Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabrizio Marinelli

Applicazione di modelli di cutting e packing a sistemi manifatturieri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 291–294.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_291_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 291-294

Applicazione di modelli di cutting e packing a sistemi manifatturieri.

FABRIZIO MARINELLI

Lo scopo di questa tesi di dottorato è mostrare come i modelli noti di *cutting* e *packing* possano essere applicati con successo a sistemi manifatturieri reali.
Il primo problema affrontato ([1]) è un cutting stock 1-dimensionale con opzione di giunzione: da un rullo di larghezza w, e in accordo alla distinta base $A = \{w_1 \times r_1, w_2 \times r_2, \dots, w_p \times r_p\}$, dove w_i e r_i denotano rispettivamente la *larghezza* e la *richiesta* della i-esima parte, si producono componenti rettangolari con larghezza variabile e altezza costante h. L'item i-esimo della distinta può essere prodotto utilizzando al più due componenti a e b tali che $w_a + w_b = w_i$.

Posto in forma di riconoscimento il problema è un rilassamento del noto *Bin Packing Problem* per il quale vale il seguente

TEOREMA 1. – *Il rilassamento di Bin Packing Problem in cui nessuna parte può essere tagliata in più di due componenti è NP-completo.*

Il problema, formulato in termini di PLI, è stato risolto efficientemente ricorrendo alla tecnica di *Column Generation* e utilizzando un pacchetto software standard.

La differenza rispetto alla classica formulazione di Gilmore e Gomory (vedi [3]) e agli approcci recenti che includono l'opzione di giunzione (vedi per esempio [4]) consiste essenzialmente nella seguente procedura di generazione degli schemi di taglio:

1. Genera gli schemi di taglio (o *pattern primari*) relativi alla Distinta Base A. Sia $\mathbf{A}(p \times n) = \{a_i^j\}$ la matrice intera dove a_i^j indica quanti item di tipo i vengono prodotti dal j-esimo pattern primario e sia $S = \{s_j \in \Re_+ \mid \sum_{i=1}^{p} a_i^j w_i + s_j = w,\ 1 \leq j \leq n\} \cup \{0\}$ l'insieme di tutti gli sfridi (temporanei) prodotti dai pattern primari.
2. Sia $B = \{u_1, u_2, \dots, u_q\} = \{u \in \Re_+ \mid u = w_i - s_j,\ 1 \leq i \leq p,\ s_j \in S\}$ la *Distinta Estesa* ottenuta aggiungendo ad A le componenti *ausiliarie*, ognuna delle quali, unita ad un elemento di S, realizza una parte di A.
3. Genera gli schemi di taglio (o *pattern secondari*) relativi alla Distinta Estesa B.
4. Formula il problema in termini di PLI utilizzando gli schemi di taglio generati nei passi 1 e 3 e le variabili decisionali x_j (*livello di attivazione* del j-esimo pattern primario, $1 \leq j \leq n$), y_k (*livello di attivazione* del k-esimo

pattern secondario, $1 \leqslant k \leqslant m$), z_{ij} (quante volte l'i-esima parte di A è ottenuta *riutilizzando* $s_j \in S$.)

Dato che in generale il numero di schemi di taglio è esponenziale nella cardinalià di B, la soluzione del problema richiede l'applicazione della nota tecnica di Column Generation. In tale ambito si considera come *Master Problem* il rilassamento lineare della formulazione che in forma compatta è:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \min \quad & \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{y}} \\
& \mathbf{Ax} + \mathbf{Dz} = \mathbf{r} \\
& \mathbf{x} - \mathbf{Ez} \geqslant \mathbf{0} \\
& \widetilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{Fz} \geqslant \mathbf{0} \\
& \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\ \tilde{\mathbf{y}} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

in cui $\widetilde{\mathbf{B}}$ è la matrice parziale degli attuali schemi di taglio, e $\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{F}\end{bmatrix}$ è la matrice di incidenza nodi-archi del grafo bipartito $G = (S \cup B, C)$, dove C contiene tutte le coppie (s_j, u_h) tali che $s_j + u_h = w_i$ per qualche $1 \leqslant i \leqslant p$.

Sia v_h^* la soluzione ottima duale corrispondente all'h-esima riga del terzo insieme di vincoli in (1) ($1 \leqslant h \leqslant q$). Il *Pricing Problem* è il seguente problema knapsack-like $max_{\mathbf{b}}\{\sum_{h=1}^{q} v_h^* b_h \mid \sum_{h=1}^{q} u_h b_h \leqslant w;\ \sum_{h=1}^{q} b_h \leqslant l;\ b_h \geqslant 0, \text{integer}\}$ dove l indica il numero massimo di item ottenibili con un singolo schema di taglio. L'algoritmo di pricing utilizzato è una variante dell'algoritmo branch-and-bound di Horowitz-Sahni.

Infine, il Column Generation e una opportuna estensione degli insiemi S e B permettono di generalizzare la procedura di generazione degli schemi di taglio con l'introduzione dei pattern terziari, quaternari e così via (*Riuso Dinamico degli Sfridi*).

La seconda parte della tesi riguarda un problema di ottimizzazione combinatoria relativo alla gestione ottima di un *Material Handling Device* ([2]). Il problema, chiamato *Lazy Cook Problem*, è uno scheduling su macchine parallele con funzione obiettivo *non-regolare*.

PROBLEMA 1 (*The Lazy Cook Problem, LCP-T_{idle}*). – *Dati* (i) *n lavori di durata $a_1, \ldots, a_n$ disponibili tutti al tempo $t = 0$,* (ii) *m macchine identiche, e* (iii) *un intervallo T_{idle}, trovare una schedula e una partizione di T_{idle} negli intervalli $T_1, \ldots, T_q$ tali che ogni lavoro termini in qualche T_i e q sia minimizzato.*

Sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un insieme di interi positivi e $1 \leqslant m \leqslant n$.

DEFINIZIONE 2. – *Un sottoinsieme non vuoto B di A è chiamato m-block se può essere partizionato in m sottoinsiemi $B_1, \ldots, B_m$, tali che* $\sum_{a_i \in B_j} a_i = \sum_{a_i \in B_k} a_i$ *per* $1 \leqslant j < k \leqslant m$.

Risolvere *LCP*-0 per $m = 2$ corrisponde a trovare il massimo numero di 2-blocks di A mutuamente disgiunti. Per mostrare ciò è sufficiente provare il seguente

TEOREMA 2. – *Per* $m = 2$, *LCP*-0 *ammette sempre una schedula* attiva *ottima.*

Tuttavia, dato un intero positivo $p \leqslant n/2$, decidere se A contiene p 2-blocks mutuamente disgiunti è un problema $\mathcal{NP}$-completo. Il problema è equivalente a decidere se un grafo cubico G contiene k cicli pari disgiunti, con k intero positivo.

In accordo alla decomposizione Dantzig-Wolfe, la nozione di 2-block può essere usata per riformulare *LCP*-0 in termini di un problema di *set packing* (*Master Problem*) $\max\{\mathbf{1}\cdot\mathbf{x} : \mathbf{Bx} \leqslant \mathbf{1}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \text{intero}\}$ dove $\mathbf{B}$ è la matrice di incidenza lavori-2-blocks, e un problema di scheduling (*Pricing Problem*) $\min\{\mathbf{y}^*\mathbf{b} : \mathbf{b} \text{ 2-block di } A\}$ dove $\mathbf{y}^*$ è la soluzione ottima duale del Master Problem. L'esistenza di un 2-block in A può essere verificata in tempo e spazio pseudo-polinomiali $O\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ utilizzando l'algoritmo *FindBlock*, mentre il Pricing Problem può essere risolto con una variante «pesata» dello stesso. L'algoritmo complessivo di Price-and-Branch risolve istanze fino a 100 lavori e tempi di processamento nell'intervallo (0, 300.000).

Comunque, per $T_{idle} = 0$ e $m > 2$ l'approccio precedente non è completo nè corretto. Infatti vale il seguente

TEOREMA 3. – *Dato un m-block* $B = \{B_1, \ldots, B_m\}$ *con* $m \geqslant 3$, *sequenziare gli item di ogni* B_i *in modo da minimizzare q relativo all'm-block è* $\mathcal{NP}$*-hard.*

Inoltre, anche se le schedule dei lavori nei block sono tutte equivalenti, massimizzare il numero di m-blocks non corrisponde in generale a minimizzare q e esistono esempi di schedule ottime non-attive. Infine, anche trovare un 3-block è un problema non banale. Infatti vale il seguente

TEOREMA 4. – *Il problema di decidere se gli archi di un grafo connesso e m-regolare possono essere partizionati in m matching perfetti (problema* $\mathcal{NP}$*-completo) si riduce polinomialmente al problema di decidere se A contiene un m-block.*

In conclusione, i contributi principali di ricerca mostrano *i*) che, anche se in forme inaspettate e anche se talvolta richiedono qualche estensione, spesso i modelli di cutting e packing sono adeguati a formulare problemi presenti in sistemi manifatturieri reali; *ii*) che le particolari estensioni relative alle applicazioni studiate sono tutte NP-hard; *iii*) che tali estensioni, tuttavia, possono essere risolte in modo efficiente con tecniche standard della ricerca operativa quali la generazione colonne e il Price-and-Branch.

Vengono inoltre illustrati sotto diversi aspetti i benefici pratici degli algoritmi sviluppati. In particolare, viene mostrato che, almeno al meglio delle nostre conoscenze, il modello di *cutting* supera gli approcci noti a problemi simili.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arbib, C., Di Iorio, F., Marinelli, F., e Rossi, F., *Cutting and Reuse: an Application from Automobile Component Manufacturing*, Operations Research, to appear.

[2] Arbib, C., e Marinelli, F., *The Lazy Cook Problem: Scheduling Parallel Machines to Minimize Vehicle Utilization*, A. Tornambè, G. Conte, A.M. Perdon (eds.), Theory and Practice of Control and Systems, Proc. 6th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Automation (Alghero, I, 9-11 giugno 1998), World Scientific (1998), 817-822.

[3] Gilmore, P.C., e R.E. Gomory, *A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem*, Operations Research, 8 (1961), 849-859.

[4] Johnson, M.P., C. Rennick, e E. Zak, *Skiving Addition to the Cutting Stock Problem in the Paper Industry*, SIAM Reviews, **39:3** (1997), 472-483.

Dipartimento di Informatica, Università di L'Aquila
e-mail: marinelli@di.univaq.it
Dottorato in Ricerca Operativa (sede amministrativa: Roma «La Sapienza») - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Claudio Arbib, Università di L'Aquila