Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giorgio Follo

Frattali autosimili generalizzati ed energie invarianti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 263–266.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_263_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 263-266

Frattali autosimili generalizzati ed energie invarianti.

GIORGIO FOLLO

1. – Costruzione di frattali.

Un modo semplice per costruire insiemi che presentino una struttura irregolare ad ogni scala vengano visti è fornito dal seguente risultato dimostrato in [4].

Sia $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_M\}$ una famiglia finita di contrazioni su uno spazio metrico completo (X, d_X), allora esiste un'unico sottoinsieme chiuso e limitato K di X, non vuoto e tale che

$$K = \mathfrak{F}(K) = \bigcup_{i=1}^{M} \overline{f_i(K)}\,. \tag{1}$$

Inoltre K è compatto e per ogni insieme limitato $C \subseteq X$, la successione $(\mathfrak{F}^n(C))$ converge a K nella metrica di Hausdorff.

Un insieme che soddisfi la relazione (1) è detto invariante per la famiglia $\mathfrak{F}$.

Sono esempi di compatti invarianti l'insieme di Cantor, la curva di Koch, il setaccio di Sierpiňski, i tappeti di Sierpiňski e molti altri.

Questo teorema è stato generalizzato considerando una successione $(\mathfrak{F}_n)$ di famiglie finite di contrazioni. Supponiamo che tale successione soddisfi alle seguenti ipotesi:

- esiste un sottoinsieme chiuso e limitato di X, che contenga le immagini di se stesso tramite ogni contrazione delle famiglie della successione.
- se ϱ_n è il massimo delle costanti di Lipschitz delle contrazioni della famiglia $\mathfrak{F}_n$ allora $\lim_n \prod_{k=1}^{n} \varrho_k = 0$;

Allora esiste un'unico sottoinsieme chiuso e limitato K di X, non vuoto e tale che la successione $((\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{F}_n)(C))$ converge a K nella metrica di Hausdorff; inoltre K è compatto.

2. – Costruzione di misure.

Ancora in [4] viene fornito un metodo semplice per costruire misure che abbiano K come supporto.

Supponiamo che lo spazio metrico X sia completo e separabile e sia $l = \{l_1, l_2, \ldots, l_M\}$ un insieme finito di numeri reali in $]0, 1[$, con la condizione che la loro somma sia 1. Allora esiste un'unica misura esterna μ, di Radon, di probabilità, invariante per l'azione della coppia $(\mathfrak{F}, l)$, cioè

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{M} l_i \mu(f_i^{-1}(A)) \quad \forall A \subseteq X . \tag{2}$$

Inoltre K è il supporto di μ.

Se le contrazioni della famiglia $\mathfrak{F}$ sono similitudini in $\mathbb{R}^N$ e soddisfano la condizione dell'insieme aperto (esiste $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, non vuoto e tale che $\mathfrak{F}(A) \subseteq A$ e $f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset$ per $i \neq j$) allora esiste una opportuna scelta dei pesi l_i tale che la corrispondente misura μ abbia una ulteriore proprietà di regolarità: esistono due costanti $a, b > 0$ tali che

$$ar^d \leqslant \mu(B(x, r)) \leqslant br^d \quad \forall x \in K \quad \forall r \in [0, 1] \tag{3}$$

dove d è univocamente determinato dalle costanti di similitudine di $\mathfrak{F}$. In particolare, da questa relazione si deduce che d è la dimensione di Hausdorff di K.

Misure che soddisfino la (3) vengono dette d-misure e i loro supporti d-insiemi. Essi hanno una importanza notevole nello studio di certi spazi funzionali; si veda, per esempio [5].

Come nella precedente sezione abbiamo generalizzato parte di questi risultati; consideriamo una successione (l_n) di insiemi finiti di numeri reali in $]0, 1[$, con $\sharp\, l_n = \sharp\, \mathfrak{F}_n = m_n$ e $\sum_{i=1}^{m_n} l_i^{(n)} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Naturalmente non potremo scrivere un'espressione come (2), ma possiamo ancora affermare che esiste un'unica misura esterna μ di probabilità, Borel regolare, tale per ogni misura esterna ν , di probabilità, Borel regolare, la successione di misure (ν_n) definita da

$$\nu_n(A) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n 1} \left(\prod_{k=1}^{n} l_{i_k}^{(k)} \right) \nu((f_{i_1}^{(1)} \circ f_{i_2}^{(2)} \circ \cdots f_{i_n}^{(n)})^{-1}(A)) \quad \forall A \subseteq X ,$$

converge debolmente a μ. Inoltre K è il supporto di μ.

In generale la misura costruita in questo modo non ha le buone proprietà del caso classico. Si può, per esempio costruire un particolare insieme di Cantor $K \subseteq \mathbb{R}$ mediante una successione $\mathfrak{F}_n$ di famiglie finite di similitudini contrattive soddisfacenti uniformemente la condizione dell'insieme aperto (cioè con lo stesso aperto A per tutte le famiglie), ma per il quale la condizione (3) non può valere per nessuna misura il cui supporto sia K.

3. – Costruzione di energie.

Viene poi affrontato il problema di costruire forme di Dirichlet su sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$. Il metodo seguito è il seguente: dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e limitato e $K \subseteq \Omega$

compatto, si definiscono, al variare di $r>0$ e $\alpha \geqslant 0$, i funzionali $f_r^{(\alpha)}\colon C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}^*$,

$$f_r^{(\alpha)}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^{N-\alpha}} \displaystyle\int_{K_r} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x & \text{se } u \in H^1(\overset{\circ}{K}_r) \cap C(\overline{\Theta}) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove K_r indica l'r-intorno di K e su $C(\overline{\Omega})$ si considera la norma del massimo.

A questo punto si considera il funzionale $f^{(\alpha)}$, definito come il limite, nella Γ-convergenza, di $f_r^{(\alpha)}$, al tendere di r a 0. Se tale limite non esiste, si considerano i Γ-limiti inferiore $f_-^{(\alpha)}$ e superiore $f_+^{(\alpha)}$.

Possiamo pensare a $f^{(\alpha)}, f_-^{(\alpha)}, f_+^{(\alpha)}$ come funzionali definiti su $C(K)$; infatti essi dipendono esclusivamente dai valori assunti dalle funzioni su K.

Viene poi definita una dimensione associata a K. Più precisamente abbiamo chiamato dimensione capacitaria inferiore (superiore) l'estremo inferiore degli $\alpha \geqslant 0$ tali che $f_-^{(\alpha)}$ ($f_+^{(\alpha)}$) è identicamente nullo e dimensione capacitaria l'eventuale valore comune. Tale dimensione risulta essere sempre minore o uguale della dimensione box, mentre dagli studi fatti non emergono relazioni con la dimensione di Hausdorff. Per esempio, se K è totalmente sconnesso allora la sua dimensione capacitaria è 0, mentre quella del prodotto cartesiano $K \times [0, 1]$ potrebbe essere maggiore della corrispondente dimensione di Hausdorff.

La dimensione capacitaria di insiemi regolari non cambia quando questi vengono immersi in uno spazio più grande ($\mathbb{R}^{N+M}$); tuttavia, nel caso generale abbiamo dimostrato solo che non aumenta.

Se K è il supporto di una misura di Radon μ allora si può considerare il funzionale $\overline{h}^{(\alpha)}$, rilassato di $f^{(\alpha)}$, in $L^2(K)$ e la corrispondente forma bilineare $\Sigma^{(\alpha)}$. Allora $\Sigma^{(\alpha)}$ è una forma di Dirichlet locale e conservativa.

In alcuni casi abbiamo trovato una rappresentazione integrale di $f^{(\alpha)}$, con α uguale alla dimensione capacitaria (anch'essa determinata). Tale rappresentazione permette di dimostrare che la forma $\Sigma^{(\alpha)}$ è regolare.

Un capitolo è stato dedicato allo studio della curva di Koch, cercando di costruire una forma quadratica f che fosse invariante, cioè tale che si abbia

$$f(u) = \varrho \sum_{i=1}^{4} f(u \circ f_i) \quad \forall\, u \in C(K), \tag{4}$$

per un'opportuna costante $\varrho > 0$. Quì f_1, f_2, f_3, f_4 sono le similitudini contrattive che generano la curva, secondo lo schema descritto nella prima sezione.

Consideriamo il funzionale $f : C(K) \to \mathbb{R}^*$

$$f(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(\gamma(t)) \right)^2 \mathrm{d}t & \text{se } u \circ \gamma \in H^1(0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}, \tag{5}$$

dove $\gamma : [0, 1] \to K$ è un particolare omeomorfismo e K è, la curva di Koch. È facile vedere che f soddisfa alla relazione (4) con $\varrho = 4$. Inoltre il dominio di finitezza di f è denso in $C(K)$.

Viene poi dimostrata la Γ-convergenza verso f, di due successioni (E_n') ed E_n'' di funzionali definiti su $C(\overline{\Omega})$, con Ω un opportuno aperto limitato contenente K.

Queste successioni vengono definite iterando la (4), cioè ponendo $E_{n+1}'(u) = 4 \sum_{i=1}^{4} E_n'(u \circ f_i)$ (e la stessa cosa per (E_n'')), a partire dai funzionali $E_0'(u) = (u(1, 0) - u(0, 0))^2$ e

$$E_0''(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(\gamma_0(t)) \right)^2 \mathrm{d}t & \text{se } u \circ \gamma_0 \in H^1(0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases},$$

dove $\gamma_0(t) = (t, 0)$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Al momento stiamo procedendo a dimostrare che esistono due costanti moltiplicative c_1, c_2 tali che $f_-^{(\alpha)} = c_1 f$ e $f_+^{(\alpha)} = c_2 f$, con $\alpha = \log_3 4$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*, Birkhauser (1993).

[2] G. Follo, *Some remarks on fractals generated by a sequence of finite systems of contractions*, Georgian Math. J., 8 (2001), 733-752.

[3] G. Follo, *Construction of energies on compact subsets of* $\mathbb{R}^N$, Dipartimento di Matematica »Francesco Brioschi», Politecnico di Milano, **502/P** (2002).

[4] J. E. Hutchinson, *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), 713-747.

[5] H. Triebel, *Fractals and spectra : related to Fourier analysis and function spaces*, Birkhauser, (1997)

Via P. Grandi n. 17, 14100 ASTI
e-mail: follo@science.unitn.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. S. Mortola, Politecnico di Milano