Bollettino Unione Matematica Italiana

Sonia Chessa, Hisao Fujita Yashima

Equazione stocastica di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **5-B** (2002), n.3, p. 789–804.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5B_3_789_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2002.

Bollettino U. M. I.
(8) 5-B (2002), 789-804

Equazione stocastica di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore.

SONIA CHESSA - HISAO FUJITA YASHIMA

Summary. – *We consider the stochastic equation which models the population dynamics of two species of prey-predator type with stochastic perturbations. First we prove the existence and the uniqueness of the solution of this equation. For this it is essential to introducean auxiliary function with which approximate solutions are constructed. Then we show that, if no stochastic perturbation due to demographic stochasticity is present and only stochastic perturbations representing enviornmental variations are present, so in a finite time the extinction of species almost surely does not occur.*

Sunto. – *Si considera l'equazione stocastica che modellizza la dinamica di popolazioni di due specie di tipo preda-predatore sotto perturbazioni stocastiche. Si dimostrano in primo luogo l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione; per questo è essenziale introdurre una funzione ausiliaria con cui si costruiscono soluzioni approssimate. Si dimostra inoltre che, se non sono presenti perturbazioni stocastiche dovute alla stocasticità demografica, ma solo perturbazioni stocastiche rappresentanti variazioni ambientali, allora quasi sicuramente non avviene l'estinzione di una specie in un tempo finito.*

1. - Introduzione.

Nel presente lavoro ci si propone di studiare un modello di dinamica di popolazioni per due specie preda e predatrice in presenza della perturbazione stocastica intesa rappresentare le variazioni aleatorie di condizioni ambientali e la casualità di nascita e di morte. Si considera in effetti l'equazione stocastica formata dal termine deterministico $G(X, Y)\,dt$ (si veda la (1.2)) e dal termine stocastico $\Theta(X, Y)\,dW$ e, come risultati principali di questo lavoro, si dimostrano l'esistenza e l'unicità della soluzione di tale equazione e, nel caso della presenza della sola perturbazione stocastica ambientale, l'assenza di estinzione ovvero il quasi certo non raggiungimento del valore 0 dei processi stocastici X, Y rappresentanti la grandezza delle popolazioni.

Il modello deterministico $\frac{d}{dt}Z = G(Z)$, $Z = (X, Y)$, noto come equazione di Lotka-Volterra, di dinamica di popolazioni «preda-predatore», è stato oggetto di numerosi lavori a partire dalla celebre opera [12] dello stesso Volterra e si conoscono varie proprietà e vari aspetti dell'equazione tra cui l'esistenza di soluzioni periodiche nel caso di assenza di effetti logistici e l'esistenza di soluzioni convergenti al punto di equilibrio nel caso di presenza di tali effetti.

Nel nostro lavoro considereremo l'equazione stocastica

$$dZ = G(Z)\,dt + \Theta(Z)\,dW\,, \qquad Z(0) = Z_0 \tag{1.1}$$

per un processo stocastico $Z = (X, Y)$ a valori in $\mathbb{R}^2$; la funzione $G(\cdot)$ è data da

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x^+ - \beta x^+ y^+ - \mu (x^+)^2 \\ -\gamma y^+ + \delta x^+ y^+ - \nu (y^+)^2 \end{pmatrix} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)\,, \tag{1.2}$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ sono costanti tali che $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ e che $\mu, \nu \geq 0$, mentre W è un moto browniano definito sulla base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ e $\Theta(z)$ una matrice di tipo $(2 \times n)$ dipendente da $z \in \mathbb{R}^2$. Qui e in seguito, per ogni numero reale x, si denota con x^+ la sua parte positiva, definita da $x^+ = \max(x, 0)$.

Nell'equazione (1.1), $X(t)$ rappresenterà la grandezza, all'istante t, della popolazione della specie preda, il cui tasso di crescita naturale è positivo $(\alpha > 0)$, mentre $Y(t)$ rappresenterà quella della specie predatrice, il cui tasso di crescita naturale in assenza di prede rappresentate da X è negativo $(-\gamma < 0)$. Come è noto, nel modello con $\mu = \nu = 0$ si intende trascurare la limitatezza logistica dell'ambiente, mentre se $\mu > 0$, $\nu > 0$, si tratta di un modello che tiene conto di tale effetto.

Innanzitutto studieremo l'equazione (1.1) sotto l'ipotesi di lipschitzianità di $\Theta(x, y) = (\Theta_{ij}(x, y))$, cioè supponendo che esista una costante K_0 tale che

$$|\Theta_{ij}(x, y) - \Theta_{ij}(x', y')| \leq K_0 |(x, y) - (x', y')| \quad \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 \tag{1.3}$$

per $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, n$. Si supporrà inoltre che

$$Z_0 : \mathcal{F}_0\text{-misurabile}, \qquad \mathbb{E}(|Z_0|^2) < \infty\,. \tag{1.4}$$

Nel paragrafo 4 sarà dimostrato il teorema di esistenza e unicità per l'equazione (1.1) con le condizioni (1.3), (1.4).

Tuttavia, per modellizzare propriamente la dinamica di popolazioni, bisogna definire in modo appropriato la matrice $\Theta(z)$ e introdurre alcune modifiche al problema in modo che le grandezze di due popolazioni risultino non negative e la popolazione di una specie una volta estinta rimanga nulla nei tempi posteriori; cioè i processi stocastici X e Y dovranno essere sempre ≥ 0 q.c. (qui e in seguito «q.c.» sta per «quasi certamente») e se $X(\omega, t) = 0$ allora $X(\omega, t') = 0$ $\forall t' \geq t$ ed analogamente per Y. Come matrice Θ per il modello propriamente di dinamica di popolazioni, proponiamo

$$\Theta(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma_0 \sqrt{x^+} & 0 & \sigma_1 x^+ \\ 0 & \varrho_0 \sqrt{y^+} & \varrho_1 y^+ \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

seguendo delle considerazioni sulla dinamica di popolazioni, secondo cui il termine stocastico dovuto alla stocasticità demografica (cioè di nascita e di morte) sarà proporzionale alla radice quadrata della grandezza della popolazione, mentre quello dovuto alle variazioni aleatorie di condizioni ambientali, che agiscono contemporaneamente su tutte le specie, sarà proporzionale alla grandezza della popolazione (per la motivazione di tali scelte e ulteriori considerazioni si vedano per esempio [1], [7]). Nel paragrafo 5, costruiremo la soluzione di questo modello con Θ data dalla (1.5), mostrando anche che tale soluzione come soluzione di questo modello risulta unica.

Nel paragrafo 6, dimostreremo l'assenza di estinzione nel caso in cui $\sigma_0 = \varrho_0 = 0$ nella (1.5); ciò, nella sua interpretazione, può significare che, se le popolazioni di due specie sono sufficientemente grandi da poter trascurare la perturbazione dovuta alla stocasticità demografica, allora nonostante le perturbazioni ambientali non ci sarà estinzione né della specie preda né della specie predatrice.

A proposito del problema di estinzione nella dinamica di popolazioni sono noti tali fenomeni dovuti alla perturbazione stocastica (si vedano [6], [9]); in particolare nel caso di una specie isolata, utilizzando le condizioni di Feller-Ventsel' sulla frontiera, Feldman e Rouhgarden ([2]) hanno messo in evidenza l'esistenza o meno di estinzione a seconda della presenza o meno di stocasticità demografica. D'altra parte, in [4] sono state fatte alcune osservazioni circa la stabilità per modelli di una specie e quelli di due specie in competizione. Il problema della stabilità è stato studiato anche per modelli a tempo discreto ([3], [11]). In [10] è ottenuta, invece, una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni periodiche dell'equazione stocastica per una specie, mentre per modelli di n specie in competizione vengono mostrate in [13] condizioni sufficienti di esistenza di soluzioni periodiche. È da notare che, diversamente dal caso del rapporto preda-predatore, nel caso del rapporto di competizione il termine deterministico avrà un comportamento simile al caso di una specie, il che facilita la risoluzione dell'equazione.

Per quanto riguarda il modello stocastico di dinamica di popolazioni di due specie legate dal rapporto preda-predatore, a nostra conoscenza, non erano finora presenti in letteratura risultati matematici fondamentali. La difficoltà di questo modello matematico è, a nostro avviso, dovuta al comportamento del termine deterministico, che non è facile controllare. Meritano tuttavia di essere citati alcuni studi di Pavlotskij e Suslin (per esempio [8]), che hanno esaminato un modello stocastico di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore anche se con un metodo assai diverso da quello del presente lavoro.

2. – Funzione ausiliaria e problemi approssimati.

Per la dimostrazione del teorema di esistenza e unicità dell'equazione (1.1) è essenziale introdurre una funzione ausiliaria. Per definirla in modo opportuno, scegliamo quattro numeri positivi κ λ, ε_1, ε_2 tali che

$$\frac{\delta}{\beta} < \frac{\kappa}{\lambda}, \qquad \varepsilon_1 < \frac{\lambda}{4\kappa}, \qquad \varepsilon_2 < \frac{\kappa}{4\lambda}. \tag{2.1}$$

Introduciamo inoltre due funzioni $\vartheta_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, non decrescenti tali che

$$\vartheta_i(r) = 0 \text{ per } r \leqslant -\varepsilon_i, \ \vartheta_i(r) = 1 \text{ per } r \geqslant 0, \ 0 \leqslant \frac{d\vartheta_i(r)}{dr} \leqslant \frac{2}{\varepsilon_i} \quad (i = 1, 2). \tag{2.2}$$

Ora consideriamo una funzione $\varphi(x, y)$ avente le forme

$$\varphi(x, y) = \vartheta_1\left(\frac{x}{y}\right)(\kappa x + \lambda y) + \left(1 - \vartheta_1\left(\frac{x}{y}\right)\right)(-\kappa x + \lambda y) \qquad \text{in } D_1, \tag{2.3}$$

$$\varphi(x, y) = \vartheta_2\left(\frac{y}{x}\right)(\kappa x + \lambda y) + \left(1 - \vartheta_2\left(\frac{y}{x}\right)\right)(\kappa x - \lambda y) \qquad \text{in } D_2, \tag{2.4}$$

ove

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0, \ x^2 + y^2 > 1\}, \ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, \ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Si vede immediatamente che in $D_1 \cap D_2$ le espressioni di $\varphi(x, y)$ date nella (2.3) e nella (2.4) coincidono e si riducono a $\varphi(x, y) = \kappa x + \lambda y$. Si constata facilmente che esistono due costanti positive C_1, C_2 tali che

$$C_1\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \varphi(x, y) \leqslant C_2\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{in } D_1 \cup D_2.$$

Inoltre, calcolando esplicitamente le derivate prime e seconde di $\varphi(x, y)$ e tenendo conto delle condizioni (2.1), (2.2), si osserva che in $D_1 \cup D_2$ valgono le disuguaglianze

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| \leqslant C_3, \qquad \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right| \leqslant \frac{C_4}{\varphi(x, y)}$$

con due costanti C_3, C_4 (indipendenti da $(x, y) \in D_1 \cup D_2$). Non è difficile prolungare la funzione $\varphi(x, y)$ in tutto $\mathbb{R}^2$ in maniera che risulti $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che le disuguaglianze per le derivate prime e seconde vengano generalizzate su $\mathbb{R}^2$, più precisamente esistano costanti positive K_1, K_2, K_3, K_4 tali che

$$K_1\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \varphi(x, y) \leqslant K_2\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{in } \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \geqslant 1\}, \tag{2.5}$$

$$\varphi(x, y) \geqslant 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.5 bis}$$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \leqslant K_3 \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \tag{2.6}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right| + \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right| \leqslant \frac{K_4}{\varphi(x, y)+1} \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{2.7}$$

Ora, ponendo

$$G_L(x,y) = \begin{cases} G(x,y) & \text{se } \varphi(x,y) \leqslant L \\ G\left(\dfrac{Lx}{\varphi(x,y)}, \dfrac{Ly}{\varphi(x,y)} \right) & \text{se } \varphi(x,y) \geqslant L, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$Z_{0L} = (X_{0L}, Y_{0L}) = \begin{cases} (X_0, Y_0) & \text{se } \varphi(X_0, Y_0) \leqslant L \\ \left(\dfrac{LX_0}{\varphi(X_0, Y_0)}, \dfrac{LY_0}{\varphi(X_0, Y_0)} \right) & \text{se } \varphi(X_0, Y_0) \geqslant L, \end{cases} \tag{2.9}$$

introduciamo una famiglia di problemi approssimati. Infatti per ciascun $L \geqslant \kappa + \lambda$ consideriamo l'equazione in Z_L

$$dZ_L = G_L(Z_L)\, dt + \Theta(Z_L)\, dW, \qquad Z_L(0) = Z_{0L}. \tag{2.10}$$

Si ha il

LEMMA 2.1. – *Sia $G_L(\cdot, \cdot)$ la funzione definita dalla* (2.8) *e dalla* (1.2). *Sia Z_{0L} la variabile aleatoria data dalla* (2.9). *Supponiamo che le condizioni* (1.3), (1.4) *siano verificate. Allora l'equazione* (2.10) *ammette una e una sola (a meno di modificazioni) soluzione Z_L e si ha*

$$\mathbb{E}(|Z_L(t)|^2) < \infty \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2.11}$$

DIMOSTRAZIONE. – Come si constata facilmente, $G_L(x, y)$ è una funzione lipschitziana. Pertanto, tenuto conto anche delle (1.3), (1.4), per il noto teorema di esistenza e unicità per le equazioni stocastiche, esiste ed è unica (a meno di modificazioni) la soluzione dell'equazione (2.10) e si ha la (2.11). ∎

3. – Stime sulle soluzioni dei problemi approssimati.

In questo paragrafo dimostriamo due stime sull'andamento delle soluzioni approssimate, utilizzando la funzione ausiliaria φ introdotta nel paragrafo precedente. I seguenti lemmi 3.1 e 3.2 costituiscono la parte principale della dimostrazione del teorema di esistenza e unicità (teorema 4.1).

LEMMA 3.1. – *Supponiamo che la condizione* (1.3) *e la condizione*

(1.4) bis $\qquad Z_0 \colon \mathcal{F}_0\text{-misurabile}, \qquad \mathbb{E}(|\mathrm{Z}_0|^{\mathrm{k}}) < \infty, \quad \mathrm{k} \geqslant 2,$

siano verificate. Sia $Z_L = (X_L, Y_L)$ *la soluzione dell'equazione* (2.10) *con* $L \geq \kappa + \lambda$. *Dato* $T > 0$, *esiste una costante* M_k *indipendente da* L *tale che*

$$\mathbb{E}(|\varphi(X_L(t), Y_L(t))|^k) \leq M_k \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

DIMOSTRAZIONE. – Applicando la formula di Ito alla funzione $(\varphi(X_L(t), Y_L(t)))^k$, si ha

$$\varphi^k = (\varphi_{0L})^k + k\int_0^t [\varphi^{k-1} G_L \cdot \nabla\varphi + \psi]\, ds + k\int_0^t \varphi^{k-1} \sum_{j=1}^n \left(\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dW_j, \tag{3.2}$$

ove

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n (\Theta_{1j})^2\right)\left(k(k-1)\,\varphi^{k-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + k\varphi^{k-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + \left(\sum_{j=1}^n \Theta_{1j}\Theta_{2j}\right)\left(k(k-1)\,\varphi^{k-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\varphi^{k-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n (\Theta_{2j})^2\right)\left(k(k-1)\,\varphi^{k-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + k\varphi^{k-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right),$$

$$\varphi_{0L} = \varphi(X_{0L}, Y_{0L}).$$

Poiché dalla (1.3) segue la disuguaglianza $|\Theta_{ij}(x, y)| \leq c(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$ con una costante c, in virtù delle (2.5), (2.6), (2.7), esiste una costante C indipendente da L tale che

$$\int_0^t \psi ds \leq C\int_0^t (1 + \varphi^k)\, ds. \tag{3.3}$$

D'altra parte, se calcoliamo esplicitamente $G_L(x, y) \cdot \nabla\varphi(x, y)$, la condizione (2.1) con cui abbiamo costruito la funzione φ e l'espressione (1.2) della funzione $G(x, y)$ con cui abbaimo definito G_L ci permettono di ottenere la disuguaglianza

$$G_L \cdot \nabla\varphi \leq \alpha\varphi + C' \tag{3.4}$$

con una costante C' indipendente da L.

Dalle (3.2)-(3.4) segue che esistono costanti $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}'$ indipendenti da L tali che

$$\mathbb{E}(\varphi^k) \leqslant \mathbb{E}([\varphi(X_{0L}, Y_{0L})]^k) + \widetilde{C}t + \widetilde{C}' \int_0^t \mathbb{E}(\varphi^k)\, ds + k\mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi^{k-1} \sum_{j=1}^n \left(\Theta_{1j} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Theta_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dW_j \right]. \tag{3.5}$$

Ma siccome l'integrale stocastico rispetto al moto browniano è una martingala, l'ultimo termine della (3.5) risulta essere nullo. Quindi, tenuto conto anche della relazione $\varphi(X_{0L}, Y_{0L}) \leqslant \varphi(X_0, Y_0)$, la (3.5) si riduce a

$$\mathbb{E}(\varphi^k) \leqslant \mathbb{E}([\varphi(X_0, Y_0)]^k) + \widetilde{C}t + \widetilde{C}' \int_0^t \mathbb{E}(\varphi^k)\, ds\,,$$

da cui per il lemma di Gronwall si ottiene la (3.1), come volevamo dimostrare. ■

LEMMA 3.2. – *Supponiamo che le condizioni* (1.3), (1.4) *siano verificate. Sia* $Z_L = (X_L, Y_L)$ *la soluzione dell'equazione* (2.10) *con* $L \geqslant \kappa + \lambda$. *Dato* $T > 0$, *esiste una costante* M' *indipendente da* L *tale che*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \varphi(X_L, Y_L) \Big) \leqslant M' < \infty\,. \tag{3.6}$$

DIMOSTRAZIONE. – Applicando la formula di Ito alla funzione $\varphi(X_L(t), Y_L(t))$, si ha

$$\varphi = \varphi_{0L} + \int_0^t [G_L \cdot (\nabla \varphi) + \psi_1]\, ds + \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(\Theta_{1j} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Theta_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dW_j \tag{3.7}$$

con

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sum_{j=1}^n (\Theta_{1j})^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \sum_{j=1}^n \Theta_{1j} \Theta_{2j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \sum_{j=1}^n (\Theta_{2j})^2.$$

In virtù delle (2.5), (2.7) e della disuguaglianza $|\Theta_{ij}(x, y)| \leqslant c(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$, esiste una costante C_1 tale che

$$\psi_1 \leqslant C_1(1 + \varphi)\,. \tag{3.8}$$

Pertanto, tenuto conto delle (3.4), (3.8), dalla (3.7) segue che

$$
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\varphi(X_L, Y_L)\Big)\leqslant \mathbb{E}(\varphi(X_{0L}, Y_{0L}))+(C'+C_1)\,T+ \tag{3.9}
$$

$$
(\alpha+C_1)\int_0^T \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\varphi(X_L, Y_L)\Big)\,dt+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\sum_{j=1}^n\left(\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dW_j\right).
$$

L'ultimo addendo della (3.9) sarà maggiorato per mezzo di disuguaglianze derivanti dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, dalla disuguaglianza di Doob e dalla proprietà dell'integrale stocastico rispetto ad un moto browniano; si ha infatti

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\sum_{j=1}^n\left(\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dW_j\right)\leqslant \tag{3.10}
$$

$$
\left[\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t\sum_{j=1}^n\left(\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dW_j\right|^2\right)\right]^{1/2}\leqslant
$$

$$
2\left[\mathbb{E}\left(\left|\int_0^T\sum_{j=1}^n\left(\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dW_j\right|^2\right)\right]^{1/2}\leqslant
$$

$$
2\left[n\mathbb{E}\left(\int_0^T\sum_{j=1}^n\left|\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2dt\right)\right]^{1/2}.
$$

D'altra parte in virtù delle (2.5), (2.6) e della lipschitzianità di $\Theta(x, y)$, si ha

$$
\sum_{j=1}^n\left|\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\leqslant c(1+\varphi^2)
$$

con una costante c e di conseguenza il lemma 3.1 per $k=2$ ci dà

$$
\mathbb{E}\left(\int_0^T\sum_{j=1}^n\left|\Theta_{1j}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Theta_{2j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2dt\right)\leqslant cT(1+M_2).
$$

Pertanto dalla (3.10) si trae

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\sum_{j=1}^n\left(\Theta_{1j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\Theta_{2j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right)dW_j\right)\leqslant C_2\sqrt{T} \tag{3.11}
$$

con una costante C_2 indipendente da L.

Sostituendo la (3.11) nella (3.9) ed applicando il lemma di Gronwall si ottiene la (3.6) con M' indipendente da L. Il lemma è dimostrato. ■

4. – Teorema di esistenza e unicità.

Ora siamo in grado di dimostrare il

TEOREMA 4.1. – *L'equazione* (1.1) *con le condizioni* (1.3), (1.4) *ammette una e una sola (a meno di modificazioni) soluzione* $Z = (X, Y)$ *e si ha* $\mathbb{E}(|Z(t)|^2) < \infty$ *per ogni* $t \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. – Fissato $T > 0$, per la disuguaglianza di Markov, dalla (3.6) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste L tale che

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(X_L, Y_L) \geq L\right\}\right) \leq \varepsilon,$$

ossia

$$\lim_{L \to \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(X_L, Y_L) \geq L\right\}\right) = 0. \tag{4.1}$$

Ma, posto

$$\Omega_L = \left\{\omega \in \Omega \,|\, \sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(X_L, Y_L) < L\right\},$$

si ha

$$Z_L|_{\Omega_{\min(L, L')}} = Z_{L'}|_{\Omega_{\min(L, L')}} \quad \text{q.c.} \qquad \text{per } L, L' \geq \kappa + \lambda. \tag{4.2}$$

Dalle (4.1), (4.2) segue che, per $L \to \infty$, Z_L converge q.c. ad un limite, che indichiamo con Z

$$\lim_{L \to \infty} Z_L = Z \ \text{q.c.}. \tag{4.3}$$

Dalla costruzione del processo stocastico $Z(t)$ è facile verificare che esso soddisfa all'equazione (1.1).

Quanto all'unicità della soluzione, poiché $\Theta(x, y)$ è lipschitziana e anche $G(x, y)$ è localmente lipschitziana, utilizzando una famiglia di tempi d'arresto col metodo consueto si può dimostrare l'unicità della soluzione Z dell'equazione (1.1). ■

5. – Il modello di dinamica di popolazioni e la sua soluzione.

Come si è detto nell'introduzione, come modello propriamente di dinamica di popolazioni con due specie preda e predatrice, proponiamo l'equazione (1.1) con $\Theta(x, y)$ data dalla (1.5) e $W=(W_1, W_2, W_3)$ a valori in $\mathbb{R}^3$ (W_1, W_2, W_3 sono moti browniani relativi alla stocasticità demografica della specie preda, a quella della specie predatrice e alla perturbazione ambientale e sono indipendenti). Poiché si tratta delle grandezze di popolazioni, bisogna che si abbia $X(t) \geqslant 0$, $Y(t) \geqslant 0$ $\forall t \geqslant 0$. Perciò, per i dati iniziali $Z_0=(X_0, Y_0)$, supponiamo oltre alla (1.4) la condizione

$$X_0 \geqslant 0, \qquad Y_0 \geqslant 0 \text{ q.c.}. \tag{5.1}$$

Inoltre, conformemente alla concezione di estinzione (senza immigrazione), imponiamo

$$X(\omega,t)=0 \Rightarrow X(\omega,t')=0 \;\; \forall t' \geqslant t; \; Y(\omega,t)=0 \Rightarrow Y(\omega,t')=0 \;\; \forall t' \geqslant t. \tag{5.2}$$

Si può costruire la soluzione di tale problema come viene illustrato nel seguente teorema.

TEOREMA 5.1. – *Sotto le ipotesi* (1.4), (5.1) *esiste ed è unico (a meno di modificazioni) il processo stocastico* $Z=(X, Y)$ *a valori in* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *che soddisfa q.c. all'equazione* (1.1) *con* Θ *data dalla* (1.5) (*e* G *data dalla* (1.2)) *e alla condizione* (5.2).

DIMOSTRAZIONE. – Innanzitutto dimostriamo il teorema sotto l'ipotesi (1.4) bis.

Consideriamo la famiglia di equazioni approssimate

$$dZ_h = G(Z_h)\, dt + \Theta_h(Z_h)\, dW, \qquad Z_h(0)=Z_0 \tag{5.3}$$

con $h>0$ e

$$\Theta_h(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma_0^{(h)}(x) & 0 & \sigma_1 x^+ \\ 0 & \varrho_0^{(h)}(y) & \varrho_1 y^+ \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

ove

$$\sigma_0^{(h)}(x) = \begin{cases} \sigma_0 \sqrt{x} & \text{per } x \geqslant h \\ \sigma_0 \dfrac{x}{\sqrt{h}} & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant h, \\ 0 & \text{per } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \varrho_0^{(h)}(y) = \begin{cases} \varrho_0 \sqrt{y} & \text{per } y \geqslant h \\ \varrho_0 \dfrac{y}{\sqrt{h}} & \text{per } 0 \leqslant y \leqslant h. \\ 0 & \text{per } y \leqslant 0 \end{cases}$$

È chiaro che $\Theta_h(x, y)$ è lipschitziana e quindi in virtù del teorema 4.1 esiste ed è unica la soluzione $Z_h=(X_h, Y_h)$ dell'equazione (5.3) e che $Z_h=(X_h, Y_h)$ è continuo q.c..

Introduciamo i tempi d'arresto

$$\tau_h^X(\omega) = \inf[\{t > 0 \,|\, X_h(\omega, t) \leq h\} \cup \{T\}], \tag{5.5}$$

$$\tau_h^Y(\omega) = \inf\big[\{t > 0 \,|\, Y_h(\omega, t) \leq h\} \cup \{T\}\big]; \tag{5.6}$$

poniamo inoltre

$$\bar{\tau}_h(\omega) = \min(\tau_h^X(\omega), \tau_h^Y(\omega)). \tag{5.7}$$

Si osserva che

$$\bar{\tau}_h(\omega) \leq \bar{\tau}_{h'}(\omega) \qquad \text{per } h \geq h' > 0$$

e quindi esiste il limite di $\bar{\tau}_h$ per $h \to 0^+$. Poniamo

$$\bar{\tau}(\omega) = \lim_{h \to 0^+} \bar{\tau}_h(\omega). \tag{5.8}$$

Ora dimostriamo i seguenti lemmi.

LEMMA 5.1. – *Sia $\varphi(x, y)$ la funzione introdotta nel paragrafo* 2. *Allora esiste una costante M_k indipendente da h tale che per le soluzioni $Z_h = (X_h, Y_h)$ dell'equazione* (5.3) *valga*

$$\mathbb{E}(|\varphi(X_h(t), Y_h(t))|^k) \leq M_k \qquad \forall t \in [0, T],\ k \geq 2. \tag{5.9}$$

DIMOSTRAZIONE. – Per la definizione (5.4) di Θ_h esiste una costante C_0 indipendente da h tale che valga

$$|\Theta_{h,\,ij}(x, y)| \leq C_0(1 + \varphi(x, y)) \qquad i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3. \tag{5.10}$$

D'altra parte, ricordando la disuguaglianza (3.3) utilizzata per dimostrare la (3.1), si constata facilmente che, se $\Theta = \Theta_h$ nell'equazione considerata nel lemma 3.1, la costante C che compare nel secondo membro della (3.3) dipende solo dalla costante C_0 della disuguaglianza (5.10) e quindi è indipendente da h; di conseguenza in virtù del lemma 3.1 si ha la disuguaglianza (5.9) con M_k indipendente da h. Il lemma è dimostrato. ■

LEMMA 5.2. – *Dato $\varepsilon > 0$, esiste $h_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\mathbb{E}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_{h_\varepsilon}) \leq \varepsilon. \tag{5.11}$$

DIMOSTRAZIONE. – Poiché $\bar{\tau} \leq T < \infty$, il lemma segue immediatamente dalla (5.8). ■

LEMMA 5.3. – *Dato* $\varepsilon > 0$, *esiste* $h_\varepsilon > 0$ *tale che, per* $h, h' \in]0, h_\varepsilon]$, *valga*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |Z_h - Z_{h'}| \Big) \leqslant \varepsilon . \tag{5.12}$$

DIMOSTRAZIONE. – Per fissare le idee, poniamo $0 < h' < h \leqslant h_\varepsilon$. Poiché per la definizione di Z_h, $Z_{h'}$ si ha

$$Z_h = Z_{h'} \qquad \text{per } 0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}_h,$$

vale l'uguaglianza

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |Z_h - Z_{h'}| = \sup_{\bar{\tau}_h \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |Z_h - Z_{h'}|$$

e per $\bar{\tau}_h \leqslant t \leqslant \bar{\tau}$ si ha

$$Z_h - Z_{h'} = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_{\bar{\tau}_h}^{t} [G(Z_h(t')) - G(Z_{h'}(t'))]\, dt', \qquad I_2 = \int_{\bar{\tau}_h}^{t} [\Theta_h(Z_h(t')) - \Theta_{h'}(Z_{h'}(t'))]\, dW(t') .$$

Grazie alla disuguaglianza $|G(z)| \leqslant c(1 + |z|^2)$ $(z = (x, y) \in \mathbb{R}^2)$ con una costante c, che segue immediatamete dalla (1.2), si ha

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |I_1| \leqslant c \int_{\bar{\tau}_h}^{\bar{\tau}} (2 + |Z_h(t')|^2 + |Z_{h'}(t')|^2)\, dt' \leqslant$$

$$c(\bar{\tau} - \bar{\tau}_h)^{1/2} \left[\int_0^T (2 + |Z_h(t)|^2 + |Z_{h'}(t)|^2)^2\, dt \right]^{1/2} .$$

Ne segue che

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |I_1| \Big) \leqslant c(\mathbb{E}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_h))^{1/2} \left[\mathbb{E} \int_0^T (2 + |Z_h(t)|^2 + |Z_{h'}(t)|^2)^2\, dt \right]^{1/2} .$$

Pertanto per il lemma 5.1 (con $k = 4$ nella (5.9); si veda anche la (2.5)) esiste una costante C indipendente da h tale che

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |I_1| \Big) \leqslant C(\mathbb{E}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_h))^{1/2}. \tag{5.13}$$

D'altra parte, considerando I_2 come integrale stocastico

$$I_2(t) = \int_0^t [\Theta_h(Z_h(t')) - \Theta_{h'}(Z_{h'}(t'))]\, dM(t')$$

rispetto alla martingala $M(t) = W((t \wedge \bar{\tau}) \vee \bar{\tau}_h) - W(\bar{\tau}_h)$, la cui misura di Doléans risulta essere $\chi_{]\!]\bar{\tau}_h, \bar{\tau}]\!]} d\omega\, dt$, dalla disuguaglianza di Doob e dalle proprietà dell'integrale stocastico rispetto ad una martingala si ottiene

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |I_2|\Big) \leqslant 2\left[\mathbb{E}\left|\int_0^T [\Theta_h(Z_h(t')) - \Theta_{h'}(Z_{h'}(t'))]\, dM(t')\right|^2\right]^{1/2} \leqslant$$

$$2\left[\mathbb{E}\int_{\bar{\tau}_h}^{\bar{\tau}} [\Theta_h(Z_h(t')) - \Theta_{h'}(Z_{h'}(t'))]^2\, dt\right]^{1/2}$$

(per l'integrale stocastico rispetto ad una martingale in generale si veda per esempio [5]). Pertanto, tenuto conto della (5.10), in modo analogo alla (5.13) si ottiene

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{\tau}} |I_2|\Big) \leqslant C'(\mathbb{E}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_h))^{1/2} \tag{5.14}$$

per una costante C' indipendente da h.

Dalle (5.13), (5.14) e dal lemma 5.2 segue il lemma 5.3. ■

Continuazione della dimostrazione del teorema 5.1. – Dal lemma 5.3 segue che esiste il limite

$$\lim_{h \to 0^+} (X_h, Y_h) = (\widetilde{X}, \widetilde{Y})$$

in $[\![0, \bar{\tau}]\!]$ e che $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ è continuo q.c.. Ricordando le definizioni (5.5)-(5.8), si osserva che, se $\bar{\tau}(\omega) < T$, allora vale q.c. $\widetilde{X}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) = 0$ o $\widetilde{Y}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) = 0$. Poniamo dunque

$$\Omega_T = \{\omega \in \Omega \mid \bar{\tau}(\omega) = T\},$$

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega \mid \bar{\tau}(\omega) < T, \widetilde{X}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) = 0, \widetilde{Y}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) = 0\},$$

$$\Omega_X = \{\omega \in \Omega \mid \bar{\tau}(\omega) < T, \widetilde{X}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) = 0, \widetilde{Y}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) \neq 0\},$$

$$\Omega_Y = \{\omega \in \Omega \mid \bar{\tau}(\omega) < T, \widetilde{X}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) \neq 0, \widetilde{Y}(\omega, \bar{\tau}(\omega)) = 0\};$$

gli eventi Ω_T, Ω_0, Ω_X, Ω_Y sono evidentemente disgiunti e si ha

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus (\Omega_T \cup \Omega_0 \cup \Omega_X \cup \Omega_Y)) = 0 .$$

Ciò essendo, definiamo la soluzione $Z = (X, Y)$ del nostro problema in $[0, T]$ su ciascun evento Ω_T, Ω_0, Ω_X, Ω_Y.

Su Ω_T poniamo $X = \widetilde{X}$, $Y = \widetilde{Y}$. Su Ω_0 poniamo

$$X = \widetilde{X},\ Y = \widetilde{Y} \quad \text{in } [\![0, \bar{\tau}]\!]; \qquad X = Y = 0 \quad \text{in } [\![\bar{\tau}, T]\!].$$

Per $\omega \in \Omega_X$ poniamo

$$X = \tilde{X}, \ Y = \tilde{Y} \quad \text{in } [\![0, \bar{\tau}]\!]; \qquad X = 0, \ Y = Y_1 \quad \text{in } [\![\bar{\tau}, T]\!],$$

ove Y_1 è la soluzione dell'equazione

$$dY_1 = (-\gamma Y_1^+ - \nu (Y_1^+)^2)\, dt + \varrho_0 \sqrt{Y_1^+}\, dW_2 + \varrho_1 Y_1^+\, dW_3, \qquad Y_1(\bar{\tau}) = \tilde{Y}(\bar{\tau}) \tag{5.15}$$

fino al tempo in cui il valore di Y_1 raggiunga 0 e poi viene prolungato col valore 0. La soluzione dell'equazione (5.15) fino al tempo in cui il valore di Y_1 raggiunga 0 sarà costruita in modo analogo a quella appena vista della (1.1) (con la (1.5)) fino al tempo in cui il valore di X o di Y raggiunga 0.

In modo analogo, per $\omega \in \Omega_Y$ poniamo

$$X = \tilde{X}, \ Y = \tilde{Y} \quad \text{in } [\![0, \bar{\tau}]\!]; \qquad X = X_1, \ Y = 0 \quad \text{in } [\![\bar{\tau}, T]\!],$$

ove X_1 è la soluzione dell'equazione

$$dX_1 = (\alpha X_1^+ - \mu (X_1^+)^2)\, dt + \sigma_0 \sqrt{X_1^+}\, dW_1 + \sigma_1 X_1^+\, dW_3, \qquad X_1(\bar{\tau}) = \tilde{X}(\bar{\tau}) \tag{5.18}$$

fino al tempo in cui il valore di X_1 raggiunga 0 e poi viene prolungato col valore 0.

Dalla costruzione è chiaro che $Z = (X, Y)$ così definito soddisfa all'equazione (1.1) (con la (1.5)) e alla condizione (5.4) ed è unico (a meno di modificazioni). Il teorema è dimostrato sotto l'ipotesi (1.4) bis.

Per dimostrare il teorema senza la restrizione della (1.4) bis, ricordiamo che per Z_{0L} definita nella (2.9) vale

$$\lim_{L \to \infty} \mathbb{P}(\{Z_{0L} \neq Z_0\}) = 0$$

e che per Z_{0L} è banalmente verificata la (1.4) bis. Pertanto il teorema segue dal teorema dimostrato col dato iniziale Z_{0L} al posto di Z_0 nella (1.1). ■

6. – Assenza di estinzione.

In questo paragrafo, sotto l'ipotesi dell'assenza di stocasticità demografica, dimostriamo che la probablità di estinzione in un tempo finito, sia per la specie preda sia per la specie predatrice, è nulla. Più precisamente, si ha il

TEOREMA 6.1. – *Sia $Z = (X, Y)$ la soluzione dell'equazione* (1.1) *con $\sigma_0 = \varrho_0 = 0$ nell'espressione* (1.5) *di $\Theta(x, y)$. Supponiamo che*

$$X_0 > 0, \qquad Y_0 > 0 \qquad \text{q.c.}. \tag{6.1}$$

Allora per qualsiasi $0 < T < \infty$ si ha

$$\mathbb{P}\left(\left\{\inf_{0 \le t \le T} X(t) > 0\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\inf_{0 \le t \le T} Y(t) > 0\right\}\right) = 1. \tag{6.2}$$

DIMOSTRAZIONE. – Essendo $\sigma_0 = \varrho_0 = 0$ per ipotesi, in questa dimostrazione scriviamo semplicemente σ, ϱ e W al posto di σ_1, ϱ_1 e W_3. Poiché sotto l'ipotesi del teorema, $\Theta_{ij}(x, y)$ è lipschitziana, per il teorema 4.1 esiste ed è unica la soluzione $Z = (X, Y)$. Poniamo, per $X > 0$, $Y > 0$,

$$\xi = \log X, \qquad \eta = \log Y. \tag{6.3}$$

Supponendo che $X > 0$, $Y > 0$, per la formula di Ito si ha

$$\xi(t) = \log X_0 + \int_0^t \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \beta e^{\eta} - \mu e^{\xi} \right) dt + \sigma W(t), \tag{6.4}$$

$$\eta(t) = \log Y_0 + \int_0^t \left(-\gamma - \frac{\varrho^2}{2} + \delta e^{\xi} - \nu e^{\eta} \right) dt + \varrho W(t), \tag{6.5}$$

In virtù della (4.1) e della costruzione di Z illustrata nella dimostrazione del teorema 4.1, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste L tale che

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \varphi(X, Y) \leqslant L \right\}\right) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi in virtù della (2.5) si ha

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant K_2 L \right\}\right) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.6}$$

D'altra parte è chiaro che esiste un $L_1 > 0$ tale che

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} [\log X_0 + \sigma W(t)] \geqslant -L_1 \right\}\right) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.7}$$

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} [\log Y_0 + \varrho W(t)] \geqslant -L_1 \right\}\right) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.8}$$

Dalle (6.2), (6.3), (6.4), (6.6), (6.7) si ottiene

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} X(t) \geqslant \exp\left(-L_1 - T\left[\left(-\alpha + \frac{\sigma^2}{2} \right)^+ - (\beta + \mu) \exp(K_2 L) \right] \right) \right\}\right) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

In virtù dell'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, ne segue

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} X(t) > 0 \right\}\right) = 1.$$

In modo analogo, dalle (6.2), (6.3), (6.5), (6.6), (6.8) segue

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\inf_{0 \leq t \leq T} Y(t) > 0\Big\}\Big) = 1\ .$$

Il teorema è dimostrato. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] F. B. CHRISTIANSEN - T. M. FENCHEL, *Theories of population in biological communities*, Springer, 1977.

[2] M. W. FELDMAN - J. ROUHGARDEN, *A population's stationary distribution and chance of extintion in a stochastic environment with remarks on the theory of species packing*, Theor. Pop. Biol., **7** (1975), 197-207.

[3] M. GYLLENBERG - G. HÖGNAS - T. KOSKI, *Population models with environmental stochasticity*, J. Math. Biol., **32** (1994), 93-108.

[4] G. S. LADDE - J. V. ROBINSON, *Stability and limiting distributions of one and two species stochastic population models*, Math. Modelling, **5** (1984), 331-338.

[5] G. LETTA, *Martingales et intégration stochastique*, Scuola Norm. Sup., Pisa, 1984.

[6] G. NICOLIS - I. PRIGOGINE, *Fluctuations in nonequilibrium systems*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **68** (1971), 2102-2107.

[7] R. M. NISBET - W. S. C. GURNEY, *Modelling fluctuating populations*, John Wiley, 1982.

[8] I. P. PAVLOTSKIJ - V. M. SUSLIN, *Stochastic model of evolution on areas in population ecology. (in russo)*, Matematicheskoe Modelirovanie, **6-3** (1994), 9-24.

[9] V. T. N. REDDY, *On the existence of the steady state in the stochastic Volterra-Lotka model*, J. Stat. Phys., **13** (1975), 61-64.

[10] Y. Y. SHEN - B. G. ZHANG, *Sulla soluzione periodica del modello stocastico per una specie (in cinese)*, Sheng Wu Shu Xue Xue Bao (J. Biomath.), **2** (1987), 30-36.

[11] M. H. VELLEKOOP - G. HÖGNÄS, *Stability of stochastic population models*, Studia Sci. Math. Hungar., **33** (1997), 459-476.

[12] V. VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villar, Paris, 1931.

[13] B. G. ZHANG - K. GOPALSAMY, *On the periodic solution of n-dimensional stochastic population models*, Stoch.Anal. Appl., **18** (2000), 323-331.

NOTA: I lavori [8] e [10] sono stati letti solo da uno degli autori.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino

Pervenuta in Redazione
il 12 marzo 2001