Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Magrone

Metodi di punto critico per equazioni nonlineari ellittiche di segno indefinito e sistemi Hamiltoniani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 287–290.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_287_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 287-290

Metodi di punto critico per equazioni nonlineari ellittiche di segno indefinito e sistemi Hamiltoniani.

PAOLA MAGRONE

1. – Introduzione.

Lo studio di equazioni differenziali di segno indefinito desta continuo interesse, in particolare la ricerca di soluzioni (positive) di un'equazione del tipo $Lu = p(x, u)$, in opportuni spazi di Sobolev scelti a seconda delle condizioni al contorno, ha applicazioni in alcuni problemi della geometria differenziale e della biomatematica. Una vasta letteratura riguardante problemi con segno indefinito è presente anche nello studio dei sistemi Hamiltoniani.

Consideriamo l'equazione ellittica :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) = p(x, u) \text{ in } \Omega \subseteq \mathbf{R}^N, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Una prima motivazione che ha indotto a studiare equazioni del tipo (1) con nonlinearità a crescita critica (rispetto all'immersione di Sobolev), proviene dalla geometria differenziale. Il problema di descrivere tutte le possibili curvature scalari associate alle metriche Riemanniane su una data varietà genera un'equazione del tipo (1) con $p(x, u) = hu^{\frac{N+2}{N-2}}$, cioè esattamente una nonlinearità a crescita critica. Un altro esempio significativo di come si applicano i problemi con segno indefinito viene dalla dinamica delle popolazioni. Si parte da un modello parabolico, le cui soluzioni stazionarie risolvono la nostra equazione ellittica, con $p(x, u) = a(x)|u|^p u$, $p > 0$. La funzione peso $a(x)$ è usualmente considerata positiva, ma ha un significato dal punto di vista biologico anche se è di segno variabile. La funzione u rappresenta la densità di una singola specie in Ω, λ è il tasso di crescita netto, a rappresenta l'effetto dell'eccessivo sovraffollamento sulla crescita della popolazione (effetto negativo, vista la limitatezza del dominio Ω) in Ω^-, e della simbiosi dovuta alla cooperazione intraspecifica in Ω^+, dove $\Omega^{\pm} = \{x \in \Omega : a(x)^{\pm} > 0\}$. Nel caso in cui si abbia a che fare con due o più specie differenti, un adeguato modello è un sistema Hamiltoniano, e la ricerca di soluzioni periodiche (trattata in questa tesi), è significativa dal punto di vista biologico, considerando che molti fenomeni naturali, come le stagioni, sono periodici.

L'approccio utilizzato per la ricerca di soluzioni è di tipo variazionale, ovvero si vogliono trovare le soluzioni attraverso i punti critici di un opportuno funzionale associato al problema, e in questo caso il funzionale, definito in $H_0^1(\Omega)$, è dato da

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega P(x, u) \tag{2}$$

dove $P(x, u) = \int_0^u p(x, \xi)\, d\xi$. Avendo a che fare con funzionali illimitati inferiormente, non si cercano punti di minimo, ma punti critici di tipo «minimax»: i principali teoremi astratti usati in questa tesi sono versioni più o meno standard dei teoremi di Passo Montano e Linking [2]. Volendo applicare un teorema di punto critico si deve provare che il funzionale possiede una certa struttura geometrica, e che sussiste una condizione, detta condizione di Palais Smale, che garantisce la compattezza dell'insieme dei punti critici del funzionale. Diremo che un funzionale $J \in E$ verifica la condizione di Palais Smale se ogni successione u_n contenuta in E, tale che

$$J(u_n) < Ce\|J'(u_n)\| \to 0 \tag{3}$$

ammette una sottosuccessione fortemente convergente. Considerando il funzionale I, possiamo osservare che, se P ha una crescita sottocritica rispetto all'immersione di Sobolev, basta provare che ogni successione di Palais Smale è limitata in norma per poter concludere che ammette una sottosuccessione convergente fortemente. D'altra parte, se P è a crescita critica, poichè in questo caso si verifica una mancanza di compattezza, dopo aver provato la limitatezza delle successioni di Palais Smale, si dovrà anche provarne la convergenza forte.

Le nonlinearità che sono state trattate in questa tesi hanno una crescita di tipo asintoticamente lineare o superlineare, in ogni caso sono non omogenee, e di segno variabile.

2. – Risultati principali.

Consideriamo l'equazione

$$-\Delta u(x) - \lambda u(x) = W(x)\, f(u) \tag{4}$$

dove $W \in C(\Omega)$ cambia segno e f ha una crescita superlineare. Si fornisce un risultato di esistenza di una soluzione, non banale, per l'equazione (4), nel caso in cui la nonlinearità è di segno indefinito ed ha una crescita superlineare, includendo il caso dell'esponente critico. Seguendo lo spirito della dimostrazione fornita da Alama e Tarantello in [1], per $\lambda \leq \lambda_1$, in [7] troviamo una soluzione positiva di Passo Montano eliminando un'ipotesi di omogeneità all'infinito sulla f. Si sfrutta una tecnica introdotta da Girardi e Matzeu in [4] per i sistemi Hamiltoniani per dimostrare la Palais Smale. L'idea principale consiste nell' indebolire l'ipotesi di omogeneità su f richiedendo che la primitiva di f debba differire da una funzione omogenea al più per un termine quadratico, che è in un certo senso controllato dalla parte negativa di W. In un secondo momento si è esteso un risultato di Rabinowitz per soluzioni di tipo Linking di (4) con nonlinearità positiva, al caso $\lambda \geqslant \lambda_1$ e nonlinearità di segno variabile, trattando anche il caso critico con delle ipotesi aggiuntive rispetto al sottocritico [5]. Come è ben noto la presenza dell'esponente critico provoca una mancanza di compattezza; adattando delle tecniche già presenti in letteratura per nonlinearità positive, è possibile dare una stima del livello c dove la condizione di Palais Smale non vale. Si prova che al di sotto di un opportuno livello la Palais Smale è di nuovo valida, quindi operando con la medesima struttura di Linking del caso sottocritico, si è in grado di dedurre l'esistenza di almeno una soluzione, se si prova che il suo livello di energia è al di sotto di una certa costante c^*, che dipende dalla costante di immersione di Sobolev.

Lo studio dell'equazione (1) prosegue con la trattazione di nonlinearità asintoticamente lineari [6]. Si trova un risultato di esistenza di una soluzione positiva, sfruttando il teorema del Passo Montano e alcune proprietà degli autovalori principali di operatori lineari con peso di segno variabile, per provare che, sotto opportune ipotesi, si può escludere la presenza di successioni di Palais Smale illimitate. Infatti, contrariamente a quanto succede nel caso superquadratico, esistono successioni di Palais Smale illimitate se si ha a che fare con nonlinearità asintoticamente lineari.

Un capitolo è stato dedicato alla trattazione del problema di esistenza e moltepilicità di soluzioni periodiche di sistemi Hamiltoniani con potenziale di segno variabile [3]. Il sistema che viene studiato è dato da

$$\ddot{x} + A(t)\,x + b(t)\,V'(x) = 0,$$

dove $A(t)$ è una matrice di segno indefinito, con elementi continui e T-periodici, (per un qualche $T > 0$ fissato), $b(t)$ è una funzione reale, continua e T-periodica e $V \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$.

La tecnica usata si basa sulla considerazione della cosiddetta varietà di Nehari, opportunamente collegata con il funzionale associato al problema. Si considera un potenziale V pari e si sfrutta una tecnica di minimo vincolato e una variante del metodo della categoria di Ljusternik e Schrinelmann per trovare soluzioni periodiche, e, nel caso in cui $A(t)$ è definita negativa, subarmoniche ed omocline.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Alama, G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calc. Var, **1** (1993), 439-475.

[2] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. An., **14** (1973), 349-381.

[3] F. Antonacci, P. Magrone, *Second order nonautonomous Systems with symmetric potential changing sign*, Rend. Mat. di Roma, **18** (1998), 367-379.

[4] M. Girardi, M. Matzeu, *Existence and multiplicity results for periodic solutions of superquadratic Hamiltonian Systems where the potential changes sign*, NoDEA, **2** (1995), 35-61.
[5] M. Grossi, P. Magrone, e M.Matzeu, *Linking type solutions for elliptic equations with indefinite nonlinearities up to the critical growth*, Disc. Cont. Dyn. Sys., **7** (2001), 703-718.
[6] M. Lucia, P. Magrone, e H-S. Zhou, *A Dirichlet problem with asymptotically linear and changing sign nonlinearity*, Acta Mat. Complutense, to appear (2002).
[7] P. Magrone, *On a class on semilinear elliptic equations with potential changing sign*, Dynamical Systems and Appl., **9** (2000), 459-468.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «Tor Vergata»
e-mail: magrone@mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma «Tor Vergata») - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Michele Matzeu, Università di Roma «Tor Vergata»