nu : B^{\times} \to \boldsymbol{Q}^{\times}$ est surjective. On peut donc choisir des éléments $\alpha \in B_{\boldsymbol{Q}}^{\times}$, $\beta \in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ tels que $\nu(\alpha) = x$, $\nu(\beta) = y$. Alors $\alpha^{-1} gh^{-1} \beta^{-1} t_i^{-1} \in B_{\boldsymbol{A}}^{(1)}$. Par approximation forte on peut écrire $\alpha^{-1} gh^{-1} \beta^{-1} t_i^{-1} = \gamma\delta k$ avec $\gamma \in B_{\boldsymbol{Q}}^{(1)}$, $\delta \in SL_2(\boldsymbol{R})$, $k \in (t_i U t_i^{-1})^{(1)}$. Alors $g = (\alpha\gamma)(\delta\beta)(kt_i h) = (\alpha\gamma)(\delta\beta)(t_i k')$, où $k' \in U$. ■

2. – Formes automorphes quaternioniques.

Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce (c'est-à-dire un sous-groupe discret de $SL_2(\boldsymbol{R})$ tel que $\mathcal{H}_\Gamma^*$ est compact). Soit k un entier. Pour chaque fonction f sur $\mathcal{H}$ nous définissons l'action d'un élément $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ par

$$(f|_k \alpha)(z) = \det(\alpha)^{k-1} j(\alpha, z)^{-k} f(\alpha z).$$

Soit χ un caractère de Γ d'ordre fini.

DÉFINITION 2.0.2. – Une forme automorphe f de poids $k \in \boldsymbol{Z}$ et caractère χ pour Γ, est une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \to \boldsymbol{C}$ telle que

1. l'identité $f|_k \gamma(z) = \chi(\gamma) f(z)$ vaut pour tous les $\gamma \in \Gamma$.
2. f se prolonge holomorphiquement dans un voisinage de chaque pointe.

Une forme automorphe f est dite *cuspidale* si elle est nulle aux pointes.

Nous noterons $S_k(\Gamma, \chi)$ (ou $S_k(\Gamma)$ si χ est trivial) l'espace vectoriel complexe des formes paraboliques de poids k et caractère χ pour Γ.

DÉFINITION 2.0.3. – Soit U un sous-groupe compact ouvert de $B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$. On définit $S_k(U)$ comme l'espace vectoriel des fonction $\varphi : B_{\boldsymbol{A}}^{\times} \to \boldsymbol{C}$ satisfaisant:

a) φ est invariante à gauche par $B_{\boldsymbol{Q}}^{\times}$;

b) φ est invariante à droite par U;

c) pour chaque $\tau \in K_\infty^+$, et pour chaque $\xi \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times}$,

$$\varphi(\xi\tau) = \varphi(\xi)\, j(\tau, i)^{-k} \det(\tau)^{k-1};$$

d) pour chaque $\xi \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$ la fonction $f_\xi : \mathcal{H} \to \boldsymbol{C}$ définie par $f_\xi(z) = \varphi(\xi w)\, j(w,i)^k \det(w)^{-(k-1)}$, où $w \in \mathrm{GL}_2^+(\boldsymbol{R})$ est tel que $w(i) = z$, est holomorphe; et si $B = M_2(\boldsymbol{Q})$

e) φ est cuspidale: pour tout $g \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times}$

$$\int_{\boldsymbol{Q}\backslash\boldsymbol{A}} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0 \,;$$

f) $|\operatorname{Im}(z)^{k/2} f_{\xi}(z)|$ est uniformement bornée sur $\mathcal{H}$, pour tout $\xi \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$.

Il est bien connu que l'espace $S_k(U)$ est de dimension finie et qu'il est nul si $k < 0$.

Par le Lemme 1.0.1 on peut trouver $t_1, \ldots, t_h \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$ tels que

$$B_{\boldsymbol{A}}^{\times} = \coprod_{i=1}^{h} B_{\boldsymbol{Q}}^{\times} \mathrm{GL}_2^{+}(\boldsymbol{R})\, t_i U \,,$$

où $h = |\boldsymbol{Q}^{\times} \backslash \boldsymbol{A}^{\times} / \boldsymbol{R}^{\times,+} \nu(U)|$. Ayant fixé une telle décomposition, posons pour $i = 1, \ldots, h$

$$\begin{aligned} \Gamma^i(U) &= \Gamma(t_i U t_i^{-1}) \\ \overline{\Gamma^i(U)} &= \Gamma^i(U)/(\Gamma^i(U) \cap \boldsymbol{Q}^{\times}). \end{aligned} \tag{6}$$

On peut donc considérer l'espace des formes cuspidales $S_k(\Gamma^i(U))$. On a un isomorphisme, [9, § 2],

$$\begin{aligned} \theta : S_k(U) &\to \bigoplus_{i=1}^{h} S_k(\Gamma^i(U)) \\ \varphi &\mapsto (f_1, \ldots, f_h), \end{aligned} \tag{7}$$

où

$$f_i(z) = \varphi(t_i w)\, j(w, i)^k (\det w)^{-(k-1)},$$

où $w \in \mathrm{GL}_2^{+}(\boldsymbol{R})$ est tel que $w(i) = z$.

3. – Le produit de Petersson.

L'espace $S_k(U)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{A}_0$ des formes cuspidales de Jacquet-Langlands, [10, § 10]. Plus précisement, la condition c) de la définition 2.0.3 entraîne qu'il est contenu dans la somme directe des espaces $\mathcal{A}_0(\varepsilon)$ où

$$\mathcal{A}_0(\varepsilon) = \{F \in \mathcal{A}_0 \,|\, F(\xi z) = \varepsilon(z)\, F(\xi) \text{ pour tout } z \in \boldsymbol{A}^{\times}\}$$

et ε varie dans l'ensemble fini des caractères de $\boldsymbol{A}^{\times}$ qui se restreignent à $\|z\|^{k-2}$ sur $\boldsymbol{Q}^{\times} \cdot \boldsymbol{R}^{\times,+} \cdot (U \cap \boldsymbol{A}^{\times})$.

Si $\varphi \in S_k(U)$, on définit $\varphi'(g) = \|\nu(g)\|^{-k/2+1} \varphi(g)$. On a $\varphi'(gr) = \varphi'(g)$ pour tout $r \in \boldsymbol{R}^{\times}$. La fonction φ' est alors contenue dans la somme directe des espaces $\mathcal{A}_0(\varepsilon)$ où ε varie dans l'ensemble fini des caractères de $\boldsymbol{A}^{\times}$ qui sont triviaux sur $\boldsymbol{Q}^{\times} \cdot \boldsymbol{R}^{\times,+} \cdot (U \cap \boldsymbol{A}^{\times})$, donc d'ordre fini. Par [10, Proposition 10.7], φ' est dans l'espace de Hilbert $L^2(B_{\boldsymbol{Q}}^{\times} \boldsymbol{R}^{\times,+} \backslash B_{\boldsymbol{A}}^{\times})$ pour le produit hermitien

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{B_{\boldsymbol{Q}}^\times \boldsymbol{R}^{\times,+} \backslash B_{\boldsymbol{A}}^\times} \phi_1(g) \overline{\phi_2(g)}\, dg\ ;$$

cet espace est muni de l'action régulière à droite de $B_{\boldsymbol{A}}^\times$.

Si $\varphi_1, \varphi_2 \in S_k(U)$ nous posons alors

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \varphi_2) &= \langle \varphi_1', \varphi_2' \rangle \\ &= \int_{B_{\boldsymbol{Q}}^\times \boldsymbol{R}^{\times,+} \backslash B_{\boldsymbol{A}}^\times} \|\nu(g)\|^{-k+2} \varphi_1(g)\, \varphi_2(g)\, dg\ .\end{aligned}$$

C'est un produit hermitien sur $S_k(U)$, appelé le *produit scalaire de Petersson.* Si $\varphi \in S_k(U)$ et $\alpha \in B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$ la fonction $\alpha\varphi(g) = \varphi(g\alpha)$ est dans $S_k(\alpha^{-1} U \alpha)$ et on a la relation

$$(\alpha\varphi_1, \alpha\varphi_2) = \|\nu(\alpha)\|^{-k+2} (\varphi_1, \varphi_2)\,.$$

5. – Opérateurs de Hecke.

Soit (B, Δ, R) comme dans 1. Fixons pour chaque premier $l \nmid \Delta$ un isomorphisme i_l comme dans 2. Si N est un entier premier à Δ, soit $R(N)$ l'ordre d'Eichler de niveau N, défini localement par

$$R(N)_l = \begin{cases} R_l & \text{si } l \nmid N \\ i_l^{-1}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}_l\right\} & \text{si } l \mid N \end{cases}$$

Soit p un nombre premier divisant Δ. Dans la suite nous considérerons des sous-groupes compacts ouverts de $B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}$ de la forme

$$U(N, U_p) = \prod_{l \neq p} R(N)_l^\times \times U_p$$

où U_p est un sous-groupe ouvert de $R_p^\times$. Un tel groupe U sera appelé un (p, N)-*groupe.* Si U est un (p, N)-groupe, nous définissons pour chaque premier l

$$D(U)_l = \begin{cases} \{\alpha \in R_l \mid \nu(\alpha) \neq 0\} & \text{si } l \nmid Np \\ \left\{\alpha \in R(N)_l \middle| i_l(\alpha) = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix},\ a \in \boldsymbol{Z}_l^\times \text{ et } \nu(\alpha) \neq 0\right\} & \text{si } l \mid N \\ U_p & \text{si } l = p\ ; \end{cases}$$

$$D(U) = \prod_l D(U)_l \cap B_{\boldsymbol{A}}^{\times,\infty}\,.$$

L'anneau de Hecke abstrait $\mathcal{R}(U, D(U))$ (cf. [16, Chap. III]) s'identifie au produit tensoriel $\bigotimes_{l \neq p} \mathcal{R}(R(N)_l^\times, D(U_l))$, donc il ne dépend que de l'entier N; on le notera $\mathcal{R}(N)$. Il agit sur $S_k(U)$ par l'action des classes doubles $U\alpha U$, $\alpha \in D(U)$, de la façon suivante: si $\alpha \in D(U)$ considérons une décomposition de la classe double $U\alpha U$ dans une union disjointe de classes gauches: $U\alpha U = \coprod_i U\alpha_i$. Définissons l'action de $U\alpha U$ sur $S_k(U)$ par

$$\varphi|_{[U\alpha U]}(g) = \sum_i \varphi(g\alpha_i^{-1}).$$

Par le point b) de la Définition 2.0.3 cette définition est indépendante du choix des représentants α_i des classes gauches.

Comme dans [13, Lemma 5.3.3], on voit que

$$D(U)_l = \begin{cases} \coprod_{0 \leq s \leq r} R_l^\times \begin{pmatrix} l^s & 0 \\ 0 & l^r \end{pmatrix} R_l^\times & \text{si } l \nmid N\Delta \\ \coprod_{0 \leq s} R(N)_l^\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^s \end{pmatrix} R(N)_l^\times & \text{si } l | N \\ \coprod_{0 \leq s} R_l^\times u_l^s R_l^\times & \text{si } l | \Delta \text{ et } l \neq p \\ U_p & \text{si } l = p \end{cases}$$

où u_l est une uniformisante de B_l. Donc $\mathcal{R}(N)$ est engendrée comme $\boldsymbol{Z}$-algèbre par les éléments $\tilde{T}(q)$, $q \neq p$ et $\tilde{T}(q, q)$, $q \nmid N\Delta$, où

$$\tilde{T}(q) = \begin{cases} U\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}_q U & \text{si } q \nmid \Delta \\ U u_q U & \text{si } q | \Delta' \end{cases}$$

$$\tilde{T}(q, q) = U\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}_q U$$

et si $x \in \mathrm{M}_2(\boldsymbol{Q}_q)$, on a noté x_q l'élément de $B_A^\times$ dont la composante en q vaut $i_q^{-1}(x)$ et les autres valent 1.

Si A est un anneau contenu dans $\boldsymbol{C}$ soit $\mathcal{H}_k(U, A)$ la A sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(S_k(U))$ engendrée sur A par l'image de $\mathcal{R}(N)$. Nous notons T_q, $T_{q,q}$ les images dans $\mathcal{H}_k(U, \boldsymbol{Z})$ de $\tilde{T}(q)$, $\tilde{T}(q, q)$ respectivement. Nous définissons $\mathcal{H}_k(U, A)^{(N)}$ comme la sous-algèbre de $\mathcal{H}_k(U, A)$ engendrée sur A par les opérateurs T_q pour $q \nmid Np$ et $T_{q,q}$ pour $q \nmid N\Delta$.

Remarque 4.0.4. – Par [3, Theorem 1.1], cette définition de l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des formes automorphes concorde avec la définition classique des opérateurs de Hecke sur les espaces $S_k(\Gamma)$

donnée par Shimura [16] si Γ est un sous-groupe de congruence de $SL_2(\boldsymbol{Z})$.

L'algèbre $\mathcal{H}_k(U, \boldsymbol{Z})$ est évidemment commutative, et l'algèbre $\mathcal{H}_k(U, \boldsymbol{Q})^{(N)}$ est stable par l'adjonction par rapport au produit scalaire de Petersson. De conséquence:

PROPOSITION 4.0.5. – *Il existe une base de $S_k(U)$ constituée par des fonctions propres pour l'algèbre $\mathcal{H}_k(U, \boldsymbol{Z})^{(N)}$.*

5. – Représentations admissibles des algèbres de quaternions locales et représentation de Weil.

Soit B_p le corps des quaternions sur $\boldsymbol{Q}_p$. On sait que les seules représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ dans un espace de dimension finie sont celles qui se factorisent par le déterminant, c'est-à-dire celles du type $\chi \circ \det$ où χ est un caractère de $\boldsymbol{Q}_p^\times$. Les représentations irréductibles admissibles de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ ont été complétement classifiées, [8, 10]. Il y a trois familles de telles représentations:

(i) Les *représentations de la série principale* $\pi(\mu_1, \mu_2)$, où μ_1 et μ_2 sont des caractères de $\boldsymbol{Q}_p^\times$ tels que $\mu_1\mu_2^{-1} \neq |\cdot|^{\pm 1}$. La représentation $\pi(\mu_1, \mu_2)$ est réalisée comme la multiplication à droite sur l'espace des fonctions localement constantes ψ sur $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ telles que

$$\psi\left(\begin{pmatrix} t_1 & x \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} k\right) = \mu_1(t_1)\,\mu_2(t_2)\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2} \psi(k), \tag{8}$$

pour tout $k \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Z}_p)$.

(ii) Les *représentations de la série spéciale* $\sigma(\mu_1, \mu_2)$, où μ_1 et μ_2 sont des caractères de $\boldsymbol{Q}_p^\times$ tels que $\mu_1\mu_2^{-1} = |\cdot|^{\pm 1}$. L'espace des fonctions localement constantes sur $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ satisfaisant 8 n'est pas irréductible et $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ est réalisée comme son unique sous-quotient irréductible.

(iii) Les *représentations supercuspidales*, qui sont caractérisées par le fait que leurs coefficients sont à support compact modulo le centre.

Les représentations spéciales et supercuspidales sont de carré-integrable.

Soit (V, π) une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$, de caractère central ε. Soit n le plus petit entier tel que l'espace

$$V(n, \varepsilon) = \left\{ v \in V \,\middle|\, \pi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v = \varepsilon(a)\, v \text{ si } a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}_p \text{ et } p^n \,\middle|\, c \right\}$$

est non nul; $V(n, \varepsilon)$ est alors de dimension 1, [4]. L'entier $p^n = \mathrm{Cond}(\pi)$ est appelé le *conducteur* de π.

5.1. *Modèles de Kirillov et conducteur des représentations supercuspidales.*

Soit $\mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times)$ l'espace des fonctions sur $\boldsymbol{Q}_p^\times$ à support compact dans $\boldsymbol{Q}_p$.

On fixe un caractère additif non trivial $\psi : \boldsymbol{Q}_p \to \boldsymbol{C}^\times$. (Ici on supposera $\psi(\boldsymbol{Z}_p) = 1$).

Soit π une representation supercuspidale de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$. Il existe une et une seule représentation $\pi' = \pi'_\psi$ de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ dans l'espace $\mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times)$ telle que π' est isomorphe à π et

$$\left(\pi'\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\right)(\alpha) = \psi(\alpha b)\, f(a\alpha), \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times).$$

La représentation π' s'appelle le *modèle de Kirillov* de π (cf. [8, page 131]).

Soient π une représentation supercuspidale de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$, π' son modèle de Kirillov, ε son caractère central. Pour chaque $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times)$ et pour chaque caractère χ de $\boldsymbol{Z}_p^\times$ on pose

$$\widehat{\varphi}_n(\chi) = \int_{\boldsymbol{Z}_p^\times} \varphi(zp^n)\, \chi(z)\, dz$$

où dz est normalisée de façon telle que $\int_{\boldsymbol{Z}_p^\times} dz = 1$.

On définit la série de puissances formelle

$$\widehat{\varphi}(\chi, X) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} \widehat{\varphi}_n(\chi)\, X^n.$$

C'est une série de Laurent a coefficients dans $\boldsymbol{C}$. Puisque φ est localement constante, $\widehat{\varphi}(\chi, X) = 0$ pour presque tous les χ. D'après [10, page 48], pour chaque caractère χ il existe un monôme $C_0(\chi) X^{n_\chi}$, avec $n_\chi \leqslant -2$ tel que

$$(\widehat{\pi'(w)\,\varphi})(\chi, X) = C_0(\chi)\, X^{n_\chi} \widehat{\varphi}(\chi^{-1}\varepsilon^{-1}, X^{-1}\varepsilon(p)) \tag{9}$$

où $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le conducteur de π est alors $-n_{\boldsymbol{1}}$ où $\boldsymbol{1}$ est le caractère trivial de $\boldsymbol{Z}_p^\times$, [4]. Dans le cas $\chi = \boldsymbol{1}$ la formule 9 donne

$$(\widehat{\pi'(w)\,\varphi})(\boldsymbol{1}, X) = C_0(\boldsymbol{1})\, x^{n_{\boldsymbol{1}}} \widehat{\varphi}(\varepsilon^{-1}, X^{-1}\varepsilon(p)). \tag{10}$$

Pour calculer $\mathrm{Cond}(\pi)$ on peut donc procéder dans la façon suivante: soit p^r le conducteur de ε, $s \geqslant r$ un entier, et soit φ_0 la fonction caracteristique de $1 + p^s \boldsymbol{Z}_p^\times$. Alors $\widehat{\varphi_0}(\varepsilon^{-1}, X) = 1/p^{s-1}(p-1)$. D'après la formule 10, $(\widehat{\pi'(w)\,\varphi_0})(1, X) = \dfrac{C_0(\boldsymbol{1})}{p^{s-1}(p-1)} X^{-c}$, avec $c \geqslant 2$, et l'on obtient la caractérisation suivante du conducteur dans le cas supercuspidal:

PROPOSITION 5.1.1. – *L'exposant de* Cond(π) *est le seul entier* m *tel que*

$$(\widehat{\pi'(w)}\,\varphi_0)_{-m}(\mathbf{1}) = \int_{\boldsymbol{Z}_p^\times} (\pi'(w)\,\varphi_0)(zp^{-m})\,dz$$

est non nul.

5.2. *La représentation de Weil associée à une représentation d'un corps de quaternions local.*

Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\boldsymbol{Q}_p$ nous noterons $\mathcal{S}(V)$ l'espace de Schwartz sur V.

Soit $(\mathcal{S}(B_p), r)$ l'espace de Schwartz de B_p muni de la représentation de Weil r de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$, [10, § 1]. On a

$$r(w)\,f(x) = -\widehat{f}(x^c)\,, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(B_p)\,, \tag{11}$$

où $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f, définie par

$$\widehat{f}(x) = \int_{B_p} f(y)\langle x, y\rangle\,dy\,, \qquad \langle x, y\rangle = \psi(t(xy))\,.$$

(La mesure de Haar est normalisée de façon telle que $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$).

Soit ϱ une représentation irréductible de $B_p^\times$ dans un espace V de dimension finie. On lui associe une représentation irréductible $\pi(\varrho)$ de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ de la manière suivante. Soit $\mathcal{S}(B_p, V) = \mathcal{S}(B_p) \otimes_{\boldsymbol{C}} V$ muni de l'action de $SL_2(\boldsymbol{Q}_p)$ par $r \otimes 1$. On pose

$$X_\varrho = \{ f \in \mathcal{S}(B_p, V)\,|\, f(xh) = \varrho(h^{-1})\,f(x),\ \ \forall h \in B_p^{(1)}\}\,. \tag{12}$$

Alors X_ϱ est invariant par l'action de $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$. Cette action se relève en une action de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$, [10].

THÉORÈME 5.2.1 ([10, page 125]. – *Si* $\dim(V) = d$ *alors*

$$X_\varrho = \underbrace{W_\varrho \oplus \ldots \oplus W_\varrho}_{d\ fois},$$

où W_ϱ *est une représentation irréductible de* $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$. *De plus*

- *si* $d = 1$ *et* $\varrho = \psi \circ \nu$ *où* ψ *est un caractère de* $\boldsymbol{Q}_p^\times$ *alors* W_ϱ *est la représentation spéciale* $\sigma(\psi|\,|^{1/2}, \psi|\,|^{-1/2})$;
- *si* $d > 1$, W_ϱ *est supercuspidale.*

La représentation $\pi(\varrho)$ cherchée est la représentation de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ sur l'espace W_ϱ. Les caractères centraux de ϱ et de $\pi(\varrho)$ sont égaux.

Une description du modèle de Kirillov est donnée dans [10, page 56]: l'application

$$(13)\qquad \begin{aligned} X_\varrho &\to \mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times, V) \\ f &\mapsto \phi_f \end{aligned}$$

donnée par

$$\phi_f(a) = |h|^{1/2}\varrho(h)\, f(h) \qquad \text{si } \nu(h) = a\,.$$

est bijective. On en déduit une action $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ sur $\mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times, V)$ par transport de structure. Soit V_0 un sous-espace de dimension 1 de V. Alors

$$\{\phi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times, V)\,|\,\phi(\boldsymbol{Q}_p^\times) \subseteq V_0\}$$

est stable par $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$. C'est le modèle de Kirillov de $\pi(\varrho)$.

En utilisant ce modèle et la Proposition 5.1.1 nous allons calculer le conducteur de π lorsque $\pi = \pi(\varrho)$.

Soit ε le caractère central de ϱ et $p^r = \mathrm{Cond}(\varepsilon)$. Soit n le plus petit entier positif tel que $\varrho(1 + u^n R_p) = 1$, où $u = u_p$ est une uniformisante de $B_p^\times$. Notons que $r \leqslant [(n+1)/2]$.

Proposition 5.2.2. – *On a*

$$\mathrm{Cond}(\pi(\varrho)) = p^{n+1}.$$

Démonstration. – Si ϱ a dimension 1, alors ϱ a la forme $\psi \circ \nu$ pour quelque caractère ψ de $\boldsymbol{Q}_p^\times$ et $\pi(\varrho)$ est la représentation spéciale $\sigma(\psi|\,|^{1/2}, \psi|\,|^{-1/2})$; si p^l est le conducteur de ψ on a alors $n = 2l - 1$ et $\mathrm{Cond}(\pi(\varrho)) = p^{2l}$, voir [4]. Nous supposerons dans la suite que ϱ est de dimension plus grande que 1 et donc que $\pi(\varrho)$ est supercuspidale. Soit $V_0 = \langle v_0 \rangle$ un sous-espace de dimension 1 de V; définissons $\phi_0 \in \mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times, V)$ par

$$\phi_0(x) = \begin{cases} v_0 & \text{si } x \in 1 + p^s \boldsymbol{Z}_p \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

On définit $f_0 \in \mathcal{S}(B_p, V)$ par

$$f_0(b) = \begin{cases} \varrho(b^{-1})\, v_0 & \text{si } \nu(b) \in 1 + p^s \boldsymbol{Z}_p \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Alors f_0 appartient à l'espace X_ϱ défini en 12 et $\phi_{f_0} = \phi_0$ dans la correspondance 13.

Si S est un ensemble, notons χ_S sa fonction caractéristique. Pour chaque r posons $G_r = \{\alpha \in R_p^\times\,|\,\nu(\alpha) \in 1 + p^{[r+1/2]}\boldsymbol{Z}_p\}$. Soient $b_1, \dots, b_t$ des représentants des classes de $1+u^n R_p$ dans G_n: $G_n = \coprod_i (1+u^n R_p)\, b_i$. Par 11,

$$f_0 = \sum_i \chi_{(1+u^n R_p)\, b_i}\, \varrho(b_i^{-1})\, v_0$$

d'où

$$(14) \qquad (\pi(\varrho)(w)\, f_0)(y) = -\sum_i \left(\int_{B_p} \chi_{(1+u^n R_p)\, b_i}(x) \langle x,\, y^c \rangle\, dx \right) \varrho(b_i^{-1})\, v_0 .$$

On a

$$\int_{B_p} \chi_{(1+u^n R_p)\, b_i}(x) \langle x,\, y^c \rangle\, dx = \int_{(1+u^n R_p)\, b_i} \langle x,\, y^c \rangle\, dx$$

$$= \int_{1+u^n R_p} \langle x, (y b_i^c)^c \rangle\, dx\,,$$

car $b_i \in R_p^\times$ et donc $\mu((1+u^n R_p)\, b_i) = \mu(1+u^n R_p)$. Donc on se ramène à calculer

$$\int_{(1+u^n R_p)} \langle x,\, z^c \rangle\, dx\,.$$

Notons $R_p^\vee$ le dual de R_p par respect à l'accouplement $\langle\,,\rangle$, c'est-à-dire $R^\vee = \{x \in B_p \,|\, \langle x,\, y\rangle = 1,\ \forall y \in R_p\}$. On voit facilement que $R_p^\vee = u^{-1} R_p$. On a $\int_{R_p} \langle x,\, z^c \rangle\, dx = \mu(R_p)\, \chi_{R_p^\vee}$; donc

$$\int_{(1+u^n R_p)} \langle x,\, z^c \rangle\, dx = \frac{1}{p^{2n}} \int_{R_p} \langle 1 + u^n w,\, z^c \rangle\, dw$$

$$= \frac{1}{p^{2n}} \langle 1,\, z^c \rangle \int_{R_p} \langle u^n w,\, z^c \rangle\, dw$$

$$= \frac{1}{p^{2n}} \langle 1,\, z^c \rangle\, \mu(R_p)\, \chi_{u^{-1} R_p}(u^n z)$$

$$= \frac{1}{p^{2n}} \langle 1,\, z^c \rangle\, \mu(R_p)\, \chi_{R_p}(u^{n+1} z)\,.$$

Posons $f_0'(y) = (\pi(\varrho)(w)\, f_0)(y)$. On obtient donc

$$f_0'(y) = -\frac{1}{p^{2n}} \mu(R_p)\, \chi_{R_p}(u^{n+1} y) \sum_i \langle 1,\, y b_i^c \rangle\, \varrho(b_i^{-1})\, v_0 .$$

Soit $\phi'_0 = \phi_{f'_0} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{Q}_p^\times, V)$ l'image de f'_0 par l'isomorphisme 13:

$$\begin{aligned}\phi'_0(a) &= |h|^{1/2}\varrho(h)\, f'_0(h)\\ &= -\,|h|^{1/2}\,\frac{1}{p^{2n}}\mu(R_p)\,\chi_{R_p}(u^{n+1}h)\sum_i\langle 1,\, hb_i^c\rangle\,\varrho(h)\,\varrho(b_i^{-1})\,v_0\end{aligned}$$

si $a \in \boldsymbol{Q}_p^\times$, $h \in B_p^\times$ et $\nu(h) = a$.

Si $a \in p^{-k}\boldsymbol{Z}_p^\times$ avec $k > n+1$, un relèvement h de a sera dans $u^{-k}R_p^\times$, donc $u^{n+1}h \notin R_p^\times$ et $\phi'_0(a) = 0$. Donc ϕ'_0 est nulle sur $p^{-k}\boldsymbol{Z}_p^\times$ si $k > n+1$. Si $k \leqslant n+1$ alors $\phi'_0(p^{-k}z)$, vue comme fonction de $\boldsymbol{Z}_p^\times$ est invariante sur les classes de $1 + p^{[n+1/2]}\boldsymbol{Z}_p$. Donc

$$\int_{\boldsymbol{Z}_p^\times}\phi'_0(p^{-k}z)\,dz$$

est proportionnel à

$$\int_{R_p^\times}\langle 1,\, u^{-k}h\rangle\,\varrho(u^{-k}h)\,v_0\,dh\,.$$

Cette intégrale est fixée par $\varrho(1 + u^{-k}R_p)$, donc elle est nulle si $k < n+1$. En utilisant la Proposition 5.1.1 on conclut que $\mathrm{Cond}(\pi(\varrho)) = p^{n+1}$. ■

6. – Représentations automorphes de $B_{\boldsymbol{A}}^\times$.

Dans cette section, on prend $G = B^\times$ ou GL_2; U est un sous-groupe compact ouvert de $G(\boldsymbol{A})$.

Soit $S'_k(U)$ l'espace des fonction φ' sur $G(\boldsymbol{A})$ satisfaisant les conditions a), b), d), e), f) de la Définition 2.0.3 et la condition

c') pour chaque $\tau \in K_\infty^+$, et pour chaque $\xi \in B_{\boldsymbol{A}}^\times$,

$$\varphi'(\xi\tau) = \varphi'(\xi)\, j(\tau, i)^{-k}\det(\tau)^{k/2};$$

On a un isomorphisme de $\boldsymbol{C}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} S_k(U) &\to S'_k(U)\\ \varphi &\mapsto \varphi' \end{aligned}\tag{15}$$

où $\varphi'(g) = \|\nu(g)\|^{-k/2+1}\varphi(g)$. Comme on a remarqué dans la section 3, φ' engendre une sous-représentation unitaire π' de la représentation régulière droite de $G(\boldsymbol{A})$ sur $L^2(G(\boldsymbol{Q})\backslash G(\boldsymbol{A}))$.

À chaque forme cuspidale $\varphi \in S_k(U)$ est donc associée une représentation automorphe π_φ de l'adelisation $G(\boldsymbol{A})$: on pose $\pi_\varphi = \pi'$.

On a la décomposition en composantes locales, [7]:

$$\pi_{\varphi} = \bigotimes_{v} \pi_{\varphi, v} \tag{16}$$

où pour chaque premier v de $\boldsymbol{Q}$ (y compris $v = \infty$), $\pi_{\varphi, v}$ est une représentation admissible de $G(\boldsymbol{Q}_v)$.

Soit q un nombre premier divisant Δ. On peut alors associer à chaque représentation ϱ de $B_q^\times$ la représentation $\pi(\varrho)$ de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_p)$ définie dans la section 5.2. Si d'autre part q ne divise pas Δ l'isomorphisme i_q permet d'identifier les représentations de $B_q^\times$ avec celles de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_q)$, dans ce cas on pose $\pi(\pi'_q) = \pi'_q$.

La correspondance de Jacquet-Langlands entre les représentations automorphes de $B_{\boldsymbol{A}}^\times$ et représentations automorphes de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A})$ est définie par

$$\pi' = \bigotimes_p \pi'_p \mapsto \mathrm{JL}(\pi') := \bigotimes_p \pi(\pi'_p).$$

Cette correspondance préserve le caractère central et les fonctions L, c'est-à-dire $L(\pi', s) = L(\mathrm{JL}(\pi'), s)$. Elle établit une bijection

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme des}\\ \text{représentations automorphes de}\\ B_{\boldsymbol{A}}^\times \text{ de dimension infinie}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme des}\\ \text{représentations automorphes de}\\ \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A}) \text{ qui sont de carré integrable}\\ \qquad\text{aux premiers divisant } \Delta\end{array}\right\}.$$

Plus précisément, il s'agit d'une bijection entre les composantes irréductibles de la représentation régulière droite pour $B_{\boldsymbol{A}}^\times$ et les composantes irréductibles de la représentation regulière droite pour $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A})$ qui sont de carré intégrable (c'est-à-dire spéciales ou supercuspidales) aux premiers divisant Δ.

Ce résultat permet de déduire du théorème de multiplicité 1 pour GL_2 un théorème quaternionique analogue, [8]:

THÉORÈME 6.0.3 (Multiplicité 1). – *Dans $L^2(G(\boldsymbol{Q})\backslash G(\boldsymbol{A}))$ chaque composante irréductible intervient avec multiplicité* 1.

Une représentation automorphe irréductible est caractérisée par les valeurs propres des opérateurs $\tilde{T}(q)$ qui agissent sur son vecteur nouveau, pour tous les q sauf qu'un nombre fini [8]; on a donc le suivant

COROLLAIRE 6.0.4. – *Soit $U = U(N, U_p)$ un (p, N)-groupe et $\varphi \in S_k(U)$ une fonction propre pour T_q pour tous les premiers q sauf un nombre fini. Alors la représentation de $B_{\boldsymbol{A}}^\times$ engendrée par φ est irréductible.*

REMARQUE 6.0.5. – Soit $\varphi \in S_k(U)$. La représentation engendrée par φ est la représentation $\pi = \pi_{\varphi} \otimes \|\nu\|^{k/2-1}$ qui n'est pas en général une représentation sur L^2. Donc du point de vue de la théorie des représentations automorphes il est plus naturel d'étudier l'espace S_k' plutôt que l'espace S_k. C'est ce qui est fait par exemple dans [8]. Par contre, on a une correspondance meilleure entre les opérateurs de Hecke agissant sur $S_k(U)$ et les opérateurs classiques définis par Shimura sur l'espace $S_k(\Gamma(U))$, [3, Theorem 1.1]. En fait l'opérateur de Hecke $T_q' = \tilde{T}(q)$ agissant sur $S_k'(U)$ est tordu par une puissance (en général non-entière) de q par rapport à l'image de T_q par l'isomorphisme 15:

$$T_q' \varphi' = q^{k/2-1}(T_q \varphi)'. \tag{17}$$

Donc le choix de S_k au lieu de S_k' est meilleur quand on s'intéresse à l'aspect arithmétique de la théorie des formes automorphes. C'est le point de vue adopté, par exemple, en [3, 9] et c'est aussi le nôtre.

7. – Formes N-nouvelles et N-anciennes.

Soit M un diviseur de N et U_p un sous-groupe d'indice fini dans $R_p^\times$; alors $U(N, U_p) \subseteq U(M, U_p)$. Si d est un diviseur de N/M et $l|N$ posons

$$R_l'(N) = \eta_{d,l} R_l(N) \eta_{d,l}^{-1}$$

où $\eta_{d,l} = i_l^{-1}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $U'(N) = \prod_{l \nmid Np} R_l(N)^\times \times \prod_{l|N} R_l'(N)^\times \times U_p$ est un sous-groupe compact ouvert de $B_{\mathbf{A}}^\times$, contenu dans $U(M, U_p)$. Soit $\eta_d = (\eta_{d,l}) \in B_{\mathbf{A}}^\times$ où $\eta_{d,l} = 1$ si $l \nmid N$; définissons

$$j_d \colon S_k(U(M, U_p)) \to S_k(U(N, U_p))$$

$$\varphi \mapsto \eta_d^{-1} \varphi$$

où $\eta_d^{-1}\varphi(g) = \varphi(g\eta_d^{-1})$. Le sous-espace de $S_k(U(N, U_p))$ engendré par les images des fonctions j_d pour $M \neq N$ sera noté $S_k(U(N, U_p))^{N-\mathrm{old}}$; on note $S_k(U(N, U_p))^{N-\mathrm{new}}$ son espace orthogonal pour le produit de Petersson.

PROPOSITION 7.0.6. – *On a la décomposition*

$$S_k(U(N, U_p)) = \bigoplus_{M|N} \Big[\bigoplus_{d|N/M} j_d(S_k(U(M, U_p))^{M-\mathrm{new}}) \Big] \tag{18}$$

où les expressions entre crochets sont orthogonales l'une à l'autre et sont des modules sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(U(N, U_p), \mathbf{Z})$.

DÉMONSTRATION. – L'algèbre $\mathcal{H}_k(U(N, U_p), \mathbf{Z})^{(N)}$ est diagonalisable, étant engendrée par un système commutatif d'opérateurs normaux; comme j_d commute aux opérateurs T_q, $T_{q,q}$ si $q \nmid N$, les expressions entre crochets sont stables par l'action de $\mathcal{H}_k(U(N, U_p), \mathbf{Z})^{(N)}$. Donc la somme extérieure est directe;

elle est aussi orthogonale, parce que les formes propres dans deux blocs différents engendrent des représentations différentes (leurs conducteurs sont différents) et donc ils ont des systèmes de valeurs propres distincts. Soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ une base de $S_k(U(M, U_p))^{M-\text{new}}$ constituée par des fonctions propres pour l'algèbre $\mathcal{H}_k(U(N, U_p), \boldsymbol{Z})^{(N)}$. Réunissons les φ_i selon la représentation irréductible de $B_{\boldsymbol{A}}^\times$ qu'elles engendrent:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = \coprod_{\pi_\alpha} \{\varphi_\alpha^1, \ldots, \varphi_\alpha^{l_\alpha}\}.$$

Soit n_0 le nombre de diviseurs positifs de N/M. Pour chaque α, soit W_α le sous-espace de π_α qui est invariant par $U(M, U_p)$; par la théorie de Atkin-Lehner (cf. [4] ou [12]), $\dim W_\alpha = n_0 m_\alpha$ où m_α est la dimension du sous-espace de $\pi_{\alpha, p}$ fixé par U_p et W_α est engendré comme $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel par $\{j_d(\varphi_\alpha^i) \,|\, d | N/M,\ i = 1, \ldots, l_\alpha\}$. On a donc $l_\alpha = m_\alpha$. Alors

$$\dim\Big(\sum_{d|N/M} j_d(S_k(U(M, U_p))^{M-\text{new}})\Big) = \dim \bigoplus_\alpha V_\alpha = \sum_\alpha n_0 m_\alpha$$

$$= n_0 \dim\, S_k(U(M, U_p)),$$

ce qui montre que la somme extérieure est directe. ■

REMARK 7.0.7. – Comme on l'a vu dans la démonstration de la Proposition 7.0.6, on ne peut pas parler d'un théorème de multiplicité 1 pour les formes nouvelles quaternioniques, sauf si U_p est maximal.

Néanmoins, comme le nouveau vecteur d'une représentation de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_l)$ est vecteur propre de l'opérateur de Hecke $\widetilde{T}(l)$, on a

PROPOSITION 7.0.8. – *L'espace $S_k(U(N, U_p))^{N-\text{new}}$ a une base constituée par des formes propres pour toute l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(U(N, U_p), \boldsymbol{Z})$.*

8. – La correspondance de Jacquet-Langlands adélique.

La correspondance de Jacquet-Langlands est définie en termes de représentations. Comme la notion de «forme normalisée» n'a pas de sens pour les formes quaternioniques en l'absence de q-développements, il'est impossible de définir une correspondance canonique directe entre formes automorphes pour $B_{\boldsymbol{A}}^\times$ et formes automorphes pour $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A})$. Cependant, il est possible de définir une correspondance de Jacquet-Langlands non-canonique, qui a un bon comportement par rapport à l'action des opérateurs de Hecke.

Soit (B, Δ, R) une donnée quaternionique, avec $\Delta = \Delta' p$. Soit $R(N)$ un ordre de Eichler de niveau N dans R. Pour chaque entier positif s soit $V_s(N)$ le (p, N)-groupe dont la composante en p est $U_p = 1 + u_p^s R_p$ pour une uniformisante u_p de $B_p^\times$.

Soit $\varphi \in S_k(V_s(N))^{N-\mathrm{new}}$ une fonction propre pour l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(V_s(N), \boldsymbol{Z})$. La représentation $\pi = \pi_\varphi$ de $B_{\boldsymbol{A}}^\times$ associée à φ est irréductible, par le Corollaire 6.0.4. La Proposition 5.2.2 entraîne que la transformée de Jacquet-Langlands $\mathrm{JL}(\pi)$ a conducteur $N\Delta' p^t$, avec $1 \leq t \leq s+1$. Puisque π_q est fixée par $R_q^\times$ si $q|\Delta'$, et que $R_q^\times$ est distingué dans $B_q^\times$, π_q a dimension 1.

Par [10, § 4], $\pi_q = \psi \circ \nu$ où ψ est un caractère de $\boldsymbol{Q}_q^\times$; puisque $\nu : R_q^\times \to \boldsymbol{Z}_q^\times$ est surjective, le caractère ψ est non-ramifié. D'après [10, page 125], $\pi(\pi_q)$ est la représentation spéciale $\sigma(\psi|\,|^{1/2}, \psi|\,|^{-1/2})$ de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_q)$.

Soit $U(M, p^r)$ le sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A})$ défini par

$$U(M, p^r) = U_0(M) \cap U_1(p^r).$$

Par [8, § 5], il existe une unique forme nouvelle normalisée $\tilde{\varphi}$ dans l'espace $S_k(U(N\Delta', p^t))$, propre pour l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^t), \boldsymbol{Z})$, telle que $\pi_{\tilde{\varphi}} = \mathrm{JL}(\pi)$. En particulier on a $\pi_{\tilde{\varphi}, l} = \pi_l$ si l ne divise pas Δ.

PROPOSITION 8.0.9. – *Les valeurs propres de T_q, $T_{l,l}$ pour φ et les valeurs propres de T_q, $T_{l,l}$ pour $\tilde{\varphi}$ coïncident pour chaque premier $q \neq p$ et chaque $l \nmid N\Delta$.*

DÉMONSTRATION. – L'énoncé est clair pour les $T_{l,l}$ et pour les T_q si $q \nmid \Delta'$. Dans ce cas en effet π_q et $\pi(\pi_q)$ coïncident. Soit q un diviseur premier de Δ'. On a dejà remarqué que $\pi_q = \psi \circ \nu$ où ψ est un caractère non ramifié de $\boldsymbol{Q}_q^\times$; alors l'opérateur T_q agit sur φ par multiplication par $q^{k/2-1}\psi \circ \nu(u_q) = q^{k/2-1}\psi(q)$. D'autre côté on a vu que $\pi(\pi_q)$ est la représentation spéciale $\sigma(\psi|\,|^{1/2}, \psi|\,|^{-1/2})$ de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Q}_q)$. On montre par un calcul direct (voir [15]) que la valeur propre de $\tilde{T}(q)$ sur le nouveau vecteur de cette représentation est $\psi(q)$, et donc que $T_q(\tilde{\varphi}) = q^{k/2-1}\psi(q)\,\tilde{\varphi}$. ∎

Par la Proposition 7.0.8 il existe une base $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ de l'espace $S_k(V_s(N))^{N-\mathrm{new}}$ constituée de fonction propres pour l'algèbre $\mathcal{H}(V_s(N))$. En prolongeant l'association $\varphi_i \mapsto \tilde{\varphi}_i$ par $\boldsymbol{C}$-linéarité on obtient un homomorphisme (qui en général n'est pas injectif et qui dépend du choix de $\mathcal{B}$) de $\boldsymbol{C}$-espaces vectoriels:

$$\mathrm{JL} = \mathrm{JL}_{\mathcal{B}} \colon S_k(V_s(N))^{N-\mathrm{new}} \to S_k(U(N\Delta', p^{s+1}))^{N\Delta'-\mathrm{new}}.$$

Par la Proposition 8.0.9, JL est compatible avec les opérateurs T_q, $(q \neq p)$ et $T_{l,l}$, $(l, N\Delta) = 1$. On prolonge JL aux formes anciennes en imposant que $JL \circ j_d = j_d \circ \mathrm{JL}$. Par la décomposition 18 on construit ainsi un homomorphisme

$$\mathrm{JL} : S_k(V_s(N)) \to S_k(U(N\Delta', p^{s+1})) \tag{19}$$

dont l'image est contenue dans l'espace des formes Δ'-nouvelles.

PROPOSITION 8.0.10. – *L'homomorphisme* 19 *est équivariant pour l'action des opérateurs* T_q, $T_{q,q}$.

DÉMONSTRATION. – Si $q \nmid N$, j_d commute à T_q et $T_{q,q}$. L'énoncé est donc clair. Supposons $q \mid N$. Soit $\varphi \in S_k(V_s(M))^{M-\text{new}}$ une forme propre pour l'algèbre $\mathcal{H}_k(V_s(M), \boldsymbol{Z})$. Soit d un diviseur de N/M. On a

$$T_q j_d(\varphi) = \sum_i \lambda_i j_{d_i}(\varphi), \tag{20}$$

avec $\lambda_i \in \boldsymbol{C}$, $d_i \mid N/M$. Les coefficients λ_i ne dépendent que des composantes de π_φ aux premiers divisant N. Comme N est premier à Δ, la relation 20 vaut aussi pour $\tilde{\varphi}$. On en déduit l'équivariance pour T_q. ■

L'image de $S_k(V_s(N))$ par l'homomorphisme JL est contenue dans le sous-espace de $S_k(U(N\Delta', p^{s+1}))$ engendré par les formes propres pour l'algèbre $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), \boldsymbol{Z})$ dont la représentation de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A})$ associée est spéciale en $q \mid \Delta'$ et spéciale ou supercuspidale en p (donc forcement Δ'-nouvelles). Nous noterons $W_k(U(N\Delta', p^{s+1}))$ cet espace et pour chaque sous-anneau A de $\boldsymbol{C}$ nous noterons $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), A)|_W$ la restriction de $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), A)$ à $W_k(U(N\Delta', p^{s+1}))$.

THÉORÈME 8.0.11. – *L'homomorphisme* JL *induit un homomorphisme surjectif, indépendant de la base choisie* $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \mathrm{JL}^*\colon \mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), \boldsymbol{Z}) &\to \mathcal{H}_k(V_s(N), \boldsymbol{Z}) \\ T_q &\mapsto T_q \\ T_{q,q} &\mapsto T_{q,q}. \end{aligned}$$

Pour chaque sous-anneau A *de* $\boldsymbol{C}$ *il identifie l'algèbre* $\mathcal{H}_k(V_s(N), A)$ *à l'algèbre* $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), A)|_W$.

DÉMONSTRATION. – Pour la première assertion: la surjectivité est claire parce que les deux algèbres sont engendrées par les opérateurs T_q, $T_{q,q}$; il faut prouver que la flèche est bien définie. Soit T un polynôme dans les T_q, $T_{q,q}$ à coefficients dans $\boldsymbol{Z}$ qui soit nul sur $S_k(U(N\Delta', p^{s+1}))$; il faut montrer que $T = 0$ sur $S_k(V_s(N))$. Nous utilisons la décomposition 18; par les Propositions 7.0.8 et 8.0.9, T est nul sur $S_k(V_s(N))^{N-\text{new}}$. Soit M un diviseur de N; soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subseteq S_k(V_s(M))^{M-\text{new}}$ un ensemble maximal de formes linéairement indépendantes propres pour $\mathcal{H}_k(V_s(M), \boldsymbol{Z})$ dont la représentation associée est la même représentation irréductible π de $B_A^\times$. Alors JL envoie les φ_i sur la même forme φ dans $S_k(U(N\Delta', p^{s+1}))$. Pour $i = 1, \ldots, m$ l'espace

$V_i = \bigoplus_{d|N/M} \boldsymbol{C} j_d(\varphi_i)$ est stable par tous les opérateurs de Hecke et JL envoie injectivement V_i dans l'espace $V = \bigoplus_{d|N/M} \boldsymbol{C} j_d(\varphi)$, donc $T = 0$ sur $\bigoplus_i V_i$. On déduit que T est nul sur chaque bloc entre crochets de la décomposition 18, donc T est nul sur $S_k(V_s(N))$. Pour la deuxième assertion, il faut montrer que la restriction à l'image de JL de l'algèbre $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), \boldsymbol{Z})$ coïncide avec $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), \boldsymbol{Z})|_W$, donc que si T est nul sur Im (JL) alors il est nul sur $W_k(U(N\Delta', p^{s+1}))$. Soit $\{\pi_\alpha\}$ l'ensemble des représentation automorphes de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A})$ de conducteur divisant $N\Delta' p^{s+1}$, de caractère central de conducteur une puissance de p, et qui soient de carré intégrable aux premiers divisant Δ et de poids k à l'infini. Soit M_α le conducteur de π_α. Comme les π_α sont spéciales aux premiers divisant Δ', $M_\alpha = \Delta' M'_\alpha$ avec $(M'_\alpha, \Delta') = 1$. Pour chaque α il existe une forme normalisée $\varphi_\alpha \in W_k(U(M_\alpha, p^{s+1}))$ telle que $\pi_{\varphi_\alpha} = \pi_\alpha$. Par la théorie d'Atkin-Lehner

$$W_k(U(N\Delta', p^{s+1})) = \bigoplus_\alpha \bigoplus_{d \left| \frac{Np^{s+1}}{M'_\alpha}\right.} \boldsymbol{C} j_d(\varphi_\alpha).$$

Si $d \left| \dfrac{Np^{s+1}}{M'_\alpha} \right.$ on peut écrire $d = p^r d'$ avec $p \nmid d'$; on a alors $j_d = j_{p^r} \circ j_{d'}$. Remarquons que $j_{d'}(\varphi_\alpha) \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{JL})$ et que $\mathcal{H}_k(U(N\Delta', p^{s+1}), \boldsymbol{Z})$ commute avec j_{p^r} car les opérateurs de Hecke qu'on considère n'ont pas de composantes en p. Par conséquent $T(j_d(\varphi_\alpha)) = 0$ pour tout α et tout d et donc T est nul sur $W_k(U(N\Delta', p^{s+1}))$. ■

9. – Propriétés de l'algèbre de Hecke.

Soit M est un entier premier à p. Il est bien connu que l'espace $S_k(U(M, p^s))$ peut être plongé dans $\boldsymbol{C}[\![q]\!]$ par le développement en série de Fourier à la pointe ∞. Cela permet de munir S_k d'une structure entière canonique: si A est un sous-anneau de $\boldsymbol{C}$ posons

$$S_k(U(M, p^s), A) = S_k(U(M, p^s)) \cap A[\![q]\!]$$

$$W_k(U(M, p^s), A) = W_k(U(M, p^s)) \cap A[\![q]\!]\,.$$

Alors $W_k(U(M, p^s), A)$ est un A-sous module de $S_k(U(M, p^s), A)$ et le quotient est sans A-torsion.

Soit $\mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})$ la $\boldsymbol{Z}$-algèbre de Hecke complète (c'est-à-dire comprenant l'opérateur T_p) dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(S_k(U(M, p^s)))$. Les faits suivants sont standard (voir par exemple [16, Chap. III]):

PROPOSITION 9.0.12. – *Soient M un entier premier à p, $A \subseteq \boldsymbol{C}$ un anneau.*

a) $\mathcal{H}_k^{\natural}(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})$ *est libre de type fini sur* $\boldsymbol{Z}$;

b) $S_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})$ *est stable par l'algèbre* $\mathcal{H}_k^{\natural}(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})$;

c) *La fonction*

$$\langle\, ,\rangle : \mathcal{H}_k^{\natural}(U(M, p^s), A) \times S_k(U(M, p^s), A) \to A$$

définie par $\langle h, f\rangle = a_1(f|h)$, *est un accouplement parfait*;

d) $S_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})$ *est libre de type fini sur* $\boldsymbol{Z}$;

e) $\mathcal{H}_k^{\natural}(U(M, p^s), \boldsymbol{Z}) \otimes_{\boldsymbol{Z}} A \simeq \mathcal{H}_k^{\natural}(U(M, p^s), A)$;

f) $S_k(U(M, p^s), A) = S_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z}) \otimes_{\boldsymbol{Z}} A$;

PROPOSITION 9.0.13. – *L'espace* $W_k(U(M, p^s))$ *est défini sur* $\boldsymbol{Q}$:

$$W_k(U(M, p^s)) = W_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Q}) \otimes_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{C}\,.$$

DÉMONSTRATION. – La décomposition

$$S_k(U(M, p^s)) = \bigoplus_{\substack{D|M \\ r \leqslant s}} \left[\bigoplus_{d \left| \frac{Mp^s}{Dp^r} \right.} j_d(S_k(U(D, p^r))^{\mathrm{new}}) \right]$$

étant définie sur $\boldsymbol{Q}$, il suffit de montrer que l'espace

$$W_k(U(M, p^s))^{\mathrm{new}} = W_k(U(M, p^s)) \cap S_k(U(M, p^s))^{\mathrm{new}}$$

est défini sur $\boldsymbol{Q}$. Comme les valeurs propres des formes cuspidales sont algébriques, il est bien sur défini sur $\overline{\boldsymbol{Q}}$. Le groupe de Galois $G_{\boldsymbol{Q}} = Gal(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ agit $\boldsymbol{Q}$-linéairement sur $S_k(U(M, p^s), \overline{\boldsymbol{Q}})^{\mathrm{new}}$ par $\sigma : f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \mapsto f^\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^\sigma q^n$. Nous allons montrer que $W_k(U(M, p^s), \overline{\boldsymbol{Q}})$ est stable par l'action de $G_{\boldsymbol{Q}}$. Soit $f \in W_k(U(M, p^s))$ une forme nouvelle normalisée, et $\pi_f = \bigotimes_v \pi_{f,v}$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\boldsymbol{A})$ associée. Étant donné $\sigma \in G_{\boldsymbol{Q}}$, on peut considérer pour chaque place v de $\boldsymbol{Q}$ la représentation $\pi_{f,v}^\sigma$ définie dans [20, I.1]. Par [20, Th. I.8.1], la représentation $\pi_f^\sigma = \bigotimes_v \pi_{f,v}^\sigma$ est une représentation automorphe dans l'espace $\mathcal{A}_0(\sigma \circ \varepsilon)$ de Jacquet-Langlands, où ε est le caractère central de π_f. C'est facile de vérifier que $\pi_{f,v}^\sigma$ et $\pi_{f^\sigma,v}$ ont les mêmes valeurs propres de Hecke, pour tout v sauf qu'un nombre fini; on en déduit par la multiplicité 1 que $\pi_f^\sigma = \pi_{f^\sigma}$. D'après [20, Exemple p. 125], $\pi_{f,v}^\sigma$ est principale, spéciale ou supercuspidale si $\pi_{f,v}$ l'est. Donc $f^\sigma \in W_k(U(M, p^s))$. On conclut en utilisant le lemme suivant d'algèbre lineaire [2, Chapitre 5, § 4]:

LEMME 9.0.14. – *Soient K une estension galoisienne de $\boldsymbol{Q}$, W un K-sous-espace vectoriel de K^n stable par l'action de* $\mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q})$; *alors* $\dim_{\boldsymbol{Q}}(W \cap \boldsymbol{Q}^n) = \dim_K W$.

COROLLAIRE 9.0.15. – *Soient M un entier premier à p, A un anneau contenu dans $\boldsymbol{C}$.*

a) $W_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})$ *est libre sur* $\boldsymbol{Z}$, *de rang égal à* $\dim_{\boldsymbol{C}} W_k(U(M, p^s))$;

b) *L'accouplement*

$$\langle\, , \rangle : \mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), A)\,|_{W_k} \times W_k(U(M, p^s), A) \to A$$

défini par $\langle h, f\rangle = a_1(f|h)$ *est parfait;*

c) $\mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), A)\,|_{W_k} = \mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})\,|_{W_k} \otimes_{\boldsymbol{Z}} A$;

d) $W_k(U(M, p^s), A) = W_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z}) \otimes_{\boldsymbol{Z}} A$;

e) $\mathcal{H}_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})\,|_{W_k}$ *est libre de type fini sur* $\boldsymbol{Z}$;

f) $\mathcal{H}_k(U(M, p^s), A)\,|_{W_k} = \mathcal{H}_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})\,|_{W_k} \otimes_{\boldsymbol{Z}} A$;

g) *Soit*

$$L = \{ f \in W_k(U(M, p^s)) \,|\, a_n(f) = 0 \ \textit{pour tout } n \textit{ tels que } p \nmid n \}.$$

Alors

$$\dim_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), \boldsymbol{C})\,|_{W_k}) - \dim_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{H}_k(U(M, p^s), \boldsymbol{C})\,|_{W_k}) = \dim_{\boldsymbol{C}}(L).$$

DÉMONSTRATION. – a) est une conséquence du fait que $S_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})$ est libre de type fini sur $\boldsymbol{Z}$, et du fait que $W_k(U(M, p^s))$ est défini sur $\boldsymbol{Q}$; b): l'accouplement de la Proposition 9.0.12 c) est bien défini et parfait sur $\mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), A)\,|_{W_k} \times W_k(U(M, p^s), A)$; c): on a un homomorphisme surjectif naturel

$$\theta : \mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})\,|_{W_k} \otimes_{\boldsymbol{Z}} A \to \mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), A)\,|_{W_k};$$

si $A = \boldsymbol{C}$, les dimensions des deux espaces sont égales par b), donc θ est injectif parce que $\mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), A)\,|_{W_k} \subseteq \mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), \boldsymbol{C})\,|_{W_k}$; d): comme W_k est défini sur $\boldsymbol{Q}$ on a une injection naturelle

$$\alpha : W_k(U(M, p^s), \boldsymbol{Z}) \otimes A \to W_k(U(M, p^s), A);$$

l'algèbre $\mathcal{H}_k^\sharp(U(M, p^s), \boldsymbol{Z})\,|_{W_k}$ est un quotient sans $\boldsymbol{Z}$-torsion d'une algèbre finie sur $\boldsymbol{Z}$, donc elle est libre; par b) et c)

$$\begin{aligned} W_k(U(M,p^s),\boldsymbol{Z})\otimes_{\boldsymbol{Z}}A &= \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\mathcal{H}_k^{\sharp}(U(M,p^s),\boldsymbol{Z})\,|_{W_k},\boldsymbol{Z})\otimes_{\boldsymbol{Z}}A \\ &= \mathrm{Hom}_A(\mathcal{H}_k^{\sharp}(U(M,p^s),\boldsymbol{Z})\,|_{W_k}\otimes_{\boldsymbol{Z}}A, A) \\ &= \mathrm{Hom}_A(\mathcal{H}_k^{\sharp}(U(M,p^s),A)\,|_{W_k}, A); \end{aligned}$$

d'après b) on a une injection

$$W_k(U(M,p^s),A)\to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{H}_k^{\sharp}(U(M,p^s),A)\,|_{W_k},A),$$

qui est l'inverse de α; e) est évident car $\mathcal{H}_k(U(M,p^s),\boldsymbol{Z})\,|_{W_k}$ est une sous-algèbre sans $\boldsymbol{Z}$-torsion d'une algèbre finie sur $\boldsymbol{Z}$; f) on a une surjection naturelle $\beta:\mathcal{H}_k(U(M,p^s),\boldsymbol{Z})\otimes_{\boldsymbol{Z}}A\to\mathcal{H}_k(U(M,p^s),A)\,|_{W_k}$; comme A est plat sur $\boldsymbol{Z}$, $\mathcal{H}_k(U(M,p^s),\boldsymbol{Z})\,|_{W_k}\otimes_{\boldsymbol{Z}}A$ s'injecte dans $\mathcal{H}_k^{\sharp}(U(M,p^s),\boldsymbol{Z})\,|_{W_k}\otimes_{\boldsymbol{Z}}A$ et ce dernier est égal à $\mathcal{H}_k^{\sharp}(U(M,p^s),A)\,|_{W_k}$, par c); puisque $\mathcal{H}_k(U(M,p^s),A)\,|_{W_k}$ est contenu dans $\mathcal{H}_k^{\sharp}(U(M,p^s),A)\,|_{W_k}$, β est injective; g) est une conséquence directe de b). ■

Remarquons que les formes dans L sont exactement les formes du type $g(pz)$ pour $g\in S_k(U(N,p^{s-1}))$, voir par exemple [13, Theorem 4.6.8].

COROLLAIRE 9.0.16. – *Pour tout* $s\geqslant 0$

a) $\mathcal{H}_k(V_s(N),\boldsymbol{Z})$ *est libre de type fini sur* $\boldsymbol{Z}$;

b) $\mathcal{H}_k(V_s(N),A)=\mathcal{H}_k(V_s(N),\boldsymbol{Z})\otimes_{\boldsymbol{Z}}A$ pour tout anneau $A\subseteq\boldsymbol{C}$.

REFERENCES

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Hermann, Paris, 1974.
[2] N. BOURBAKI, *Algèbre*, vol. **2**, Masson, Paris, 1981.
[3] W. CASSELMAN, *On representations of* GL_2 *and the arithmetic of modular curves*. In *Modular forms of one variable II* (1972), vol. **320** de Lecture Notes Math., Springer, pp. 107-141.
[4] W. CASSELMAN, *On some results of Atkin and Lehner*, Math. Ann., **201** (1973), 301-314.
[5] B. CONRAD - F. DIAMOND - R. TAYLOR, *Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations*, J. Amer. Math. Soc., **12** (1999), 521-567.
[6] F. DIAMOND, *On deformation rings and Hecke rings*, Ann. of Math., **144** (1996), 137-166.

[7] D. Flath, *Decomposition of representations into tensor products*. In *Automorphic Forms, Representations, and L-functions* (1979), vol. **33** de Proc. Symp. Pure Math., Springer, 179-183.
[8] S. Gelbart, *Automorphic forms on adele groups*, vol. **83** de Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1975.
[9] H. Hida, *On p-adic Hecke algebras for* GL_2 *over totally real fields*, Ann. of Math., **128** (1988), 295-384.
[10] H. Jacquet - R. Langlands, *Automorphic forms on* GL_2, vol. **114** de Lecture Notes Math., Springer, 1970.
[11] B. Mazur, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*. In *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*, G. Cornell, H. Silverman, et G. Stevens, Eds. Springer, 1997, 243-311.
[12] T. Miyake, *On automorphic forms on* GL_2 *and Hecke operators*, Ann. of Math., **94** (1971), 174-189.
[13] T. Miyake, *Modular forms*, Springer, 1989.
[14] A. Mori, *An expansion principle for quaternionic modular forms*, preprint, 1997.
[15] A. Mori - L. Terracini, *A canonical map between Hecke algebras*, Boll. Un. Mat. Ital. (8), **2**-B (1999), 429-452.
[16] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1971.
[17] R. Taylor - A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (1995), 553-572.
[18] L. Terracini, *A Taylor-Wiles system for quaternionic Hecke algebras*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 15 (2000).
[19] M. Vignéras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, vol. 800, Springer, 1980.
[20] J.-L. Waldspurger, *Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur* GL(2), Compositio Mathematica, **54** (1985), 121-171.
[21] A. Weil, *Basic number theory*, Springer, 1967.
[22] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat last Theorem*, Ann. of Math., **141** (1995), 443-551.

Lea Terracini: Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino, Italia

Pervenuta in Redazione
il 22 luglio 2000