Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Claudio Estatico

Precondizionatori regolarizzanti per equazioni lineari mal poste e applicazione alla ricostruzione di immagini

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 251–254.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_251_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 251-254

Precondizionatori regolarizzanti per equazioni lineari mal poste e applicazione alla ricostruzione di immagini.

CLAUDIO ESTATICO

Alcuni metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari (Landweber, Gradiente Coniugato, OS-EM, etc.) offrono ottimi risultati in termini di complessità computazionale, stabilità e filtraggio delle componenti di errore sul dato. Questa caratteristica conduce ad utilizzare tali metodi in presenza di matrici di grandi dimensioni e fortemente mal condizionate, quali, ad esempio, quelle derivanti da problemi di deconvoluzione in elaborazione di immagini [1]. Per accelerare la velocità di convergenza, spesso il sistema lineare viene opportunamente precondizionato, in modo da ottenere un sistema algebricamente equivalente e dotato di migliori proprietà spettrali. Purtroppo, nel caso di matrici fortemente mal condizionate, tale precondizionamento può condurre ad una perdita delle proprietà regolarizzanti proprie del metodo iterativo scelto, che risulta così inutilizzabile. In questa tesi viene introdotto il concetto di famiglie di precondizionatori regolarizzanti, ossia di precondizionatori in grado di smorzare la ricostruzione della soluzione da componenti del dato affette da rumore e contemporaneamente accelerare la ricostruzione da componenti più significative [4].

In prima istanza consideriamo una matrice $n \times n$ di Toeplitz $A_n = A_n(f)$ generata da una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{C}$, la quale rappresenta la distribuzione spettrale asintotica di A_n [5]. Il sistema lineare $A_n x = b$, precondizionato per mezzo della matrice P_n, viene trasformato nel seguente $P_n^\dagger A_n x = P_n^\dagger b$, dove $P_n^\dagger$ rappresenta l'inversa generalizzata di P_n secondo Moore-Penrose. Per ridurre la complessità computazionale, il precondizionatore P_n viene scelto all'interno di una algebra matriciale $\mathcal{M}_n$ dove il costo del prodotto matrice per vettore e dell'inversione è dell'ordine di $O(n \log n)$ operazioni (associate alle trasformate FFT, FST, etc. [2]). Poiché i metodi iterativi convergono rapidamente in presenza di matrici precondizionate $P_n^\dagger A_n$ con spettro distribuito vicino all'unità, il precondizionatore P_n può essere definito mediante la risoluzione del seguente problema di minimizzazione

$$P_n = P_I(A_n) = \arg \min_{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}} \|\mathrm{X}^\dagger \mathrm{A}_\mathrm{n} - \mathrm{I}\|_{\mathcal{F}}$$

o, in alternativa, mediante la risoluzione del problema seguente

$$P_n = P_{opt}(A_n) = \arg \min_{X \in \mathcal{M}_n} \|A_n - X\|_{\mathcal{F}},$$

dove $\mathcal{F}$ rappresenta la norma di Frobenius [5].

In presenza di sistemi ben condizionati, il precondizionatore $P_n = P_{opt}(A_n)$, denominato *precondizionatore ottimale*, ha permesso di ottenere velocità di convergenza e risultati migliori del precondizionatore $P_n = P_I(A_n)$, denominato *super-ottimale*. Questa situazione è cambiata radicalmente quando il precondizionamento è stato applicato a matrici mal condizionate. L'approssimazione della matrice A_n ottenuta per mezzo dell'ottimale è risultata troppo fine: $P_{opt}(A_n)$ eredita in maniera forte il mal condizionamento della matrice del sistema e diventa così inutilizzabile a causa dell'eccessiva instabilità, specie in presenza di errori sul termine noto del sistema.

Uno studio del caso mal condizionato [2] ha dimostrato che $P_I(A_n)$ approssima soltanto le componenti di A_n corrispondenti ai valori singolari più grandi, le quali generano lo spazio meno sensibile agli errori sui dati, ossia lo spazio dove la ricostruzione è più affidabile, detto *signal space*. In un certo senso, l'utilizzo di P_I consente di accelerare la ricostruzione della soluzione esclusivamente nel signal space.

Con l'obiettivo di migliorare ulteriormente questo risultato, nel nostro lavoro il precondizionatore super-ottimale è stato generalizzato nel modo seguente [3].

DEFINIZIONE 1. – *Si consideri una matrice $C \in \mathcal{M}_n$ di dimensione $n \times n$, che chiameremo* filtro. *Il* precondizionatore super-ottimale filtrante (FSO) *della matrice $n \times n$ A rispetto al filtro $C \in \mathcal{M}_n$, è la matrice $P_C(A) \in \mathcal{M}_n$ che risolve il problema seguente*

$$P_C(A) = \arg \min_{X^\dagger \in \mathcal{M}} \|XA - C\|_{\mathcal{F}}. \tag{1}$$

Il primo risultato che abbiamo ottenuto è stato la seguente espressione esplicita del precondizionatore super-ottimale filtrante.

TEOREMA 1. – *Se la matrice A è non singolare, allora $P_C(A)$ ammette l'espressione seguente*

$$P_C(A)^\dagger = C[P_{opt}(A^*A)]^{-1} P_{opt}(A)^* . \tag{2}$$

Utilizzando le proprietà della norma di Frobenius legate alla traccia matriciale, la scrittura del problema di minimo (1) conduce all'espressione esplicita (2), utile per le applicazioni poiché il precondizionatore ottimale P_{opt} è molto semplice da calcolare.

Nel caso di matrici di Toeplitz mal condizionate, il problema aperto dalla Definizione 1 è ricondotto alla determinazione di un particolare filtro $C \in \mathcal{M}_n$, il quale deve approssimare l'operatore nullo nello spazio del rumore e l'operatore identità nello spazio del segnale. Ricordando le proprietà spettrali del precondizionatore ottimale $P_{opt}(A_n) \in \mathcal{M}_n$ e del super-ottimale $P_I(A_n) \in \mathcal{M}_n$, abbiamo adottato la scelta $C = P_{opt}(A_n)P_I(A_n)^{-1}$, che ha condotto, nel caso simmetrico, al precondizionatore seguente: $P_C(A_n) = [P_{opt}(A_n^2)]^2[P_{opt}(A_n)]^{-3}$.

Un procedimento induttivo, dove il filtro C è realizzato per mezzo di precondizionatori FSO precedentemente costruiti, conduce alla definizione della seguente famiglia di precondizionatori super-ottimali filtranti $\{P_k(A_n)\}_{k \in \mathbf{N}}$ dove

$$P_k(A_n) = [P_{opt}(A_n^2)]^{k+1}[P_{opt}(A_n)]^{-(2k+1)}. \tag{3}$$

Se la matrice di Toeplitz $A_n = A_n(f)$ è generata da un polinomio trigonometrico di grado s della forma $f(x) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{s} a_k \cos(kx)$, dotato di unico zero di ordine p pari nell'origine e l'algebra $\mathcal{M}_n$ è l'algebra delle matrici circolanti, la famiglia

$\{P_k(A_n)\}_{k\in\mathbf{N}}$ è formata da precondizionatori con proprietà regolarizzanti sempre migliori. In questo caso, si hanno i risultati riassunti dal teorema seguente.

TEOREMA 2. – *Si consideri $k\in\mathbf{N}$ fissato; esiste una costante $c_k>0$ tale che*

$$\lambda_j(P_k(A_n)) \geqslant c_k n^k \qquad se \;\; j \leqslant n^{1-1/p} \tag{4}$$

per valori di n sufficientemente grandi, dove $\{\lambda_j\}_{j\leqslant n}$ sono gli autovalori del precondizionatore $P_k(A_n)\in\mathcal{M}_n$ ordinati secondo l'ordine individuato dalle colonne della matrice di Fourier, che ne rappresentano gli autovettori.

Inoltre esiste una costante $\tilde{c}_k>0$ tale che, per valori di n sufficientemente grandi, gli autovalori $\{\lambda_j\}_{j\leqslant n}$ di $[P_k(A_n)]^{-1}A_n$ ordinati in modo crescente verificano

$$\lambda_j([P_k(A_n)]^{-1}A_n) \leqslant \tilde{c}_k \frac{j^p}{n^{p+k}} \qquad se \;\; j \leqslant n^{1-1/p}-2s\,. \tag{5}$$

Nella dimostrazione si determinano gli autovalori della matrice $[P_k(A_n)]^{-1}A_n$ per mezzo delle singolarità della famiglia di matrici $A_n(\varepsilon)=A_n-\varepsilon P_k(A_n)$. Calcolando opportunamente il quoziente di Rayleigh di $A_n(\varepsilon)$ sul sottospazio generato dalle prime colonne della matrice di Fourier, relative agli autovalori corrispondenti allo zero della funzione generatrice f, si ottiene la tesi direttamente invocando il teorema del minimax di Courant-Fisher.

Il Teorema 2 fornisce importanti informazioni sulla distribuzione spettrale dei precondizionatori $P_k(A_n)$. Per le particolari ipotesi sulla funzione generatrice f, si ha che i primi autovalori della matrice di Toeplitz A_n sono infinitesimi di ordine p e sono quindi associati allo spazio del rumore, detto *noise space*. La (4) asserisce che i corrispondenti autovalori del precondizionatore $P_k(A_n)$ sono invece necessariamente non infinitesimi, o equivalentemente, che il precondizionatore $P_k(A_n)$ non approssima la matrice A_n nel noise space. La (5) è un'ulteriore conferma di tale comportamento regolarizzante: gli autovalori della matrice precondizionata $[P_k(A_n)]^{-1}A_n$ relativi al noise space sono infinitesimi di ordine $p+k$ e le corrispondenti componenti sono quindi ridotte in maniera crescente al crescere del livello di regolarizzazione k.

La teoria classica della regolarizzazione per problemi mal posti definisce come algoritmo regolarizzante una famiglia di operatori limitati che approssima l'inverso generalizzato non limitato di un operatore dato [1]. Nella tesi si è sviluppata l'idea di ereditare tale formalismo per definire ed estendere il concetto di precondizionatore regolarizzante alle matrici non necessariamente Toeplitz.

DEFINIZIONE 2. – *Sia $A=\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sequenza di matrici $n\times n$ e sia $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sequenza di algebre matriciali. Una famiglia di matrici $R=\{R_{n;\,\alpha}\}_{\alpha\in(0,\,\alpha_0);\,n\in\mathbf{N}}$, $\alpha_0>0$, $R_{n;\,\alpha}\in\mathcal{B}_n$, è detta* famiglia di precondizionatori regolarizzanti per A *se e solo se esiste una sequenza di precondizionatori $\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ per A, con $P_n\in\mathcal{B}_n$ e $\|A_n-P_n\|_{\mathcal{F}}=o(n)$, tale che valgano le due condizioni seguenti:*

(i) Per ogni $n\in\mathbf{N}$ e per ogni vettore y_n di dimensione n, si ha

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\|R_{n;\,\alpha}y_n-P_n^{\dagger}y_n\|=0$$

(ii) Si considerino i valori singolari $|\lambda_{\min}^{(n)}| = |\lambda_1^{(n)}| \leqslant |\lambda_2^{(n)}| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n^{(n)}| = |\lambda_{\max}^{(n)}|$ *del precondizionatore* P_n *associati ad una base di vettori singolari* $V = \{\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_n^{(n)}\}$ *dell'algebra* $\mathcal{B}_n$ *e si indichi con* $\{\lambda_{1;\alpha}^{(n)}; \lambda_{2;\alpha}^{(n)}; \ldots; \lambda_{n;\alpha}^{(n)}\}$ *l'insieme dei valori singolari della matrice* $R_{n;\alpha} \in \mathcal{B}_n$ *associati alla base V.*

Se $|\lambda_{\min}^{(n)}| \to 0$ *per* $n \to +\infty$ *allora, per valori di* α *sufficientemente piccoli, esiste una funzione* $j_\alpha(n): \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, *soddisfacente* $j_\alpha(n) \leqslant n$ *e* $j_\alpha(n) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, *ed una costante* $0 < Q < 1$, *tale che*

$$0 \leqslant |\lambda_{i;\alpha}^{(n)}|\,|\lambda_i^{(n)}| \leqslant Q < 1 \qquad se\ i \leqslant j_\alpha(n), \quad per\ ogni\ n \in \mathbf{N}.$$

La famiglia di precondizionatori regolarizzanti $\{R_{n;\alpha}\}$ della Definizione 2 approssima, per mezzo della condizione (i), l'inversa generalizzata della famiglia di precondizionatori mal condizionati $\{P_n\}$. Inoltre, utilizzando la disuguaglianza della condizione (ii), tale approssimazione viene realizzata con un controllo sulla divergenza degli autovalori di $R_{n;\alpha}$ corrispondenti agli autovalori piccoli di P_n, generalmente associati al noise space e causa di instabilità numerica. Si è dimostrato che la famiglia di precondizionatori (3), opportunamente estesa all'indice reale α, e quella proposta in [4], sono precondizionatori regolarizzanti nel senso della Definizione 2.

La tesi contiene inoltre un'estensione dei risultati al caso di problemi multidimensionali quali, ad esempio, l'elaborazione di immagini. Una serie di risultati numerici circa l'applicazione ad un problema mal condizionato di ricostruzione di immagini astronomiche da un modello di telescopio attualmente in costruzione (LBT), conferma la validità della classe dei precondizionatori proposta.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Bertero e P. Boccacci, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, Institute of Physics Publishing, London (1998).

[2] F. Di Benedetto e S. Serra Capizzano, *A note on the superoptimal matrix algebra operators*, Linear Multilin. Algebra, in stampa.

[3] C. Estatico, *A class of filtering superoptimal preconditioners for highly ill-conditioned linear systems*, BIT, **42** (2002), 753-778.

[4] M. Hanke, J. Nagy e R. Plemmons, *Preconditioned iterative regularization for ill-posed problems*, Numerical linear algebra (Kent, OH, 1992), de Gruyter, Berlin (1993), 141-163.

[5] E. Tyrtyshnikov, *Optimal and superoptimal circulant preconditioners*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **13** (1992), 459-473.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova
e-mail: estatico@dima.unige.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo XIV
Direttori di ricerca: Prof. Mario Bertero, Università di Genova,
e Prof. Fabio Di Benedetto, Università di Genova