Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Patrizia Campagnoli

Rappresentazione markoviana di processi stocastici e sua applicazione nell'analisi delle serie storiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 239–242.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_239_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 239-242

Rappresentazione markoviana di processi stocastici e sua applicazione nell'analisi delle serie storiche.

PATRIZIA CAMPAGNOLI

La formulazione stato-spazio di modelli dinamici dovuta a Kalman (1960) e i conseguenti risultati raggiunti nell'ambito della stima dei parametri e della previsione hanno rappresentato e rappresentano tuttora uno strumento fondamentale per risolvere problemi quali il filtraggio dei segnali nella teoria del controllo in campo ingegneristico, la modellizzazione di serie economico-finanziarie in campo econometrico, la stima e previsione di traiettorie di bersagli in volo in campo militare, ecc.

Ricordiamo la definizione di modello stato-spazio o modello lineare dinamico.

DEFINIZIONE 1. – *Sia* $\{\theta(t), y(t), t \geqslant 0\}$ *una successione aleatoria definita su uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *a valori reali con* $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_p(t)]'$, $y(t) = [y_1(t), \dots, y_d(t)]'$. *Un modello lineare dinamico (MLD) per* $\{y(t)\}$ *nella sua formulazione classica, è descritto, per* $t = 1, 2..$, *dalle seguenti equazioni:*

$$
(1) \qquad \begin{aligned} &Eq.\ \ delle\ oss. && y(t) = F(t)\,\theta(t) + v(t) \\ &Eq.\ \ di\ stato && \theta(t) = G(t)\,\theta(t-1) + w(t) \end{aligned}
$$

dove $y(t)$ *è un vettore di variabili aleatorie osservabili, chiamato vettore delle osservazioni (all'istante t);* $\theta(t)$ *è un vettore di parametri incogniti, chiamato vettore di stato (all'istante t);* $F(t)$ *(matrice di osservazione) e* $G(t)$ *(matrice di evoluzione dello stato) sono matrici di dimensione* $(d \times p)$ *e* $(p \times p)$ *rispettivamente; i processi di errore* $\{v(t)\}$ *e* $\{w(t)\}$ *sono gaussiani di media zero (quindi in particolare* $\forall t\ v(t) \sim N_d(0, V(t))$, $w(t) \sim N_p(0, W(t))$*), serialmente non correlati* $(\forall t \neq s,\ E[v(t)\,v(s)] = E[w(t)\,w(s)] = 0)$.

La specificazione del MLD è completata dalle ulteriori assunzioni: (a) Il vettore di stato iniziale $\theta(0)$ *ha media* $m(0)$ *e varianza* $C(0)$: $\theta(0) \sim N_p(m(0), C(0))$ *(b) I processi di errore* $\{v(t)\}$ *e* $\{w(t)\}$ *sono non correlati tra loro e non correlati con* $\theta(0)$, *cioè* $E[v(t)\,w(s)'] = 0\ \ \forall t, s,\ E[v(t)\theta(0)'] = 0,\ E[w(t)\theta(0)'] = 0\ \ \forall t.$ *Le matrici* $F(t)$ *e* $G(t)$ *e le matrici di covarianza* $V(t)$ *and* $W(t)$, *note come matrici di sistema, sono assunte deterministiche e note al tempo t.*

Nella definizione classica di modello lineare dinamico le matrici di sistema e le matrici di covarianza degli errori nell'equazione delle osservazioni e nell'equazione di stato sono assunte note e deterministiche in corrispondenza ad ogni istante. Il tentativo di utilizzare i modelli lineari dinamici nell'analisi di serie temporali fortemente non lineari e non stazionarie, come le serie finanziarie, porta a generalizzare i modelli stato-spazio richiedendo, ad esempio, che le matrici di sistema siano di natura stocastica. La classe dei modelli condizionatamente gaussiani introdotti da Liptser e Shiryayev (1972) è caratterizzata da matrici di sistema che dipendono da osservazioni passate. Il primo obiettivo di questa tesi è stato quello di generalizzare ulteriormente la classe dei modelli condizionatamente gaussiani consentendo la dipendenza delle matrici di sistema da variabili esogene stocastiche e la dipendenza delle matrici di covarianza dal vettore di stato. Abbiamo proposto una classe di modelli lineari dinamici generalizzati (MLDG) in cui le matrici di sistema e le matrici di covarianza sono funzioni delle osservazioni passate e di variabili esogene stocastiche passate e abbiamo derivato le equazioni del filtro esatte per tale classe di modelli.

TEOREMA 1. – *Siano* $\{\theta(t), y(t), t \geqslant 0\}$ *una successione aleatoria come in Definizione 1 e* $\{z(t), t \geqslant 0\}$ *una successione di variabili aleatorie a valori reali che rappresentano i regressori stocastici. Siano* $Y^t = [y(0), y(1), \ldots, y(t)]'$ *e* $Z^t = [z(0), z(1), \ldots, z(t)]'$*. Siano inoltre* $y^t = [y_0, y_1 \ldots, y_t]'$ *e* $z^t = [z_0, z_1, \ldots, z_t]'$ *le rispettive realizzazioni. La successione* $\{\theta(t), y(t)\}$ *è definita, per* $\forall t \geqslant 1$ *dal sistema di equazioni ricorsive*

$$
(2) \qquad \begin{cases} \theta(t) = a_0(t) + A_0(t)\,\theta(t-1) + A_1(t)\,\varepsilon_1(t) + A_2(t)\,\varepsilon_2(t) \\ y(t) = b_0(t) + B_0(t)\,\theta(t-1) + B_1(t)\,\varepsilon_1(t) + B_2(t)\,\varepsilon_2(t) \end{cases}
$$

dove

(*i*) $\varepsilon_1(t) = [\varepsilon_{11}(t), \ldots, \varepsilon_{1p}(t)]'$, $\varepsilon_2(t) = [\varepsilon_{21}(t), \ldots, \varepsilon_{2d}(t)]'$ *sono vettori aleatori gaussiani indipendenti di media zero e covarianze* $E[\varepsilon_1(t)\varepsilon_1(s)'] = I_p\delta(s, t)$, $E[\varepsilon_2(t)\,\varepsilon_2(s)'] = I_l\,\delta(s, t)$, $E[\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_2(s)']) = 0\ \Sigma s, t$ *dove* $\delta(x, y)$ *è l'indice di Kronecker.*

(*ii*) *Per ogni valore di* t *i vettori* $a_0(t)$, $b_0(t)$ *e le matrici* $A_k(t)$, $B_k(t)$ *per* $k = 0, 1, 2$ *sono stocastici,* $\sigma(Y^{t-1}, Z^t)$*-misurabili e hanno elementi a valori reali, di quadrato integrabile.* [$\sigma(Y^{t-1})$ *e* $\sigma(Z^t)$ *sono le* $\sigma-$*algebre generate da* Y^{t-1} *e* Z^t *rispettivamente e* $\sigma(Y^{t-1}, Z^t) = \sigma(Y^{t-1}) \vee \sigma(Z^t)$ (1)]

(*iii*) $([\theta(0), y(0)], Z^t)$ *è indipendente da* $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $t = 1, 2 \ldots$

(*iv*) $[\theta(0), y(0)]$, $\varepsilon_1(1), \ldots \varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(1), \ldots \varepsilon_2(t)$, Z^t *sono indipendenti per ogni* $t = 1, 2 \ldots$

(*v*) *la legge condizionale* $(\theta(0)\,|\,\sigma(y(0), z(0)))$ (2) *è gaussiana di parametri* $\mu(0)$ *e* $\Gamma(0)$.

(*vi*) *con probabilità 1, gli elementi delle matrici* $A_0(t)$ *e* $B_0(t)$ *sono limitati, uniformemente in t.*

(*vii*) $E[\|\theta(0)\|^2 + \|y(0)\|^2] < \infty$, *where* $\|x\|^2 = \sum_i x_i^2$.

Se valgono le ipotesi (*i*)-(*vii*) *sul modello* (2), *allora per ogni* $t > 0$ *legge condizionale* $(\theta(t)\,|\,\sigma(Y^t, Z^t))$ *è gaussiana di parametri* $\mu(t)$ *e* $\Gamma(t)$ *dati dalle equazio-*

(1) Per due σ-algebre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ la notazione $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ indica la più piccola σ-algebra che contiene sia $\mathcal{A}$ che $\mathcal{B}$, cioè la σ-algebra generata dall'unione delle due σ-algebre.

(2) $(X|\sigma(\xi))$ sta per $(X|\xi)$.

ni ricorsive:

$$
(3) \qquad \begin{cases} \mu(t) = [a_0(t) + A_0(t)\,\mu(t-1)] + \\ \qquad + [(A \circ B)(t) + A_0(t)\,\Gamma(t-1)\,B_0(t)']\cdot \\ \qquad \cdot [(B \circ B)(t) + B_0(t)\,\Gamma(t-1)\,B_0(t)']^{+}\cdot \\ \qquad \cdot [y(t) - b_0(t) - B_0(t)\,m(t-1)] \\ \Gamma(t) = [A_0(t)\,\Gamma(t-1)\,A_0(t)' + (A \circ A)(t)] - \\ \qquad - [(A \circ B)(t) + A_0(t)\,C(t-1)\,B_0(t)']\cdot \\ \qquad \cdot [(B \circ B)(t) + B_0(t)\,\Gamma(t-1)\,B_0(t)']^{+}\cdot \\ \qquad \cdot [(A \circ B)(t) + A_0(t)\,C(t-1)\,B_0(t)']' \end{cases}
$$

dove $A \circ A = A_1 A_1' + A_2 A_2'$, $A \circ B = A_1 B_1' + A_2 B_2'$, $B \circ B = B_1 B_1' + B_2 B_2'$ *e la notazione* A^{+} *è usata per la pseudo-inversa di una matrice simmetrica semi-definita positiva A.*

La classe di MLDG introdotta comprende come casi particolari le generalizzazioni presenti in letteratura. In particolare abbiamo mostrato che anche i modelli GARCH possono essere rappresentati sotto forma di MLDG. Tuttavia, in questo caso, poiché la matrice B_2 dipende, oltre che dalle osservazioni passate, anche dal vettore di stato, non è possibile usare direttamente il filtro esteso (3). Per risolvere tale problema abbiamo proposto di stimare i parametri incogniti contenuti nella matrice B_2, tramite un'oppportuna procedura di stima, e di sostituire tali stime nelle equazioni (3). L'applicazione del filtro approssimato a una serie di tassi di cambio, studiata in letteratura tramite un modello GARCH(1,1), ci ha consentito di ottenere stime dei parametri pressoché coincidenti con le stime di massima verosimiglianza.

Nella seconda parte della tesi abbiamo proposto un approccio diverso rispetto a quello seguito nella prima parte. Il punto di partenza è rappresentato da un articolo di Akaike (1975) in cui si dimostra che un processo debolmente stazionario la cui matrice di covarianza ammetta una particolare fattorizzazione, può essere rappresentato sotto forma di modello stato-spazio. Perciò invece di partire dal modello si può pensare di partire direttamente dalla serie osservata, in particolare dalla funzione di covarianza stimata e risalire al modello stato-spazio minimale, cioè quello con il vettore di stato di dimensione minima, che genera tale serie. Tale problema è noto in letteratura come problema della realizzazione stocastica minimale (Ruckebush, 1976). Formalmente

DEFINIZIONE 2. – *Il problema della realizzazione stocastica consiste nel trovare una rappresentazione markoviana*[3] *di* $\{y(t)\}$, *cioè un processo vettoriale* $\{\theta(t),\, t \in \mathbf{Z}\}$ *tale che*

$$
(4) \qquad \begin{aligned} y(t) &= F\theta(t) + Dv(t) \\ \theta(t+1) &= G\theta(t) + Bv(t) \end{aligned}
$$

[3] In letteratura si trova indifferentemente «rappresentazione markoviana» o «realizzazione stocastica».

dove $\{v(t),\, t \in \mathbf{Z}\}$ *è un processo vettoriale rumore bianco e* (G, F, D, B) *è una quaterna di matrici costanti di dimensione opportuna con G asintoticamente stabile* [4]. *Si dice che* $\{\theta(t)\}$ *è una realizzazione stocastica minimale se la sua dimensione è minimale (nell'insieme delle realizzazioni stocastiche).*

Abbiamo applicato un algoritmo di realizzazione stocastica minimale per costruire la rappresentazione markoviana minimale di una serie bivariata di tassi di interesse che è non stazionaria in quanto integrata del primo ordine. Solo in presenza di questo tipo di non-stazionarietà è possibile utilizzare, a meno di opportune modifiche, l'algoritmo di realizzazione stocastica minimale.

Infine, nell'ultima parte della tesi, abbiamo affrontato il problema della generalizzazione del problema classico della realizzazione stocastica. L'idea è quella, assegnato un determinato processo, di determinare un processo di stato che non sia una rappresentazione markoviana del processo dato, ma che soddisfi una proprietà più generale espressa in termini di σ-algebre(van Schuppen, 2000). Un processo che soddisfa questa proprietà prende il nome di sistema σ-algebrico. Formulando tale problema nell'ambito di un approccio previsivo abbiamo ottenuto una caratterizzazione delle famiglie di σ-algebre sufficienti predittive che formano un sistema σ-algebrico.

(4) La condizione $|\lambda_i(G)| < 1$ assicura la debole stazionarietà dell'output $y(t)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Akaike H., *Markovian Representation of Stochastic Processes by Canonical Variables*, SIAM Journal on Control, **13** (1975), 162-173.

[2] Kalman R.E., *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Trans. ASME, Journal Basic Engineering, **82** (1960), 35-45.

[3] Lipster R.S. e Shiryayev A.N., *Statistics of conditionally Gaussian random sequences*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., **Berkeley:Univ. California Press** (1972), 389-422.

[4] Ruckebush G., *Reprèsentation Markoviennes de processus Gaussiens stationnaires*, C.R. Acad. Sciences, **Sèrie A** (1976), 649-651.

[5] van Schuppen J.H., *Stochastic realization of σalgebras*, Proc. 14th International Symposium MTNS2000, **published on CD.ROME only** (2000).

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
e-mail: p.campagnoli@tin.it
Dottorato in Statistica Matematica (sede amministrativa: Pavia) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Pietro Muliere, Università L. Bocconi