Nicola Apollonio

Alcuni problemi di copertura vincolata su grafi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 211–214.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_211_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 211-214

Alcuni problemi di copertura vincolata su grafi.

NICOLA APOLLONIO

1. – Introduzione.

Dato un insieme finito S ed una famiglia di sue parti $\mathcal{F}$, si dice che un sottoinsieme Q di S copre una sottofamiglia $\mathcal{D}$ di $\mathcal{F}$ se Q ha intersezione non vuota con ciascuno dei membri di $\mathcal{D}$. In particolare, Q è detto un trasversale per $\mathcal{F}$ se Q copre $\mathcal{F}$. La coppia $(S, \mathcal{F})$, usualmente denotata con H, è detta ipergrafo semplice. L'insieme S è l'insieme dei nodi di H, mentre la famiglia $\mathcal{F}$ è l'insieme degli spigoli di H.

La minima cardinalità di un insieme trasversale è denotata come consuetudine con $\tau(H)$. D'ora in avanti il numero degli spigoli dell'ipergrafo si supporrà limitato superiormente dal valore di un polinomio nel numero dei nodi. Dato un ipergrafo H il problema di determinare un trasversale di minima cardinalità è un problema classico dell'ottimizzazione combinatoria. Per un risultato di Karp (1972) tale problema è NP-Completo anche quando ciascuno degli spigoli ha cardinalità non superiore a 2. Tuttavia esistono interessanti classi di ipergrafi, ad esempio la classe degli ipergrafi normali, per cui il problema del trasversale di minima cardinalità può essere risolto in maniera efficiente (i.e., in tempo polinomiale). Ad ogni spigolo F di $\mathcal{F}$ sia ora associato un numero reale non negativo $w(F)$ detto peso di F.

Tale peso si estende additivamente a tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{F}$ associando a ciascuno di tali sottoinsiemi la somma dei pesi dei propri membri. Dato un ipergrafo H con pesi sugli spigoli ed un intero non negativo t non superiore al numero dei nodi di H il problema di determinare un sottoinsieme di non più di t nodi che copra un sottoinsieme di spigoli di peso massimo è detto Problema di Copertura di Spigoli per Nodi con Vincolo di Cardinalità. Il problema di copertura ora introdotto è computazionalmente non più facile del problema del Trasversale di Minima Cardinalità. Infatti, dato un ipergrafo H con m spigoli e detta $q_t(H)$ la massima cardinalità di un insieme di spigoli coperti da non più di t nodi, $\tau(H)$ eguaglia il minimo t per cui risulti $q_t(H) = m$. Dunque, l'esistenza di un algoritmo polinomiale per il problema di copertura con vincolo di cardinalità implica l'esistenza di un algoritmo polinomiale per il trasversale di minima cardinalità. La tesi affronta lo studio della complessità del problema di copertura con vincolo di cardinalità per due particolari classi di ipergrafi: i) la classe degli ipergrafi spigoli-cammini e ii) la classe dei grafi bipartiti.

La prima classe è costituita da ipergrafi della forma $H = (E(G), \mathcal{F})$, dove $E(G)$ è l'insieme degli spigoli di un assegnato grafo G (non orientato o orientato) detto grafo di sostegno, mentre $\mathcal{F}$ è una collezione di cammini elementari di G riguardati come insiemi di spigoli. La seconda classe è costituita da quei grafi semplici i cui nodi possono essere colorati con due colori in modo tale che ogni spigolo contenga sempre nodi di colore diverso. Il primo problema, a cui è dedicata la maggior parte della tesi, si presenta, ad esempio, nella localizzazione di sensori di traffico e in certi problemi di *clustering* su alberi. Lo studio del secondo è motivato dal fatto che ad esso può ricondursi una particolare sottoclasse del primo.

2. – Ipergrafi spigoli-cammini.

Un risultato generale sulla complessità del problema è stato provato nei primi anni 80' da Simeone (il risultato è accreditato in [3]; una dimostrazione formale appare in [4]). Sfortunatamente il risultato stabilisce la NP-Completezza del problema (in forma di decisione) anche quando il grafo di sostegno sia una stella e la famiglia di cammini sia costituita da cammini di lunghezza 2. Sia $\mathcal{N}$ la classe degli ipergrafi spigoli-cammini il cui grafo di sostegno sia un albero.

A norma del risultato appena citato il problema di copertura di spigoli per nodi con vincolo di cardinalità è NP-Completo in $\mathcal{N}$ in tutti i casi in cui il massimo grado dell'albero di sostegno sia non limitato da una costante. Nella tesi si dimostra che il problema continua ad essere NP-Completo in $\mathcal{N}$ anche quando l'albero di sostegno sia un *pettine* e, di conseguenza, per alberi di grado massimo pari a tre. Una delle maggiori fonti di difficoltà nel risolvere il problema è individuata nella presenza di certe configurazioni dette *torte dispari*. Tali configurazioni inibiscono infatti la proprietà di Helly e di König.

Quest'ultima, se goduta da un ipergrafo H insieme a tutti i suoi ipergrafi parziali, garantisce, a norma di un teorema di Lovász, almeno la polinomialità del problema del trasversale di minima cardinalità (in tale caso l'ipergrafo è infatti normale). Sia $\mathcal{O}$ la classe degli ipergrafi il cui albero di sostegno T sia orientato e i cammini siano orientati lungo T e sia $\mathcal{U}$ la classe degli ipergrafi unimodulari (una sottoclasse propria degli ipergrafi normali). Il seguente teorema caratterizza gli ipergrafi normali all'interno della classe $\mathcal{N}$.

TEOREMA 1. – *Sia $H \in \mathcal{N}$. Se H non contiene torte dispari allora $H \in \mathcal{O}$.*

COROLLARIO 1. – *Sia $\mathcal{N}$ la classe degli ipergrafi normali. Allora $\mathcal{N} \cap \mathcal{N} = \mathcal{O} = \mathcal{N} \cap \mathcal{U}$.*

Sfortunatamente il problema rimane NP-Completo anche se ristretto alla classe $\mathcal{O}$. Tuttavia, esso può essere risolto mediante un algoritmo di programmazione dinamica all'interno della classe $\mathcal{R}$ degli ipergrafi il cui albero di sostegno sia un'arborescenza e la famiglia $\mathcal{F}$ sia costituita da cammini orientati dalla radice verso le foglie. Se n è il numero dei nodi dell'arborescenza e t il vincolo di cardinalità, l'algoritmo suddetto ha complessità $O(n^2 t^2)$. Restringendo ulteriorermente la classe $\mathcal{R}$ alla classe di quegli ipergrafi il cui albero di sostegno sia un cammino, si perviene alla classe $\mathcal{I}$ degli ipergrafi a intervallo. In tale caso il problema può riformularsi come quello di trovare in un grafo a intervallo t sottografi completi massimali che coprano il massimo numero di vertici. La polinomialità del problema discende dalla polinomialità del problema più generale di ricoprire il massimo numero di elementi di un insieme parzialmente ordinato con un numero fissato di anticatene (o catene) disgiunte (Frank [2]). Sotto l'ulteriore ipotesi che $\mathcal{F}$ sia una famiglia di Sperner (in tale caso il grafo ad intervallo è unitario), viene dimostrata l'esistenza di una soluzione ottima con certe proprietà, e su questa base si perviene a un algoritmo con complessità $O(p^2 t)$, dove p è il numero di cammini in $\mathcal{F}$. Quando il grafo di sostegno G non è un albero il problema si complica ulteriormente. Nel caso in cui G sia una griglia (completa) e $\mathcal{F}$ consista di tutti i *ganci* di G (cammini costituiti da uno spigolo orizzontale e uno verticale tra loro incidenti), si può constatare che l'algoritmo ghiotto in generale non funziona. Viene dimostrato però che funziona (assumendo senza perdere in generalità che G sia una griglia $m \times n$ con $m \leqslant n$) se ristretto ai soli spigoli verticali. La dimostrazione, a dispetto dell'apparente semplicità del problema, è tutt'altro che immediata e si basa su un'interessante disuguaglianza combinatoria relativa a una certa decomposizione in *accoppiamenti*. Tuttavia viene dimostrato che il problema diventa NP-completo allorché si passi da ganci a più generali *cammini a L*, oppure quando G sia una *scala* (griglia $2 \times n$) e $\mathcal{F}$ sia costituita da *grappette*.

3. – Grafi Bipartiti.

La dimostrazione di correttezza del suddetto algoritmo «ghiotto verticale» fa uso di una naturale riformulazione del problema nella forma di un problema di copertura di spigoli per nodi in un grafo bipartito sotto un vincolo di cardinalità. Per tali grafi, come è noto, il problema del trasversale di cardinalità minima è risolvibile in tempo polinomiale. Sfortunatamente però il problema di copertura con vincolo di cardinalità si dimostra essere NP-completo. La dimostrazione impiega una costruzione molto complessa e richiede vari lemmi tecnici. Sul fronte positivo, viene descritto un algoritmo polinomiale, con complessità $O(nt^2)$, per risolvere il problema allorché il grafo sia un albero con n nodi. Si tratta di un algoritmo di programmazione dinamica basato su una ricorrenza che coinvolge due opportune funzioni definite su sottoalberi. Utilizzando come subroutine tale algoritmo si perviene a un algoritmo polinomiale per il problema in grafi bipartiti elementari minimali. Si dimostra tuttavia che rimuovendo l'ipotesi di minimalità il problema diventa NP-completo.

4. – Algoritmi ghiotti per problemi di copertura con vincolo di cardinalità.

Dato un ipergrafo H pesato sugli spigoli sia f_H la funzione che associa ad ogni sottoinsieme di nodi il peso degli spigoli che tale insieme copre. Il problema di copertura di nodi per spigoli con vincolo di cardinalità t richiede di massimizzare tale funzione su tutti i sottoinsiemi con non più di t nodi. La funzione f_H è submodulare, non decrescente e centrata. Si può pertanto far ricorso ad un classico risultato di Fisher, Nemhauser e Wolsey (1978) che mostra come, sotto le suddette condizioni su f_H, l'errore di approssimazione dell'algoritmo Ghiotto non ecceda mai e^{-1}, dove e è il numero di Nepero. Per un risultato di Lovász, identificando insiemi con vettori di incidenza, ogni funzione submodulare f definita sull'insieme delle parti di un insieme V (e quindi sui vertici di un ipercubo di $\mathbf{R}^n$ con $n = |V|$), può essere estesa ad una funzione convessa definita su $\mathbf{R}^n_+$. Sfruttando la convessità di tale estensione, si può stimare il valore atteso della soluzione fornita da un algoritmo che scelga a caso sottoinsiemi di V di cardinalità t. Quando f è della forma f_H per qualche ipergrafo H allora il valore atteso può essere calcolato esattamente. Ciò consente di interpretare l'algoritmo ghiotto per il problema di copertura con vincolo di cardinalità come un *algoritmo derandomizzato secondo il metodo delle probabilità condizionali* allorché l'ipergrafo H sia uniforme di rango r e ordine n. Da tale osservazione discende il seguente.

TEOREMA 2. – *Sia H un ipergrafo uniforme di rango r ed ordine n. Il rapporto tra valore della soluzione prodotta dall'algoritmo ghiotto e il valore della soluzione ottima è limitato inferiormente da:*

$$\max\left\{1 - e^{-1}, 1 - e^{-\frac{t \times r}{n}}\right\} \tag{1}$$

Nel caso di ipergrafi non uniformi, detta s la minima cardinalità di uno spigolo, la limitazione $1 - e^{-\frac{t \times s}{n}}$ rimane valida a patto di modificare l'algoritmo ghiotto in modo tale che ad ogni passo si aggiunga all'insieme corrente il nodo che dà luogo al massimo incremento atteso del valore di f_H sotto la condizione che la soluzione contenga l'insieme corrente. In linea di principio, il calcolo di tale incremento atteso richiede una media su un numero esponenziale di insiemi. Fortunatamente, però, quando tale algoritmo ghiotto con prognosi viene applicato al problema in esame sussiste un'interessante identità combinatoria sulla base della quale la suddetta media può essere calcolata in tempo polinomiale. Si dimostra, anzi, che l'ordine di complessità dell'algoritmo ghiotto con prognosi è lo stesso di quello dell'algoritmo ghiotto. I risultati di una sperimentazione su problemi generati a caso mostrano la superiorità dell' algoritmo ghiotto con prognosi sull'algoritmo ghiotto per t sufficientemente grande.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BERGE, *A Minimax Relation for the Partial q*-Colorings of a Graph, Discrete Mathematics, **74** (1989), 3-14.

[2] A. FRANK, *On Chain and Antichain Families of a Partially Ordered Set*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **29** (1980), 176-184.

[3] M. C. GOLUMBIC, R.E. JAMISON, *The Edge Intersection Graphs of Paths in a Tree*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **38** (1985), 8-22.

[4] M. MARAVALLE, R. NALDINI e B. SIMEONE, *Clustering on trees*, Computational Statistics and Data Analysis, **24** (1997), 217–234.

via delle Dalie, 9 - 00172 Roma
e-mail: nicola.apollonio@uniroma1.it
Dottorato in Ricerca Operativa (sede amministrativa: Roma) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Bruno Simeone, Università di Roma