Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Roberta Filippucci

Esistenza e non esistenza per sistemi quasivariazionali con applicazioni ai sistemi ellittici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 259–262.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 259-262

Esistenza e non esistenza per sistemi quasivariazionali con applicazioni ai sistemi ellittici.

ROBERTA FILIPPUCCI

In un recente lavoro Naito e Usami [5] hanno studiato il problema dell'esistenza e della non esistenza di soluzioni intere non negative di

$$\text{div}\,(A(|Du|)\,Du) \geq f(u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

ove Du denota il gradiente di u, $f(u)$ è del tipo u^{p-1}, $u>0$, $p>1$ e importanti esempi per A sono rappresentati dall'operatore m-Laplaciano, $A(s)=s^{m-2}$, $s>0$, $m>1$, e dalla curvatura media, $A(s)=(1+s^2)^{-1/2}$, $s \geq 0$. Naito e Usami provano che se

$$\lim_{s \to \infty} sA(s) < \infty\,,$$

per esempio se A è l'operatore curvatura media, allora l'unica soluzione intera non negativa di (1) è $u \equiv 0$, mentre se

$$\lim_{s \to \infty} sA(s) = \infty\,,$$

per esempio se A è l'm-Laplaciano, allora (1) ha infinite soluzioni positive quando

$$\int^{\infty} \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty$$

e non ammette soluzioni, eccetto $u \equiv 0$, quando

$$\int^{\infty} \frac{ds}{H^{-1}(F(s)/n)} < \infty\,, \tag{2}$$

ove $F(u) = \int_0^u f(s)\,ds$, e $H(s)$ è la funzione strettamente crescente

$$H(s) = s^2 A(s) - \int_0^s \sigma A(\sigma)\,d\sigma, \qquad s>0\,.$$

Per provare la non esistenza, l'idea in [5] è quella di mostrare, usando un *lemma di confronto* conseguenza del principio di massimo, che se (1) ammette una soluzione intera non banale allora necessariamente ammette una soluzione radiale non banale $v = v(|x|)$. Successivamente si dimostra che (1) *non ammette soluzioni intere radiali*.

Lo scopo della tesi è quello di estendere i risultati di Naito e Usami in due direzioni: considerando il *caso vettoriale*, cioè i sistemi ellittici, e introducendo nella divergenza un *termine di tipo diffusione della forma* $g(u)$, il cui prototipo è rappresentato da $g(u) = |u|^{\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Precisamente studieremo l'esistenza e la non esistenza di soluzioni $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ di

$$\operatorname{div}(g(u)A(|\nabla u|)\nabla u) - D_u g(u)\,\mathcal{A}(|\nabla u|) = f(|x|, u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

ove ∇u denota la matrice Jacobiana e $\mathcal{A}(s) = \int_0^s \sigma A(\sigma)\, d\sigma$.

Una delle principali difficoltà che si incontrano trattando il caso vettoriale è che in generale *il principio di massimo non vale.* Per questo motivo, quando $N > 1$, *restringeremo la nostra attenzione alle soluzioni radiali* $u = u(|x|)$ di (3), le quali soddisfano il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$[g(u)\,A(|u'|)\,u']' + \frac{n-1}{r} g(u)\,A(|u'|)\,u' - D_u g(u)\,\mathcal{A}(|u'|) = f(r, u), \quad r > 0,$$

$$u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^N, \quad u'(0) = 0, \quad u' = du/dr, \quad r = |x|.$$

Mettiamo in evidenza che tale sistema è un sottocaso particolare della classe dei sistemi quasivariazionali ampiamente studiata nella tesi. Per illustrare i nostri risultati, presenteremo solo alcune applicazioni relative ai prototipi da noi trattati.

TEOREMA 1. – *Siano* $\gamma \in \mathbb{R}$, $m > 1$ *e* $p > 1$. *I sistemi ellittici*

$$\operatorname{div}\left(|u|^{\gamma}\,|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) - \frac{\gamma}{m}\,|u|^{\gamma-2}u\,|\nabla u|^{m} = |u|^{p-2}u,$$

$$\operatorname{div}\left(|u|^{\gamma}(1 + |\nabla u|^{2})^{m/2-1}\nabla u\right) - \frac{\gamma}{m}\,|u|^{\gamma-2}u\left[(1 + |\nabla u|^{2})^{m/2} - 1\right] = |u|^{p-2}u, \quad m \leq 2,$$

(i) ammettono soluzioni radiali locali;

(ii) non ammettono soluzioni radiali intere non banali se

$$1 < m < p, \qquad -m - p(m-1) < \gamma < p - m;$$

(iii) ammettono soluzioni radiali intere, cioè ogni soluzione radiale locale può essere prolungata a tutto $\mathbb{R}^n$, *se*

$$\gamma \geq p - m.$$

La dimostrazione dell'esistenza locale in (i) è basata su un risultato di Leoni in [2], mentre (ii) e (iii) si ottengono utilizzando un argomento sviluppato per trattare equazioni d'evoluzione astratte da Levine e Serrin in [4] e da Levine, Park e Serrin in [3], rispettivamente. Osserviamo infine, che la condizione $m < p$ in (ii) è equivalente a (2), infatti nel caso dell'operatore m-Laplaciano, si ha che $H(s) = \frac{m-1}{m} s^m$, $F(u) = |u|^p/p$ e $H^{-1}(F(\sigma)) = c\sigma^{p/m}$, ove c è costante positiva. Quindi l'integrale in (2) converge se e solo se $m < p$.

Mettiamo in evidenza che nel caso vettoriale non è possibile utilizzare un cambio di variabili per eliminare il fattore $|u|^{\gamma}$ dal termine di tipo divergenza. Inoltre l'asserto (ii) del Teorema 1 implica che ogni soluzione radiale locale del corrispondente sistema non può essere prolungata a tutto $\mathbb{R}^n$.

Infine abbiamo considerato la curvatura media, la quale deve essere trattata separatamente in quanto non soddisfa le ipotesi del teorema principale di non esistenza della tesi, in quanto il suo ordine di crescita a ∞ è $m = 1$.

TEOREMA 2. – *Sia $p > 1$. Allora il sistema*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = |u|^{p-2} u$$

non ammette soluzioni radiali intere non banali.

Un'altra sostanziale differenza tra il caso vettoriale e quello scalare è legata al fatto che nel caso scalare abbiamo a disposizione proprietà di monotonia. Infatti nel caso scalare $N = 1$ è facile dimostrare che se u è una soluzione radiale, locale e non negativa di (3) con dato «iniziale» $u(0) = u_0 > 0$, allora $u = u(|x|)$ è crescente e, inoltre se $B(0, R)$ è il suo dominio massimale di esistenza, allora o

$$\lim_{r \to R^-} u(r) = \infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{r \to R^-} u'(r) = \infty\,.$$

La situazione diventa estremamente più delicata nel caso vettoriale in quanto non possiamo parlare di monotonia delle soluzioni. Tuttavia possiamo dimostrare i seguenti risultati:

TEOREMA 3. – *Il sistema ellittico*

$$\operatorname{div}\left(|u|^{\gamma} |\nabla u|^{m-2} \nabla u\right) - \frac{\gamma}{m} |u|^{\gamma-2} u |\nabla u|^m = |u|^{p-2} u,$$

con

$$1 < m < p \quad e \quad -m - p(m-1) < \gamma < p - m,$$

ammette una famiglia ad un parametro di soluzioni $u : B(0, R) \to \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{|x| \to R^-} |u(|x|)| = \infty\,.$$

Nel caso speculare, cioè quando abbiamo esistenza globale, otteniamo sia per l'm-Laplaciano che per la curvatura media generalizzata il seguente:

TEOREMA 4. – *Siano*

$$m > 1, \quad p > 1 \quad e \quad \gamma \geqslant p - m,$$

allora i sistemi ellittici

$$\operatorname{div}\left(|u|^{\gamma} |\nabla u|^{m-2} \nabla u\right) - \frac{\gamma}{m} |u|^{\gamma-2} u |\nabla u|^m = |u|^{p-2} u, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\left(|u|^{\gamma} (1 + |\nabla u|^2)^{m/2-1} \nabla u\right) - \frac{\gamma}{m} |u|^{\gamma-2} u \left[(1 + |\nabla u|^2)^{m/2} - 1\right] = |u|^{p-2} u, \quad m \leqslant 2, \tag{5}$$

ammettono una famiglia ad un parametro di soluzioni radiali intere non banali $u = u(|x|)$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *tali che* $\lim_{|x| \to \infty} |u(|x|)| = \infty$, *cioè i sistemi* (4) *e* (5) *ammettono soluzioni radiali intere.*

Quando $N = 1$, il Teorema 1 (ii) può essere migliorato togliendo la limitazione inferiore per γ. Infatti tale limitazione è precipua della tecnica utilizzata per trattare il caso vettoriale. Inoltre, usando una versione debole di un lemma di confronto dovuto a Pucci, Serrin e Zou in [6] e argomentando come in [5], otteniamo non esistenza di soluzioni intere, non necessariamente radiali, della disuguaglianza ellittica

$$\operatorname{div}(g(u)\, A(|Du|)\, Du) - g'(u)\, \mathcal{A}(|Du|) \geq f(|x|, u), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

In particolare, per un caso particolare della disuguaglianza (6) di interesse applicativo, otteniamo il seguente:

TEOREMA 5. – *La disuguaglianza ellittica*

$$\operatorname{div}\left(u^{\gamma}\, |Du|^{m-2} Du\right) - \frac{\gamma}{m} u^{\gamma - 1} |Du|^m \geq u^{p-1} \quad in \quad \mathbb{R}^n \tag{7}$$

non ammette soluzioni intere positive se

$$1 < m < p \quad e \quad \gamma < p - m,$$

mentre ammette soluzioni intere positive se

$$m > 1, \quad p > 1, \quad \gamma \geq p - m.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] FILIPPUCCI R., *Nonexistence of radial entire solutions of elliptic systems*, in corso di pubblicazione in J. Diff. Equations (2002), 31 pages.

[2] LEONI G., *Existence of solutions for strongly degenerate differential systems*, Calc. Var. PDE, **5** (1997), 435-462.

[3] LEVINE H. A., PARK S. RO e SERRIN J., *Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy Problem for a nonlinearly damped wave equation*, JMMA, **228** (1998), 181-205.

[4] LEVINE H. A. e SERRIN J., *Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation*, Archive Rat. Mech. Anal., **137** (1997), 341-361.

[5] NAITO Y. e USAMI H., *Entire solutions of the inequality div*$(A(|\nabla u|)\, \nabla u) \geq f(u)$, Math. Z., **225** (1997), 167-175.

[6] PUCCI P., SERRIN J. e ZOU H., *A strong maximum principle and a compact support principle for singular elliptic inequalities*, J. Math. Pures Appl., **78** (1999), 769-789.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
e-mail: roberta@dipmat.unipg.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) – Ciclo XII
Direttore di Ricerca: Prof. Patrizia Pucci, Università di Perugia