BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

MARIA CRISTINA ISIDORI

Sottospazi invarianti per operatori compact friendly in spazi di Sobolev

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 275–278.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_275_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 275-278

Sottospazi invarianti per operatori compact friendly in spazi di Sobolev.

Maria Cristina Isidori

1. – Introduzione.

Il problema dei sottospazi invarianti in spazi di Banach ha appassionato molti analisti fino dagli inizi degli anni '50. Il problema consiste nello stabilire per quali classi di operatori si possa garantire l'esistenza di sottospazi invarianti. Uno dei risultati principali sull'esistenza di sottospazi invarianti è stato fornito da Lomonosov nel 1973. Ricordiamo che in uno spazio di Banach X, un operatore $T \in \mathcal{B}(X)$ è di *Lomonosov* se esistono due operatori non nulli $S, K \in \mathcal{B}(X)$ tali che

(i) S non è un multiplo dell'identità;
(ii) K è compatto;
(iii) $ST = TS$ e $SK = KS$.

Esempi di operatori di Lomonosov sono gli operatori compatti e quelli che commutano con operatori compatti. Il Teorema di Lomonosov afferma che ogni operatore di Lomonosov $T : X \to X$ ha un sottospazio invariante chiuso non banale.

Recentemente, Abramovich, Aliprantis e Burkinshaw ([1]) hanno affrontato il problema in reticoli di Banach, ed hanno proposto una classe di operatori tra reticoli di Banach, i cosiddetti operatori *compact friendly*, che genaralizza quella degli operatori compatti e che ammette sottospazi invarianti. Proprio l'originalità dell'uso dello strumento dell'ordine ci ha suggerito di adattare le stesse tecniche in una classe di spazi nei quali l'ordine non è abitualmente utilizzato: gli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Abbiamo quindi proposto una definizione di operatore compact friendly analoga a quella fornita da Abramovich, Aliprantis e Burkinshaw, utilizzando l'ordine ereditato dagli spazi $L^p(\Omega)$. Per tale classe di operatori abbiamo provato l'esistenza di sottospazi invarianti. Successivamente, in analogia con quanto fatto da Abramovich, Aliprantis, Burkinshaw e Wickstead in spazi di funzioni nei quali si ha accesso alla norma, precisamente gli spazi $C(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ ([4]), abbiamo investigato gli operatori di moltiplicazione.

2. – Operatori compact friendly su reticoli di Banach e sottospazi invarianti.

Ambienteremo i risultati di questo paragrafo in reticoli di Banach. Ricordiamo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 1. – *Un operatore lineare* $S : E \to F$, *dove* E, F *sono reticoli di Banach si dice* positivo *se* $S(x) \geqslant 0$ *per ogni* $x \geqslant 0$.

DEFINIZIONE 2. – *Siano* S, $T : E \to E$ *due operatori su un reticolo di Banach con* S *positivo. Diremo che* S *domina* T *se* $|T(x)| \leqslant S(|x|)$ *per ogni* $x \in X$. *In simboli scriveremo* $T \prec S$.

DEFINIZIONE 3. – *Un operatore* $T : E \to E$ *è* quasinilpotente *in* x_0 *se* $\lim_n \|T^n(x_0)\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

In [1] gli autori hanno introdotto una nozione più debole della compattezza usuale.

DEFINIZIONE 4. – *Un operatore positivo* $B : E \to E$ *è* compact friendly *se esistono tre operatori non nulli* R, K, $A : E \to E$ *con* R, K *positivi e* K *compatto tali che*

i) $RB = BR$;

ii) $A \prec R$;

iii) $A \prec K$.

Esempi di operatori compact friendly sono:

a) gli operatori positivi e compatti;

b) gli operatori positivi che commutano con operatori non nulli positivi e compatti;

c) gli operatori positivi che dominano operatori non nulli compatti e positivi;

d) gli operatori positivi che sono dominati da operatori compatti.

Riportiamo ora il teorema di esistenza di un sottospazio invariante per operatori compact friendly.

TEOREMA 1 ([1]). – *Sia* $B : E \to E$ *un operatore non nullo compact friendly su un reticolo di Banach* E *e quasinilpotente in* $x_0 \geqslant 0$. *Allora* B *ha un sottospazio chiuso invariante non banale.*

3. – Sottospazi invarianti per operatori compact friendly in $W^{1,p}(\Omega)$.

Nella teoria degli operatori compact friendly sviluppata da Abramovich, Aliprantis e Burkinshaw, interviene in maniera determinante la struttura di reticolo di Banach. Gli spazi di Sobolev non sono reticoli di Banach, in quanto la norma non verifica la condizione di monotonia. Come sottospazi vettoriali degli spazi L^p, però, ereditano l'ordine. Pertanto, sullo spazio $W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leqslant p < +\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e Ω aperto, si possono dare le definizioni di operatore positivo e quella di dominazione. Abbiamo quindi proposto la seguente definizione di operatore compact friendly:

DEFINIZIONE 5. – *Un operatore* $B : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ *positivo è* compact friendly *se esistono due operatori positivi e non nulli* $R, K : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$, *con* K *compatto in* $W^{1,p}(\Omega)$ *tali che*

1. $BR = RB$;
2. $K \prec R$.

Questa definizione permette di generalizzare il Teorema 1, che è la ragione principale per la quale la definizione di operatore compact friendly è stata introdotta in letteratura. Infatti vale il seguente risultato.

TEOREMA 2. – *Sia* $B : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ *un operatore compact friendly e quasinilpotente in qualche* $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_0 > 0$. *Allora* B *ha un sottospazio chiuso invariante non banale.*

4. – Operatori di moltiplicazione.

La nostra investigazione si è poi spostata sugli operatori di moltiplicazione, in analogia con quanto fatto da Abramovich, Aliprantis, Burkinshaw e Wickstead negli spazi $C(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$. Presentiamo la caratterizzazione ottenuta da questi autori in $L^p(\Omega)$.

Nel seguito (Ω, Σ, μ) denoterà uno spazio di misura fissato. Sia $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, e sia $M_\varphi : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ l'*operatore di moltiplicazione* generato da φ, definito da $M_\varphi x = \varphi x$, $x \in L^p(\Omega)$. La funzione φ è detta *moltiplicatore*.

Un operatore di moltiplicazione M_φ è positivo se e soltanto se il moltiplicatore φ è positivo.

DEFINIZIONE 6. – *Una funzione misurabile* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ su uno spazio di misura (Ω, Σ, μ) ha un *flat* se esiste un insieme $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ nel quale φ è costante.

TEOREMA 3 ([4]). – *Sia* (Ω, Σ, μ) *uno spazio di misura,* $\varphi \in L^\infty(\mu)$ *con* $\varphi \geqslant 0$. *L'operatore di moltiplicazione* $M_\varphi : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, *è compact friendly se e soltanto se* φ *ha un flat.*

Abbiamo quindi caratterizzato, in una classe di moltiplicatori opportuna, quelli che rendono compact friendly il corrispondente operatore di moltiplicazione. Precisamente abbiamo provato il seguente risultato:

TEOREMA 4. – *Sia* $0 \leqslant \varphi \in W^{1,p}(]0,1[)$ *monotona e sia* $1 \leqslant p < \infty$. *L'operatore di moltiplicazione* M_φ *su* $W^{1,p}(]0,1[)$ *è compact friendly se e solo se* φ *ha un flat.*

La dimostrazione della condizione necessaria è molto laboriosa. In essa si utilizzano gli insiemi di livello del moltiplicatore φ e il prodotto di convoluzione con un opportuno mollificatore. Abbiamo quindi dovuto supportare tale mollificatore su un sottoinsieme di livello di φ in modo che il prodotto di convoluzione non eccedesse tale insieme. La scelta ad ogni passo della dimensione del supporto ha comportato stime basate su un gran numero di parametri. Per questo si è scelta φ monotona, in modo che i suoi insiemi di livello fossero intervalli.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAMOVICH Y.A., ALIPRANTIS C.D. e BURKINSHAW O., *Invariant subspaces Theorems rems for positive operators,* J. Funct. Anal., **124** (1994), 95-111.
[2] ABRAMOVICH Y.A., ALIPRANTIS C.D. e BURKINSHAW O., *Multiplication and Compact-friendly operators,* Positivity, **1** (1997), 171-180.
[3] ABRAMOVICH Y.A., ALIPRANTIS C.D. e BURKINSHAW O., *The invariant subspace problem: some recent advances,* Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **Suppl. 29** (1998), 3-79.
[4] ABRAMOVICH Y.A., ALIPRANTIS C.D., BURKINSHAW O. e WICKSTEAD A.W., *A characterization of compact-friendly multiplication operators,* Indag. Mathem. N.S., **10** (1999), 161-171.
[5] LOMONOSOV V.I. *Invariant subspaces of the family of operators that commute with completely continuous operator,* Funktsional. Anal. Prilozhen, **7**, no. 3 (1973), 55-56.

Dipartimento di Matematica, Università di Firenze
e-mail: isidori@dipmat.unipg.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Anna Martellotti, Università di Perugia