LUISA FAELLA

Su alcuni problemi nell'omogeneizzazione e risultati di estensione unica nel calcolo delle variazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 255–258.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_255_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 255-258

Su alcuni problemi nell'omogeneizzazione e risultati di estensione unica nel calcolo delle variazioni.

LUISA FAELLA

La teoria dell'omogeneizzazione descrive il comportamento di materiali compositi, che, per le loro proprietà, sono ampiamente utilizzati nell'ingegneria civile, nell'industria aerospaziale, ecc.. Siffatti materiali sono caratterizzati dalla presenza di due o più sostanze finemente miscelate tra di loro. Tale miscela migliora, in generale, alcune proprietà delle singole sostanze di partenza. La teoria dell'omogeneizzazione tenta, dunque, di descrivere le proprietà globali del composito, che, da un punto di vista macroscopico, si comporta come un materiale «*omogeneo*».

Nello studio del comportamento macroscopico di un composito posto in una regione Ω dello spazio, è realistico assumere che le eterogeneità, identiche tra loro e «piccole» rispetto alla dimensione di Ω, siano distribuite periodicamente. Tali caratteristiche sono descritte attraverso un parametro «ε» che tende a zero.

Nella tesi si presentano alcune applicazioni della teoria dell'omogeneizzazione a materiali perforati periodicamente, in cui i buchi giocano il ruolo delle inclusioni. Più precisamente vengono presi in esame problemi ellittici definiti in domini perforati periodicamente descritti in funzione di ε.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, con frontiera regolare $\partial\Omega$, $\varepsilon > 0$ un parametro in una successione convergente a zero ed $r(\varepsilon)$ un altro parametro tale che $0 < r(\varepsilon) \ll \varepsilon$. Sia Ω_ε il sottoinsieme di Ω ottenuto rimuovendo da Ω sfere chiuse di raggio $r(\varepsilon)$ ben contenute in Ω (i «buchi») e periodicamente distribuite con periodo ε lungo ciascuna delle direzione assiali. Si consideri, dunque, il seguente problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ \text{condizioni al bordo} & \text{su } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$.

Se $u_\varepsilon = 0$ su $\partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$, il comportamento asintotico, per $\varepsilon \to 0$, del problema (1) è stato studiato da D. Cioranescu e F. Murat [2]. Essi provano che, per $r(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$ $(n > 2)$ (taglia critica), l'equazione limite, definita in tutto Ω, è data da $-\Delta u + \mu u = f$ ove μ «the strange term» è la capacità armonica del buco di riferimento rispetto ad $\mathbf{R}^n$. Se, invece, si assume una condizione di Neumann non omogenea su $\partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$, il comportamento asintotico per $\varepsilon \to 0$, del problema (1) è stato studiato da C. Conca e P. Donato [4]. Essi provano che, per $r(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{n}{n-1}}$ $(n > 1)$ (taglia critica), l'equazione limite, definita in tutto Ω, è data da $-\Delta u = f + c$, con c costante proporzionale al limite del flusso totale delle soluzioni attraverso la frontiera dei buchi.

Se si scelgono sulla frontiera dei buchi zone con condizioni di Dirichlet e zone con condizioni di Neumann, si possono verificare, al limite, fenomeni di interferenza.

Più precisamente, sia Ω_ε un dominio perforato periodicamente, con periodo ε, con buchi cubici di taglia $\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}$ (taglia critica in [4]). Se si prende, sulla frontiera di ciascun buco, in una zona piatta di taglia $\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$ (taglia critica in [2]), la condizione di Dirichlet omogenea $u_\varepsilon = 0$, mentre sulla rimanente parte della frontiera dei buchi una condizione di Neumann non omogenea, il comportamento asintotico, per $\varepsilon \to 0$, del problema (1) è stato studiato da A. Corbo Esposito, C. D'Apice ed A. Gaudiello [5]. Essi provano che l'equazione limite, definita in tutto Ω, è data da $-\Delta u + \frac{1}{2}\mu u = f + c$, dove l'interpretazione delle costanti μ e c è la stessa che in precedenza, mentre la presenza del fattore $\frac{1}{2}$ è dovuta all'interferenza, nel processo limite, tra la condizione di Neumann e quella di Dirichlet.

In particolare nella tesi vengono descritti alcuni nuovi risultati, parte dei quali sono dimostrati in [7], nello studio dei fenomeni di interferenza.

Si rimuovano da Ω due famiglie di buchi distribuiti periodicamente con periodo ε: la prima famiglia è costituita da buchi di taglia ε; la seconda è costituita da buchi di taglia $\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$ se $n \geq 3$ ($\exp(-\varepsilon^2)$ se $n = 2$). Ciascun elemento della seconda famiglia si muove perpendicolarmente verso una zona piatta di un elemento della prima famiglia (può anche giacere su questo). Assegnata una condizione di tipo Neumann non omogenea sulla frontiera dei buchi della prima famiglia, ed una condizione di tipo Dirichlet omogenea sull'altra (se esistono intersezioni non vuote, si considera una condizione di tipo Dirichlet omogenea sull'intersezione), si studia il processo di omogeneizzazione in dipendenza anche della velocità di «avvicinamento» delle due famiglie di buchi. Vengono considerate diverse velocità di avvicinamento: $\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$ se $n \geq 3$ ($\exp(-\varepsilon^2)$ se $n = 2$) risulta essere una taglia critica per la velocità.

Più precisamente, denotata con $Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ la cella di riferimento, si consideri, come primo buco di riferimento, un cubo Q contenuto in $Y \cap \{x_1 \geq 0\}$ e con una faccia sull'iperpiano $\{x_1 = 0\}$. Si consideri, poi, un secondo buco di riferimento K contenuto in $Y \cap \{x_1 \leq 0\}$.

La prima famiglia di buchi è ottenuta perforando Ω, periodicamente con periodo ε, mediante l'insieme εQ. Sulla frontiera di questa famiglia di buchi si considera una condizione di tipo Neumann non omogenea del tipo $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = g_\varepsilon$ ove $g_\varepsilon = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ è la peridiocizzata di una funzione g in $L^2(\partial Q)$ a media nulla.

La seconda famiglia di buchi è ottenuta perforando Ω, periodicamente con periodo ε, con l'insieme $\varepsilon^{\frac{n}{n-2}} K + \tau\varepsilon^\sigma$ se $n \geq 3$ ($\exp(-\varepsilon^{-2}) K + \tau \exp(-\varepsilon^{-\sigma})$, se $n = 2$), ove $\sigma \geq 1$ e $\tau = (\tau_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ con $\tau_1 \leq 0$. Sulla frontiera di questa famiglia di buchi si considera la condizione di Dirichlet nulla.

Se $K \cap Q$ è non vuoto, allora si considera assegnata una condizione di tipo Dirichlet nulla sull'intersezione tra il buco di «Dirichlet» e quello di «Neumann».

Sia $\Omega_\varepsilon^{\tau,\sigma}$ il dominio ottenuto rimuovendo da Ω le due suddette famiglie di buchi. L'obiettivo è, dunque, studiare il comportamento asintotico, per $\varepsilon \to 0$, del seguente problema:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon^{\tau,\sigma} = f & \text{in } \Omega_\varepsilon^{\tau,\sigma}, \\ u_\varepsilon^{\tau,\sigma} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ \text{condizioni descritte su } \partial\Omega_\varepsilon^{\tau,\sigma} \setminus \partial\Omega. \end{cases}$$

Si dimostra che la successione delle soluzioni $u_\varepsilon^{\tau,\sigma}$, opportunamente prolungate in $H_0^1(\Omega)$, converge, debolmente in $H_0^1(\Omega)$, alla soluzione $u^{\tau,\sigma}$ del seguente problema:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} -div\ \mathcal{A}(\nabla u^{\tau,\sigma}) + \dfrac{1}{2}\mu^{\tau,\sigma} u^{\tau,\sigma} = \theta f & in\ \Omega, \\ u^{\tau,\sigma} = 0 & su\ \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\theta = \dfrac{|Y \setminus Q|}{|Y|}$ è la frazione del «volume» di materiale contenuto in Ω, $\mathcal{A}$ è la matrice omogeneizzata individuata da D. Cioranescue J. Saint Jean Paulin [3], $\mu^{\tau,\sigma}$ è una costante dipendente da i buchi, dalla velocità di avvicinamento e dalla distanza «finale» tra il buco di Neumann e quello di Dirichlet.

Precisamente, si prova che

$$\text{(4)} \qquad \mu^{\tau,\sigma} = \begin{cases} 2\, cap(K) & \text{se } 1 \leq \sigma < \dfrac{n}{n-2} \text{ per ogni } \tau \\ cap((K+\tau) \cup (K^* - \tau)) & \text{se } \sigma = \dfrac{n}{n-2} \\ cap(K \cup K^*) & \text{se } \sigma > \dfrac{n}{n-2} \text{ per ogni } \tau \end{cases}$$

se $n \geq 3$,

$$\mu^{\tau,\sigma} = \begin{cases} 4\pi & \text{se } \sigma < 2 \\ 2\pi & \text{se } \sigma \geq 2 \end{cases}$$

se $n = 2$, ove $cap(A)$ denota la capacità armonica dell'insieme $A \subseteq \Omega$ rispetto ad $\mathbf{R}^n$ e $K^* = \{x \in \mathbf{R}^n : (-x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\}$.

Il passaggio al limite nel prodotto di due successioni debolmente convergenti è una delle maggiori difficoltà da affrontare. Per ovviare a tale difficoltà si utilizza il metodo delle energie introdotto da Tartar, costruendo opportune funzioni test oscillanti. Si usano argomenti di riflessioni sia per costruire le funzioni test, sia per ottenere un'opportuna famiglia di operatori di prolungamento delle soluzioni.

L'assenza di termini addizionali nel termine noto dell'equazione limite è una conseguenza della condizione $\int_{\partial Q} g = 0$. Si osservi che nel caso $1 \leq \sigma < \dfrac{n}{n-2}$ il termine $\dfrac{1}{2}\mu^{\tau,\sigma}$, presente nell'equazione limite, è esattamente lo «strange term» in [2] e nel caso $\sigma = \dfrac{n}{n-2}$ ne è esattamente la metà.

Successivamente si affronta il problema dell'estensione unica per funzionali del Calcolo delle Variazioni, ispirato dai classici problemi di estensione per il funzionale di Dirichlet e dell'area.

L'obiettivo è provare alcuni risultati in modo da ottenere l'unicità dell'estensione per una classe di funzionali, includenti quelli dell'area, in un contesto assiomatico.

In [1] L. Carbone e R. De Arcangelis hanno affrontato tale problema usando proprietà mensurali come l'interna regolarità dei funzionali.

Si propone, invece, un risultato di estensione unica modellato su condizioni che implicano l'interna regolarità e sono più semplici da provare. Il problema dell'estensione unica per funzionali astratti inferiormente semicontinui e invarianti per traslazioni, da una classe di funzioni regolari ad una classe di funzioni meno regolari, è risolto usando proprietà omotetiche, assumendo cioè un «buon» comportamento dei funzionali in relazione alle omotetie suggerite da una formula di cambiamento omotetico di variabili.

In particolare tali risultati, contenuti in [6], vengono applicati ad alcuni funzionali integrali del Calcolo delle Variazioni, come il funzionale dell'area.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carbone L., De Arcangelis R., *On the Unique Extension Problem for Functionals of the Calculus of Variations*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **12** (2001), 85-106.

[2] Cioranescu D., Murat F., *A strange term coming from nowhere*, Topics in the mathematical modelling of composite materials Nonlinear Differential Equations Appl., **31, Birkh** (1997), 45-93.

[3] Cioranescu D., Saint Jean Paulin J., *Homogenization in Open Sets with Small Holes*, J. Math. Anal. and Appl., **71** (1978, 560-607.

[4] Conca C., Donato P., *Non Homogeneous Neumann Problems in Domains with Small Holes*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, **22 (4)** (1988), 561-608.

[5] Corbo Esposito A., D'apice C., Gaudiello A., *Homogenization in a perforated domain with both Dirichlet and Neumann boundary conditions on the holes*, Asymptot. Anal., **31** (2002), 297-316.

[6] De Maio U., Faella L., Perugia C., *Homothetic changes of variables and the unique extension problem in Calculus of Variation*, apparirà su Ita. J. Pure Appl. Math.

[7] Durante T., Faella L., Perugia C., *Homogenization of some types of Neumann and Dirichlet problems*, Ricerche Mat., **LI fasc. 1** (2002), 127-158.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»,
Università degli Studi di Napoli «Federico II»
e-mail: lufaella@unina.it
Dottorato in Matematica Applicata ed Informatica
(sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XIII
Direttore di Ricerca: Prof. Luciano Carbone