Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Flavia Giannetti

Alcuni problemi relativi ai complessi ellittici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 271–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_271_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 271-274

Alcuni problemi relativi ai complessi ellittici.

FLAVIA GIANNETTI

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e sia $F = (f^1, \ldots, f^N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una distribuzione di Schwartz.

Una coppia div-rot su Ω è una coppia di distribuzioni $\Phi = [B, E] \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^N)$ che soddisfa le seguenti condizioni

$$\operatorname{div} B = 0, \qquad \operatorname{rot} E = 0 \tag{1}$$

Se $\Phi = [B, E] \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, si definiscono la norma e lo Jacobiano rispettivamente come

$$|\Phi(x)| = (|B(x)|^2 + |E(x)|^2)^{1/2}, \qquad J(x, \Phi) = \langle B(x), E(x) \rangle \tag{2}$$

Inoltre si dice che $\Phi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è un campo k-quasiarmonico se esiste una funzione $1 \leq k = k(x) < \infty$ tale che

$$|\Phi(x)|^2 \leq [k(x) + k^{-1}(x)] \, J(x, \Phi) \ \text{ q.o.} \tag{3}$$

Per esempio, se $f = (f^1, f^2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ è nello spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, allora i campi vettoriali $B = \left(\frac{\partial f^2}{\partial x_2}, -\frac{\partial f^2}{\partial x_1} \right)$ e $E = \nabla f^1$, entrambi appartenenti a $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, costituiscono una coppia div $-$ rot.

In tal caso il prodotto $\langle B, E \rangle$ è esattamente il determinante Jacobiano di f. Ovviamente, se f è una mappa a distorsione finita, ovvero se

$$|Df(x)|^2 \leq \mathcal{K}(x) \, J(x, f) \qquad \text{q.o.} \tag{4}$$

per qualche $1 \leq \mathcal{K} < \infty$, allora la coppia $[B, E]$ è un campo k-quasiarmonico.

Più in generale se U, V, W sono spazi di dimensione finita muniti di prodotto interno, assegnato un complesso di operatori differenziali del primo ordine del tipo

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N, \mathbf{U}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N, \mathbf{V}) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N, \mathbf{W}) \tag{5}$$

che sia ellittico ovvero tale che $\operatorname{Im} \mathcal{P}(\xi) = \operatorname{Ker} \mathcal{Q}(\xi)$ per ogni $\xi \neq 0$, la coppia

$$\mathcal{F} = [\mathcal{P}\alpha, \mathcal{Q}^* \beta] \tag{6}$$

con $\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, U)$, $\beta \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, W)$, Q^* operatore aggiunto di Q, è detta *coppia ellittica* associata al complesso.

Ad esempio, il complesso

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \xrightarrow{\text{rot}} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \tag{7}$$

è ellittico e una coppia ellittica ad esso associata è una coppia div − rot.

In analogia con le coppie div − rot si introducono la norma e lo Jacobiano di una coppia ellittica rispettivamente come

$$|\mathcal{F}| = (|\mathcal{P}\alpha|^2 + |\mathcal{Q}^*\beta|^2)^{1/2}, \qquad J(x, \mathcal{F}) = \langle \mathcal{P}\alpha, \mathcal{Q}^*\beta \rangle \tag{8}$$

e si definisce campo k-quasiarmonico una coppia ellittica $\mathcal{F}$ per cui esista $1 \leq k = k(x) < \infty$ tale che

$$|\mathcal{F}|^2 \leq k(x)\, J(x, \mathcal{F}) \tag{9}$$

In questo contesto più generale si studiano alcune questioni del Calcolo delle Variazioni ed altre della teoria degli Jacobiani.

Nel capitolo 3 della tesi, interamente dedicato alle coppie ellittiche, si dà la seguente definizione di policonvessità:

DEFINIZIONE 1. – *Una funzione continua* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ si dice policonvessa se si può esprimere come

$$f(X, Y) = g(X, Y, \langle X, Y \rangle) \tag{10}$$

dove $g : V \times V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convessa.*

Tale definizione risulta più «semplice» di quella della teoria classica del Calcolo delle Variazioni data da Ball in cui si richiede la dipendenza di g oltre che da una matrice A e dal suo determinante, anche da tutti i minori di ordine inferiore.

È opportuno notare che comunque la suddetta definizione corrisponde a quella di Ball nel caso $N = 2$, $\mathcal{P} = \nabla$.

Inoltre generalizzando a tale contesto le definizioni di quasiconvessità e rango-uno convessità, si ritrovano le ben note implicazioni della teoria classica del Calcolo delle Variazioni:

$$\text{Policonvessità} \Rightarrow \text{Quasiconvessità} \Rightarrow \text{Rango-uno convessità}$$

Nello stesso capitolo si studiano le proprietà di integrabilità dello Jacobiano di una coppia ellittica e si ottiene l'analogo di un risultato di R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer e S.Semmes del '93 per le coppie div − rot. Più precisamente si mostra che se $\mathcal{F} \in L^2(\Omega, V \times V)$ è una coppia ellittica e se $J(x, \mathcal{F}) \geq 0$, allora $J(x, \mathcal{F})$ appartiene allo spazio di Zygmund $L \log L_{loc}(\Omega)$.

Nel capitolo successivo si approfondiscono tali questioni di regolarità per lo Jacobiano nel caso particolare in cui $J(x, \mathcal{F})$ coincide con il determinante Jacobiano di una mappa f.

S. Müller è stato il primo ad osservare che, aggiungendo all'ipotesi naturale

$|Df|^N \in L^1$ la condizione $J = J(x, f) \geq 0$, si ottiene una maggiore integrabilità dello Jacobiano, più precisamente $J \in L \log L_{loc}$. T. Iwaniec e C. Sbordone nel '92 hanno ottenuto un risultato duale rispetto a quello di Müller mostrando che se $|Df|^N \in L \log^{-1} L(\Omega)$ e $J(x, f) \geq 0$, allora $J \in L^1_{loc}(\Omega)$ [IS].

Poiché nello studio dell'elasticità non lineare e in quello delle mappe a distorsione finita accade di frequente di incontrare stime integrali dello Jacobiano $J(x, f)$ in termini della matrice dei cofattori $D^\sharp f$, nel capitolo 4 si studiano proprietà di regolarità dello Jacobiano deducibili da ipotesi di integrabilità della matrice $D^\sharp f$.

Il primo risultato in questa direzione è il seguente, ottenuto da S. Müller, T. Qi e B.S. Yan in un lavoro del '94:

$$f \in W^{1, N-1}_{loc},\ J \geq 0,\ |D^\sharp f| \in L^{N/N-1}\} \Rightarrow J \in L \log L_{loc} \tag{11}$$

Nella tesi si ottiene il seguente risultato duale

$$f \in W^{1, N-1}_{loc},\ J \geq 0,\ |D^\sharp f|^{N/N-1} \in L \log^{-1} L\} \Rightarrow J \in L^1_{loc} \tag{12}$$

In entrambi i casi gli strumenti utilizzati sono una disuguaglianza isoperimetrica sui cubi e alcune proprietà degli operatori massimali.

In particolare, nella dimostrazione del risultato duale, la non integrabilità locale dello Jacobiano richiede un'approssimazione della mappa f mediante funzioni che non verificano necessariamente la condizione $J \geq 0$. Pertanto, risulta necessario l'uso di una disuguaglianza isoperimetrica su cubi opportunamente scelti.

Nell'ultimo capitolo si studia la semicontinuità inferiore di funzionali integrali del tipo

$$\int_\Omega f(x, u, \mathcal{L}(u(x)))\, dx \tag{13}$$

dove $u \in W^{1, p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, la funzione integranda f soddisfa la condizione di crescita

$$0 \leq f(x, s, \xi) \leq c(1 + |\xi|^q) \tag{14}$$

con $q \geq p > 1$ e $\mathcal{L}$ è un operatore differenziale lineare del primo ordine non necessariamente coincidente con il gradiente (caso classico).

Si prova che se f è quasiconvessa rispetto all'operatore $\mathcal{L}$ e se u_n è una successione dello spazio di Sobolev $W^{1, q}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, allora il funzionale è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1, p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

In particolare si affronta il caso $\mathcal{L}u = (\mathcal{P}v, \mathcal{Q}^* w)$ con $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ operatori differenziali del primo ordine a coefficienti costanti che costituiscono un complesso ellittico e si dimostra un risultato di semicontinuità inferiore per funzionali policonvessi del tipo

$$G(u) = \int g(\langle \mathcal{P}v, \mathcal{Q}^* w \rangle)\, dx \tag{15}$$

con $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ convessa, e quindi per funzionali policonvessi «classici» nel caso bidimensionale.

BIBLIOGRAFIA

[1] GIANNETTI F., IWANIEC T., ONNINEN J., VERDE A., *Estimates of Jacobians by subdeterminants*, J. Geom. Anal., **12** (2002), 299-311.
[2] GIANNETTI F., VERDE A.,*Variational integrals for elliptic complexes*, Studia Math., **140** (2000), 79-98.
[3] GIANNETTI F., VERDE A., *Lower semicontinuity of a class of multiple integrals below the growth exponent*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **10** (2001), 299-311.
[4] IWANIEC T., SBORDONE C., *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses*, Arch. Rational Mech. Anal., **119** (1992), 129-143.
[5] MÜLLER S., QI T.,YAN B.S.,*On a new class of elastic deformations not allowing for cavitation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **11** (1994), 217-243.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»,
Università degli Studi di Napoli «Federico II»
e-mail: giannett@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. C. Sbordone, Università degli Studi di Napoli «Federico II»