Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefano Leonesi

O-minimalità per espansioni di reticoli Booleani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 283–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 283-286

O-minimalità per espansioni di reticoli Booleani.

STEFANO LEONESI

1. – Introduzione.

Le strutture infinite linearmente ordinate hanno teorie del primo ordine ricche di modelli in ogni possibile cardinalità e dunque difficilmente classificabili. Ciò nonostante, esse includono alcuni buoni esempi nell'ambito dell'algebra, della geometria e persino dell'analisi, per i quali si può proporre una ragionevole nozione di dimensione: il campo reale, ma anche sue espansioni con funzioni esponenziali o funzioni analitiche etc. La comune caratteristica in questi esempi è che i sottoinsiemi definibili 1-ari sono molto «semplici», nel senso che essi sono già definiti da formule senza quantificatori (con parametri) che usano il solo simbolo $\leqslant$. In generale, si chiama o-minimale una struttura che, come le precedenti, espande un ordine lineare in maniera tale che tutti gli insiemi definibili 1-ari sono unioni finite di punti o intervalli. La nozione di o-minimalità, formulata da Van den Dries, fu studiata intensamente da Pillay e Steinhorn negli anni ottanta. Come detto, le strutture o-minimali godono di alcuni teoremi generali di struttura: decomposizione in celle, monotonia, modelli primi, una buona nozione di dimensione, etc. La o-minimalità, quindi, costituisce un argomento della Teoria dei Modelli che è divenuto di primario interesse e che fornisce un numero sempre crescente di applicazioni nell'ambito della Matematica generale.

Diverse possibili varianti della o-minimalità sono state introdotte negli ultimi anni; così si possono considerare le strutture debolmente o-minimali (nozione proposta da Dickmann nel 1984 e sviluppata da D. Macpherson, D. Marker e C. Steinhorn per esempio in [3]. Toffalori, in [5], ha discusso la nozione della o-minimalità per strutture parzialmente ordinate, ed in particolare per espansioni di algebre di Boole. Una struttura $\mathcal{A} = (A, \leqslant, \ldots)$ di questo tipo è detta quasi o-minimale se ogni sottoinsieme definibile (1-ario) S è una combinazione Booleana finita di insiemi definiti dalle condizioni $v \leqslant a$ o $b \leqslant v$ con a, b in A, ed è detta o-minimale se, quando S è X-definibile, allora a, b possono essere scelti nella chiusura algebrica di X. Queste nozioni coincidono quando A espande un'algebra di Boole, ma non in generale, persino all'interno delle strutture con ordine reticolare. Espansioni o-minimali di algebre di Boole includono alcuni interessanti esempi (e, tra le algebre di Boole, solo quelle con un numero finito di atomi) e godono di alcune proprietà di struttura, alcune delle quali sono già state provate in [5] ed altre in [4].

2. – Debole o-minimalità.

In particolare, nella tesi abbiamo discusso la debole o-minimalità per espansioni di reticoli Booleani.

Ricordiamo anzitutto la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1. – *Una struttura linearmente ordinata* $\mathcal{A} = (A, \leqslant, \ldots)$ *è detta debolmente o-minimale se e solo se ogni definibile (1-ario) S è una combinazione Booleana finita di insiemi (definibili) convessi.*

Ci sono due possibili modi per estendere la convessità dal caso lineare a quello per strutture con ordine reticolare.

Per $I \subseteq A$,

a) I è un *insieme convesso* se, $\forall a, b \in I$, $\forall x \in A$ con $a \leqslant x \leqslant b$, $x \in I$;

b) I è un *sottoreticolo convesso* se, $\forall a, b \in I$, $\forall x \in A$ con $a \sqcap b \leqslant x \leqslant a \sqcup b$, $x \in I$.

Ovviamente quando $\leqslant$ è un ordine totale, queste due opzioni coincidono. Ma questo non è in generale vero per strutture con ordine Booleano. Così ci si può domandare quale sia la giusta generalizzazione di convessità per algebre di Boole e per loro espansioni nell'ambito della debole o-minimalità.

Abbiamo provato che, assumendo l'opzione a), la debole o-minimalità perderebbe di significato per le algebre di Boole, in quanto tutte le algebre di Boole sarebbero debolmente o-minimali. Inoltre, seguendo questo secondo approccio, si dimostra che la debole o-minimalità coincide con la o-minimalità (e con la quasi o-minimalità). Più precisamente.

TEOREMA 1. – *Un'algebra di Boole* $\mathcal{A}$ *è debolmente o-minimale se solo se è o-minimale se e solo se ha un numero finito di atomi.*

Pertanto la definizione più ragionevole di debole o-minimalità sembra essere la seguente.

DEFINIZIONE 2. – *Un'espansione* $\mathcal{A} = (A, \leqslant, \ldots)$ *di un'algebra di Boole è debolmente o-minimale se e solo se i soli sottoinsiemi di A definibili in* $\mathcal{A}$ *sono combinazioni Booleane finite di sottoreticoli convessi.*

L'esempio base di strutture debolmente o-minimali e non o-minimali in questo ambito è del tipo $(A, \leqslant, I)$, dove $(A, \leqslant)$ è un reticolo Booleano senza atomi e I è un ideale massimale non principale (o equivalentemente un ultrafiltro proprio) su A (vedi [2]). Inoltre $(A, \leqslant, I)$ è anche una struttura ω-categorica.

In effetti, per le espansioni debolmente o-minimali delle algebre di Boole,vale il seguente teorema.

TEOREMA 2. – *Sia data* $\mathcal{A} = (A, \leqslant, \mathfrak{I})$ *dove* $\mathcal{A}_0 = (A, \leqslant)$ *è un'algebra di Boole e* $\mathfrak{I} = \{I_0, \ldots, I_n\}$ *è un'algebra di Heyting finita di ideali di* $\mathcal{A}$. *Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) $\mathcal{A}$ *è debolmente o-minimale;*

2) $\mathcal{A}$ *è* ω*-categorica;*

3) $\mathcal{A}_0/I_j$ *ha solo un numero finito di atomi per ogni* $j \leqslant n$;

4) l'algebra di Boole $B_1(Th(\mathcal{A}))$ *dei sottoinsiemi* $\emptyset$*-definibili di* A $(=A^1)$ *è finita.*

ESEMPIO. – Una possibile variante è rappresentata dalla struttura $(A, \leqslant, E, P)$ dove $(\mathcal{A}, \leqslant)$ è un'algebra di Boole senza atomi, P è un'unione finita di ideali I ed E è la relazione di equivalenza su $P - \{0_{\mathcal{A}}\}$ le cui classi sono proprio gli $I - \{0_{\mathcal{A}}\}$. Notare che ora I non è necessariamente $\emptyset$-definibile.

3. – Un'analisi più generale.

Si consideri un'arbitraria espansione ω-categorica debolmente o-minimale di un' algebra di Boole. Ci domandiamo quanto sia lontana $\mathcal{A}$ dagli esempi precedenti. Si noti, anzitutto, che quando $\mathcal{A}$ è debolmente o-minimale e ω-categorica, allora ogni modello di $Th(\mathcal{A})$ è debolmente o-minimale. In altre parole, la debole o-minimalità si preserva per elementare equivalenza in questo ambito ristretto.

La ω-categoricità fornisce una naturale partizione di $\mathcal{A}$ in un numero finito di classi di equivalenza convesse; più precisamente.

TEOREMA 3. – *Sia* $\mathcal{A} = (A, \leqslant, \ldots)$ *un'espansione* ω*-categorica debolmente o-minimale di un'algebra di Boole. Esiste una relazione di equivalenza* E *su* A *che partiziona* A *in un numero finito di classi; ogni classe è un insieme convesso; la relazione binaria* $\prec$ *nell'insieme quoziente* A/E *tale che, per* $a, b \in A$, $a \notin b$,

$$a_{|_E} \prec b_{|_E} \Leftrightarrow \exists b' \in A \text{ tale che } a < b' \quad \text{e} \quad b' E b$$

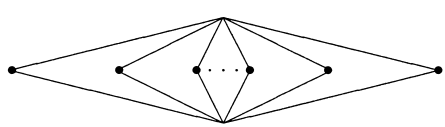
definisce un ordine parziale finito in A/E *isomorfo al suo ordine inverso.*

Tra i possibili ordini parziali finiti che si possono ritrovare in $(A/E, \preccurlyeq)$ elenchiamo

– tutti gli ordini totali;

– gli ordini parziali $(A/E, \preccurlyeq)$ con t elementi diversi da zero a due a due non confrontabili, $\forall t$.

– ma $(A/E, \preccurlyeq)$ non può essere della forma



Infine ci siamo posti il problema di capire quanto un elemento minimale diverso da zero, $\beta(\mathcal{A})$, di A/E sia lontano dall'essere un ideale o un unione finita di ideali di $\mathcal{A}$. E' facile controllare che $\beta(\mathcal{A}) \cup \{0_{\mathcal{A}}\}$ è convesso, chiuso per $\leqslant$, ma non necessariamente chiuso per $\sqcup$ (vedi l'esempio $(A, \leqslant, E, P)$).

Il fatto che $\beta(\mathcal{A})$ in qualche maniera assomiglia ad un ideale di $\mathcal{A}$ si può evidenziare col seguente teorema (vedi [2]).

TEOREMA 4. – *Sia $\mathcal{A}$ un'espansione ω-categorica debolmente o-minimale di un'algebra di Boole, e sia $\beta(v)$ una formula del linguaggio di $\mathcal{A}$ tale che $\beta(\mathcal{A})$ è minimale tra gli elementi di A/E diversi da $\{0_{\mathcal{A}}\}$ rispetto a $\leqslant$. Per $a, b \in \beta(\mathcal{A})$, poniamo*

$$a R b \Leftrightarrow a \sqcup b \in \beta(\mathcal{A});$$

sia R' la chiusura transitiva di R. Allora R' è una relazione di equivalenza $\emptyset$-definibile in $\beta(\mathcal{A})$ che partiziona $\beta(\mathcal{A})$ in un numero finito di classi tali che

$$\forall a \in \beta(\mathcal{A}),\ \forall b \text{ con } 0 < b < a,\ a R' b.$$

Notiamo infine che se esiste $a \in \beta(\mathcal{A})$ tale che

$$a_{|R'} = \{ b \in \beta(\mathcal{A}) : a R b \},$$

allora $R' = R$ è una relazione di equivalenza, ogni R-classe è chiusa per $\sqcup$, e quindi è un ideale (insieme a $0_{\mathcal{A}}$).

Questa è la situazione del precedente esempio $(A, \leqslant, E, P)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. LEONESI, C. TOFFALORI, *Weakly o-minimal Expansions of Boolean Algebras*, Mathematical Logic Quarterly, **47** (2001), 223-238.

[2] S. LEONESI, C. TOFFALORI, *ω-categorical Weakly o-minimal Expansions of Boolean Lattices*, Bollettino UMI, submitted.

[3] D. MACPHERSON, D. MARKER e C. STEINHORN, *Weakly o-minimal Structures and Real Closed Fields*, Trans. Amer. Math. Soc., **352** (2000), 5435-5483.

[4] L. NEWELSKI, R. WENCEL, *Definable sets in Boolean ordered o-minimal strutures I*, J. Symb. Logic, to appear.

[5] C. TOFFALORI, *Lattice ordered o-minimal structures*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **39** (1998), 447-463.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Camerino
e-mail: stefano.leonesi@unicam.it
Dottorato in Logica Matematica ed Informatica Teorica
(sede amministrativa: Siena) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Carlo Toffalori, Università di Camerino