BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

BARBARA BRANDOLINI

Equazioni tipo Monge-Ampère: risultati di confronto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 235–237.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_235_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 235-237

Equazioni tipo Monge-Ampère: risultati di confronto.

Barbara Brandolini

Oggetto della tesi è lo studio di equazioni tipo Monge-Ampère

$$\det D^2 u = f(x, u, \nabla u),$$

affrontate con tecniche di simmetrizzazione basate, tra l'altro, sulle proprietà dei riordinamenti di funzioni misurabili. Maggiore enfasi è data al caso $n = 2$, trattato per la prima volta in quest'ottica da Talenti in [1]; i risultati ottenuti sono estesi in modo naturale al caso $n > 2$ usando le tecniche introdotte da Trudinger in [2]. Per chiarezza del lettore richiamiamo i risultati di Talenti, che permettono di confrontare il riordinamento rispetto ai perimetri degli insiemi di livello di una soluzione sufficientemente regolare del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \det D^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u \text{ convessa} & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

con la soluzione di un problema a simmetria sferica. A tale scopo si integra l'equazione in (1) su un insieme di livello $\{u < t\}$; la formula di rappresentazione del determinante hessiano in forma di divergenza permette di passare da un integrale sull'insieme di livello ad un integrale sul livello $\{u = t\}$. Questo passaggio porta in maniera naturale ad una disequazione in cui compare il riordinamento di u rispetto ai perimetri dei suoi insiemi di livello, anziché rispetto alla loro misura. Perciò riportiamo la seguente

Definizione 1. – *Sia Ω un aperto limitato, convesso di $\mathbb{R}^2$, avente perimetro L, e sia $u : \Omega \to]-\infty, 0]$ una funzione regolare, convessa in Ω e nulla sulla frontiera di Ω. Si dice riordinamento di u rispetto ai perimetri dei suoi insiemi di livello la funzione $u^\star : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ definita da*

$$u^\star(s) = \sup\{t \leqslant 0 : \lambda(t) < s\}.$$

Siamo ora in grado di enunciare il risultato di Talenti: siano Ω un aperto limitato, convesso di $\mathbb{R}^2$ e $f \in L^1(\Omega)$, $f \geqslant 0$, allora

$$u^\star(s) \geqslant v^\star(s), \qquad s \in [0, L] \tag{2}$$

$$\int_\Omega |\nabla u| \, dx \leqslant \int_{\Omega^\star} |\nabla v| \, dx,$$

dove v è la soluzione del problema «simmetrizzato»

$$\begin{cases} \det D^2 v = f^\sharp & \text{in } \Omega^\star \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega^\star \\ v \text{ convessa} & \text{in } \Omega^\star, \end{cases}$$

dove $f^\sharp$ è il riordinamento sferico decrescente di f e $\Omega^\star$ è il cerchio centrato nell'origine avente lo stesso perimetro L di Ω.

Da (2) discende immediatamente che

$$||u||_p \leqslant ||u^\star||_p \leqslant ||v||_p, \qquad p \geqslant 1.$$

Queste stesse stime sono ridimostrate da Trudinger [2] nel contesto più ampio di simmetrizzazione per «quermassintegral» in dimensione $n > 2$.

Nella tesi sono dimostrati risultati di confronto per soluzioni del problema di Dirichlet relativo ad operatori tipo Monge-Ampère della forma

$$\begin{cases} \det D^2 u + b(x, u, Du) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u \text{ convessa} & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

nel caso in cui il termine di ordine inferiore soddisfi l'ipotesi di crescita $|b(x, u, \nabla u)| \leqslant |\nabla u|$ oppure l'ipotesi di segno $b(x, u, \nabla u) \geqslant |\nabla u|$. La novità sta nel trattare il termine di ordine inferiore sia in due dimensioni sia in dimensione $n > 2$. La tecnica di integrazione sugli insiemi di livello conduce al confronto di una disequazione differenziale non lineare per $u^\star$ con una equazione differenziale non lineare per $v^\star$, dal cui confronto deduciamo le seguenti stime

$$\int_0^s u^\star(r)\, dr \geqslant \int_0^s v^\star(r)\, dr, \qquad s \in [0, L]; \tag{3}$$

$$\int_\Omega |Du|\, dx \leqslant \int_{\Omega^\star} |Dv|\, dx.$$

Come nel caso lineare, la (3) è sufficiente a dimostrare, per esempio, $\|u\|_p \leqslant \|v\|_p, \quad p \geqslant 1$.

La seconda parte della tesi è dedicata a dimostrare un risultato di confronto per un'equazione di evoluzione la cui struttura è

$$-\left(u \operatorname{div} \frac{\nabla_x u}{|\nabla_x u|}\right)_t + \det D_x^2 u = f \quad \text{in } \Omega \times [0, T], \tag{4}$$

dove Ω è un aperto limitato convesso di $\mathbb{R}^2$ e $T > 0$, $\nabla_x u$ indica il gradiente di u rispetto alle variabili spaziali $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $D_x^2 u$ è la matrice hessiana di u rispetto alle variabili spaziali. Ricordiamo che in un contesto evolutivo risulta utile la simmetrizzazione di Steiner, in cui il riordinamento di una funzione è fatto esclusivamente rispetto alle variabili spaziali. Vista la struttura dell'equazione (4), da quanto detto nel caso stazionario appare chiaro che è utile in questo contesto riordinare una soluzione u di (4) rispetto alle sole variabili spaziali mantenendo costanti nel tempo i perimetri degli insiemi di livello. Si dimostra la seguente formula di derivazione (vedi [3])

$$\int_{u<\vartheta} \frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t)\,\mathrm{div}\,\frac{\nabla_x u}{|\nabla_x u|}\right)dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{u<\vartheta} u(x,t)\,\mathrm{div}\,\frac{\nabla_x u}{|\nabla_x u|}\,dx,$$

che permette, portando la derivata rispetto al tempo fuori dal segno di integrale, di usare la tecnica di integrazione dell'equazione su insiemi di livello di una soluzione u. Tale tecnica consente di dimostrare un risultato di confronto tra u e la soluzione di un problema opportunamente simmetrizzato, risulato da cui discendono stime a priori di norme di u.

Nella parte conclusiva della tesi viene richiamata un'applicazione dovuta a Talenti del risultato di confronto (2), che permette di stimare la costante del principio del massimo di Aleksandrov-Pucci [4]:

$$\|u\|_\infty \leqslant C\|f\|_n,$$

dove u risolve $Eu = f$ in Ω, $u = 0$ su $\partial\Omega$ e E è un operatore lineare ellittico del second'ordine di tipo non variazionale. Le stime ottenute da Talenti nel caso $n = 2$ non sono però ottimali. Si dimostra una stima ottimale di $\|u\|_\infty$ tramite non la norma di f in L^n bensì una quantità ad essa equivalente.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. TALENTI, *Some estimates of solutions to Monge-Ampère type equations in dimension two*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci, Ser. IV, **VIII** (1981), 183-230.

[2] N. S. TRUDINGER, *On new isoperimetric inequalities and symmetrization*, J. Reine Angew. Math., 488 (1997), 203-220.

[3] A. ALVINO, J. I. DIAZ, P. L. LIONS e G. TROMBETTI, *Elliptic equations and Steiner symmetrization*, Comm. Pure Appl. Math., **XLIX** (1996), 217-236.

[4] C. PUCCI, *Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche*, Ann. Mat. Pura Appl., **74** (1966), 15-30.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»
e-mail: brandolini@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Angelo Alvino, Università di Napoli