Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giacomo Aletti

Sulla teoria dei processi stocastici indicizzati da insiemi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 207–210.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_207_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 207-210

Sulla teoria dei processi stocastici indicizzati da insiemi.

GIACOMO ALETTI

Introduzione.

Lo studio dei processi stocastici indicizzati da insiemi chiusi di uno spazio topologico (T, τ) è uno dei problemi più affascinanti per la comprensione delle strutture matematiche necessarie per i risultati di processi stocastici. Dagli anni '70 l'inizio di questa teoria è presente negli articoli di processi indicizzati da punti nel piano e la recente pubblicazione del libro [5] mostra lo stato dell'arte.

I processi indicizzati da insiemi nascono come estensione della teoria dei processi indicizzati da punti del cono $\mathbb{R}_+^d = \{(t_1, \dots, t_d) : t_i \geq 0, \ \cup i\}$. Infatti, ad ogni punto $t \in \mathbb{R}_+^d$, può essere associato un «rettangolo» $[0, t] = \{s \in \mathbb{R}_+^d : s_i \leq t_i\}$. In questo modo, la classe dei rettangoli $\mathcal{A}$ può essere visto come famiglia di insiemi che indicizza il processo stocastico. Per una trattazione più generale, occorre capire quali delle proprietà di questa classe $\mathcal{A}$ sono necessarie per i risultati «classici» della teoria dei processi stocastici. Nel libro [5] vengono assunte le seguenti ipotesi minimali per la classe $\mathcal{A}$ di compatti, connessi, chiusi sottoinsiemi di (T, τ):

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ ed esiste una successione crescente (rispetto all'inclusione) di insiemi $B_n \in \mathcal{A}$ tale che ogni $t \in B_n^0$, per qualche n (estensione dell'esistenza dei rettangoli associati a $t_n = (n, n, \dots, n)$);

2. $\mathcal{A}$ è una famiglia chiusa per intersezioni arbitrarie e $\overline{\bigcup_i A_i} \in \mathcal{A}$ per ogni successione limitata e crescente $A_{i i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ (estensione della locale compattezza);

3. l'intersezione di due insiemi non vuoti $A, B \in \mathcal{A}$ è non vuota (corrisponde al fatto che $s \wedge t = (s_1 \wedge t_1, \dots s_n \wedge t_n) \in \mathbb{R}_+^d$ se $s, t \in \mathbb{R}_+^d$ e garantisce l'esistenza di un «inizio» $\emptyset' \in \mathcal{A}$ che gioca il ruolo dello $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^d$);

4. la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ è la sigma algebra dei borelliani di (T, τ);

5. la *separabilità da sopra* è il concetto fondamentale che estende l'esistenza dei reticoli formati dagli intervalli diadici densi in $\mathbb{R}_+^d$ (concetto necessario per ogni approssimazioni discrete di un processo): esiste una successione crescente $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoclassi finite di $\mathcal{A}$ tali che $\emptyset, B_n \in \mathcal{A}_n$ (B_n definito in 1), ciascuna classe è chiusa per intersezioni e (estensione di densità) esiste una successione di funzioni $g_n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_n(u) \cup T$ [$\mathcal{A}_n(u)$ è la classe delle unioni finite di elementi di $\mathcal{A}$] tali che: **(a)** g_n conserva intersezioni arbitrarie e unioni finite, ossia

$g_n\Big(\bigcap_{A\in\mathcal{A}'} A\Big) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}'} g_n(A)$ quando $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$, e se $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} A_j'$ allora $\bigcup_{i=1}^{k} g_n(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} g_n(A_j')$; **(b)** per ogni $A\in\mathcal{A}$, $A\subseteq(g_n(A))^0$; **(c)** $g_n(A)\subseteq g_m(A)$ se $n\geqslant m$; **(d)** per ogni $A\in\mathcal{A}$, $A=\bigcap_n g_n(A)$; **(e)** se $A, A'\in\mathcal{A}$ allora per ogni n, $g_n(A)\cap A'\in\mathcal{A}$, e se $A'\in\mathcal{A}_n$ allora $g_n(A)\cap A'\in\mathcal{A}_n$; **(f)** $g_n(\emptyset)=\emptyset\ \forall n$.

$\mathcal{A}$ non è necessariamente un reticolo (a differenza di $\mathbb{R}_+^d$, non è detto che esista un insieme in $\mathcal{A}$ che domini due insiemi distinti di $\mathcal{A}$), mentre un reticolo, in condizioni molto generali, può essere visto come particolare famiglia indicizzante.

Queste ipotesi minimali rendono possibile lo sviluppo della teoria generale delle martingale indicizzate da insiemi. Viene infatti introdotta la classe $\mathcal{C}$ degli incrementi ($C\in\mathcal{C}$ se $C=A\setminus\cup A_i$ con $A, A_i\in\mathcal{A}$) e quindi, data una filtrazione $\{\mathcal{F}_A, A\in\mathcal{A}\}$ completa, crescente e continua da sopra, si possono definire le tre estensioni delle proprietà di martingale già presenti in $\mathbb{R}_+^d$: dato un processo $\{X_A, A\in\mathcal{A}\}$ adattato e integrabile, si dice che X è una

- martingala debole: per ogni incremento C, il suo valore atteso condizionato al suo passato è nullo: $E(X_C\mid\mathcal{G}_C)=0$, dove $\mathcal{G}_C=\bigcap_{A\cap C\neq\emptyset}\mathcal{F}_A$;
- martingala forte: per ogni incremento C, il suo valore atteso condizionato al suo non futuro è nullo: $E(X_C\mid\mathcal{G}_C^*)=0$, dove $\mathcal{G}_C^*=\bigvee_{A\cap C=\emptyset}\mathcal{F}_A$;
- martingala: per ogni coppia di insiemi $A, B\in\mathcal{A}$ con $A\subseteq B$, $E(X_B\mid\mathcal{F}_A)=X_A$.

Scopo della tesi è l'estensione di risultati della teoria dei processi stocastici e delle martingale indicizzati da insiemi attraverso la comprensione di strutture geometriche e analitiche sottese alla classe $\mathcal{A}$ e alle classi $\mathcal{A}(u)$, $\overline{\mathcal{A}(u)}$ e $\widetilde{\mathcal{A}}(u)$, rispettivamente la classe delle unioni finite, numerabili e delle intersezioni numerabili di insiemi di $\mathcal{A}$.

1. – Estensioni della teoria generale.

L'ipotesi aggiuntiva SHAPE sulla forma degli insiemi di $\mathcal{A}$, estensione di una proprietà dei rettangoli in $\mathbb{R}_+^d$, è molto utilizzata in letteratura poiché semplifica notevolmente le dimostrazioni e gli strumenti da utilizzare. SHAPE assume che se $A\subseteq\cup A_i$ con $A, A_i\in\mathcal{A}$, allora $A\subseteq A_i$ per qualche i, ossia ogni insieme di $\mathcal{A}$ non può essere scritto come unione di insiemi distinti, non vuoti e non contenuti uno nell'altro di $\mathcal{A}$. Se pensiamo che $\mathcal{A}$ rappresenti le possibili configurazioni spaziali di una cellula tumorale, chiaramente quest'ipotesi viene a cadere. In letteratura, la semplificazione di questo esempio è dato dalla classe $\mathcal{A}$ dei «lower sets», dove $\mathcal{A}=\widetilde{\mathcal{A}}'(u)$ e $\mathcal{A}'$ è la classe dei rettangoli in $\mathbb{R}_+^d$. Già in [1] l'autore mostrava come rimuovere l'ipotesi SHAPE focalizzando l'attenzione sulla topologia meno fine τ' generata da $\mathcal{A}$.

In [1], l'autore richiedeva la più debole assunzione $T0$ di separabilità su τ', ottenendo l'estensione di alcuni teoremi sulla caratterizzazione delle σ-algebre prevedibili $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ (legate ai due concetti differenti di passato e non futuro). Questo grazie al fatto che era possibile dimostrare l'equivalenza delle due classi $\overline{\mathcal{A}(u)}$ e $\widetilde{\mathcal{A}}(u)$ e quindi ottenere una approssimazione «da sotto» per gli insiemi di $\mathcal{A}$.

Nel lavoro di tesi viene non solo rimossa l'ipotesi $T0$ da τ', ma studiando le rappresentazioni estremali degli insiemi di $\mathcal{A}$ sempre lavorando sulla topologia τ', i teoremi delle σ-algebre prevedibili, di arresto opzionale, di decomposizione «alla Doob» vengono interamente provati senza l'ipotesi SHAPE o ipotesi di esistenza di particolari rappresentazioni. La prima parte della tesi può quindi essere considerata un'estensione dei risultati di [1] e dei risultati principali della teoria generale in [5].

2. – Il bandit problem.

La seconda parte della tesi introduce la generalizzazione della topologia di Baxter e Chacon data in [4] e della randomizzazione degli insiemi generalizzati d'arresto (funzioni $\xi : \Omega \to \widetilde{\mathcal{A}}(u)$ tali che $\{B \subseteq \xi\} \in \mathcal{F}_B$ per ogni $B \in \widetilde{\mathcal{A}}(u)$), ottenendo l'esistenza di optional increasing sets ottimali per il bandit problem nel contesto dei processi indicizzati da insiemi. Una prima formulazione a cura dell'autore di tale problema può essere trovata in [3].

Il bandit problem può essere visto, sotto opportune ipotesi del processo stocastico X di «guadagno», come un operatore affine Φ sull'insieme degli optional increasing sets $\mathfrak{B} = \{\Xi \text{ o.i.p.}\}$. Un optional increasing set $\Xi = \{\xi_t,\, t \in [0, 1]\}$ è una funzione crescente e continua di insiemi d'arresto e può essere interpretato come possibile scelta effettuate dal «bandito», il cui scopo è di massimizzare il profitto atteso $\Phi(\Xi)$. Il bandit problem ricerca quindi l'esistenza di un Ξ^* tale che

$$\Phi(\Xi^*) = \sup_{\Xi \in \mathfrak{B}} \Phi(\Xi).$$

La randomizzazione degli insiemi d'arresto consente di estendere l'operatore Φ al cono chiuso e convesso generato da $\mathfrak{B}$. Poichè gli elementi estremali di tale cono sono proprio gli optional increasing sets degli insiemi generalizzati d'arresto, un eventuale massimo di Φ sul cono è raggiunto su un optional increasing set generalizzato. Qualora si assuma una qualche compattificazione di $\mathcal{A}$ (per esempio chiedendo in analogia che il bandito abbia un'orizzonte temporale di scelta limitata), il massimo viene raggiunto.

3. – Caratterizzazione di processi spaziali.

L'ultimo capitolo della tesi riprende il lavoro dell'autore presentato in [2], lavoro da cui è partita la tesi stessa. Vengono analizzate le martingale e i processi di punto indicizzati da punto nel cono $\mathbb{R}^2_+ = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_i \geq 0,\ i = 1, 2\}$.

Un processo di punto indicizzato da punti nel piano può modellizzare un processo di coda $\{X_{(z_1, z_2)}, (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+\}$ dipendente da due server che, non trovandosi in prossimità uno dell'altro, si possono scambiare informazioni a tempi diversi (z_1 indicherà il primo server, z_2 il secondo).

La traccia aleatoria dei tempi in cui arrivano informazioni dai server $\Gamma = \{\gamma_t(\omega) = (Z_1(t, \omega), Z_2(t, \omega)), t \in \mathbb{R}_+\}$ forma un optional increasing path, ossia una famiglia continua e crescente di punti d'arresto γ_t, in questo contesto definiti nella forma «forte» ($\{\omega : ((z_1, z_2) - \gamma_t(\omega)) \in \mathbb{R}^2_+\} \in \mathcal{F}_{(z_1, z_2)}$, per ogni $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+$).

L'autore mostra come sia possibile scegliere parametrizzazioni «naturali» dello spazio $\mathbb{R}^2_+$ mediante una famiglia crescente di linee d'arresto $\Xi = \{L_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ (la linea d'arresto corrisponde all'insieme generalizzato d'arresto della teoria generale, e quindi la famiglia corrisponde a un elemento $\Xi \in \mathfrak{B}$) che rendono la traccia $\{X_{\Gamma, L_t}, t \in \mathbb{R}_+\}$ del processo in esame, parametrizzato mediante Ξ, un processo di Poisson uni-dimensionale.

Le martingale spaziali e i processi di Poisson spaziali sono quindi caratterizzate mediante i risultati ottenuti, rendendo possibile l'utilizzo di statistiche classiche per processi uni-dimensionali anche per processi indicizzati da $\mathbb{R}^2_+$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALETTI G., *On different topologies for set-indexing collections*, Statist. Probab. Lett., **54(1)** (2001), 67-73.

[2] ALETTI G., CAPASSO V., *Reduction of dimension for spatial point processes and right continuous martingales. Characterization of spatial Poisson processes*, Stoch. Stoch. Rep., **72(1-2)** (2002), 1-9.

[3] ALETTI G., MERZBACH E., *The set-indexed bandit problem*, Stochastic Process. Appl., **101(1)** (2002), 127-142.

[4] BAXTER, J. R., AND CHACON, R. V., *Compactness of stopping times*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **40(3)** (1977), 169-181.

[5] IVANOFF G., MERZBACH E., Set-Indexed Martingales. *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL* (2000).

Dipartimento di Matematica, Università di Milano
e-mail: giacomo.aletti@unimi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. V. Capasso, Università di Milano