BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FRANCESCA MESSINA

Risolubilità locale per alcune classi di equazioni alle derivate parziali semilineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 295–298.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_295_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 295-298

Risolubilità locale per alcune classi di equazioni alle derivate parziali semilineari.

FRANCESCA MESSINA

In letteratura esistono diversi risultati riguardanti la risolubilità locale di equazioni a derivate parziali lineari e non lineari; in questa tesi di Dottorato ho trovato soluzioni locali per alcune nuove classi di equazioni semilineari.

Utilizzerò le notazioni standard nel caso lineare: $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha$, dove i coefficienti $c_\alpha(x)$ sono funzioni C^∞. Come caso particolare si consideri l'operatore a coefficienti costanti $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$, $c_\alpha \in \mathbf{C}$, associato al polinomio $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha$. Ricordiamo che dal Teorema di Ehrenpreis e Malgrange sull'esistenza della soluzione fondamentale per operatori con coefficienti costanti, cf. Hörmander [3], Vol. II, segue il seguente importante teorema:

TEOREMA 0.1. – *Ogni equazione $P(D) u = g$ è risolubile in $\mathbf{R}^n$ per dati $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, quindi localmente risolubile in ogni punto $x^0 \in \mathbf{R}^n$.*

D'altra parte, dall'esistenza della parametrix di un arbitrario operatore ellittico con coefficienti regolari in $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, è semplice dedurre la risolubilità locale in ogni punto $x^0 \in \Omega$ di ogni operatore ellittico $P(x, D)$ in Ω. Esiste inoltre una condizione necessaria e sufficiente (Nirenberg-Trèves) per la risolubilità locale di operatori lineari di tipo principale.

Negli ultimi anni diversi autori si sono occupati del caso semilineare:

$$P(x, D)\, u + f(x, D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m-1} = g(x) \tag{1}$$

dove la funzione nonlineare $f(x, v)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{C}^M$, è in $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathcal{H}(\mathbf{C}^M))$ con $\mathcal{H}(\mathbf{C}^M)$ l'insieme delle funzione intere in $\mathbf{C}^M$, i.e. f è C^∞ rispetto a x e intera rispetto a v, e dove si suppone nota la risolubiltà locale del termine lineare $P(x, D)$, di ordine m.

In Gramchev-Popivanov [2] si considera il caso in cui la parte nonlineare dell'equazio-ne coinvolge derivate di ordine $\leq m-1$; supponendo la parte lineare invertibile, gli autori applicano il noto Principio di Contrazione. Nel paragrafo 1 sono enunciati alcuni teoremi che estendono il Teorema 0.1 al caso semilineare e nella cui dimostrazione si utilizzano analoghe tecniche di punto fisso. Tali risultati costitui-scono la prima parte della tesi.

Nell'ultimo capitolo ho invece analizzato equazioni semilineari della forma

$$Au + f(x, Q_1, \ldots, Q_M u) = g$$

dove $A, Q_1, \ldots, Q_M$ sono operatori differenziali lineari definiti su una varietà B con singolarità conica e A è ellittico nel senso di Schulze [1]. In Egorov-Schulze [1] gli autori provano l'esistenza della parametrix per tutti gli operatori ellittici e di conseguenza la loro risolubilità in ogni punto di B, in particolare nel punto singolare. Nel paragrafo 2 vedremo una generalizzazione di questo risultato al caso semilineare.

1. – Risolubiltà locale di p.d.e. semilineari di forza costante.

Nella prima parte della tesi (cf. [5]) ho studiato operatori semilineari la cui parte lineare è un generico operatore con coefficienti costanti $P(D)$:

$$P(D)\,u + f(x,\, D^\alpha u) = g(x). \tag{2}$$

La soluzione fondamentale E di un operatore con coefficienti costanti $P(D)$ appartiene localmente agli spazi di Sobolev pesati $B_{\infty,\,\tilde{P}}$ di Hörmander, con $P(\xi)$ il polinomio corrispondente a $P(D)$, $P^{(\alpha)} = \partial^\alpha P$ e $\tilde{P}^2(\xi) = \sum_{|\alpha| \geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2$. È quindi ragionevole prendere $g \in B_{p,\,k}$ e cercare una soluzione di (2) in spazi analoghi. Ricordo che gli spazi pesati $B_{p,\,k}$, $1 \leq p \leq \infty$, di Hörmander sono definiti come l'insieme delle distribuzioni u tali che la trasformata di Fourier $\hat{u}$ è una funzione e $\|u\|_{p,\,k} = \|k(\xi)\,\hat{u}(\xi)\|_{L_p} < \infty$ dove k è una funzione positiva soddisfacente la stima di temperanza $k(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N k(\eta)$, $\forall \xi,\, \eta \in \mathbf{R}^n$, per qualche $C,\, N > 0$. Ho trovato delle condizioni opportune sulla funzione peso k sotto le quali lo spazio $B_{p,\,k}$ forma un'algebra, vedi Teorema 1.1 seguente. Ho poi generalizzato questo risultato provando, sotto le stesse ipotesi, l'invarianza di questi spazi rispetto alla composizione con funzioni analitiche. Questo permette di dare significato al termine non lineare di (2).

TEOREMA 1.1. – *Siano* $1 < p < +\infty$, $u,\, v \in B_{p,\,k}$ *e* k *soddisfancente*

$$\sup_\xi \int |K(\xi,\, \eta)|^q\, d\eta \leq C_0 < +\infty. \tag{3}$$

con $K(\xi,\, \eta) = \dfrac{k(\xi)}{k(\xi - \eta)\, k(\eta)}$ *e* q *tale che* $1/q + 1/p = 1$, *allora* $uv \in B_{p,\,k}$ *e* $\|uv\|_{p,\,k} \leq C\|u\|_{p,\,k} \|v\|_{p,\,k}$.

Ho quindi provato tre teoremi riguardanti la risolubilità locale della seguente equazio-ne, precosazione della (2):

$$F(u) = P(D)u + f(x,\, Q_1(D)\,u,\, \ldots,\, Q_M(D)\,u) = g \tag{4}$$

dove $Q_1(D), \ldots, Q_M(D)$ sono operatori a coefficienti costanti, di ordine inferiore al termine lineare $P(D)$ in un senso opportuno. Chiamerò (4) equazione a derivate parziali semilineare di forza costante. Nel primo teorema ho supposto $Q_i \prec P$, secondo la definizione data da Hörmander e Trèves ($\|Q(D)\,u\|_{L^2} \leq C(P,\, Q,\, \Omega)\|P(D)\,u\|_{L^2}$ per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega)$, essendo Ω sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^n$).

TEOREMA 1.2. – *Sia* $g \in B_{p,\,k}$, *con* $1 < p < \infty$, k *soddisfacente (3) e si consideri l'operatore* F *definito in (4) dove* $Q_i \prec P$ *per* $i = 1, \ldots, M$ *e la funzione non lineare* f *sia tale che* $f(x^0,\, v) = 0$ *per ogni* $v \in \mathbf{C}^M$, *con* $x^0 \in \mathbf{R}^n$ *fissato, allora è possibile trovare* $\varepsilon_0(P,\, Q_1, \ldots,\, Q_M) > 0$ *e* $u^0 \in B_{p,\,k\tilde{P}}$ *tale che* $F(u^0)(x) = g(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$ *dove* $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n / \|x - x^0\| < \varepsilon_0\}$.

Si noti che dall'ipotesi $Q_i \prec P$ si deduce $B_{p,\,k\tilde{P}/\tilde{Q}_i} \hookrightarrow B_{p,\,k}$, quindi $u \in B_{p,\,k\tilde{P}}$ implica $f(x,\, Q_1(D)\,u, \ldots,\, Q_M(D)\,u) \in B_{p,\,k}^{loc}$, per la teoria generale sugli spazi $B_{p,\,k}$. Nella dimostrazione, utilizzando l'esistenza della soluzione fondamentale del termine lineare P e le proprietà del prodotto di convoluzione, si trasforma il problema in un equivalente problema di punto fisso. Si applica quindi il Principio di Contrazione provando l'esistenza di una soluzione in un intorno di x^0.

Nel secondo teorema ho supposto $\dfrac{\widetilde{Q}_i(\xi)}{\widetilde{P}(\xi)} \to 0_{|\xi| \to \infty}$, assunzione più forte su $Q_i(\xi)$, ma non richiedo $f(x^0, v) = 0$ per ogni $v \in \mathbf{C}^M$. Suppongo, invece, $f(x, 0) = 0$, che corrisponde ad un'ipotesi più standard in letteratura.

TEOREMA 1. – *Sia* $g \in B_{p,k}$, con $1 < p < \infty$, *k soddisfacente (3) e* $k(\xi) \geq N > 0$ *per ogni* $\xi \in \mathbf{R}^n$. *Si consideri l'operatore F con* $f(x, 0) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$ *e, per* $i = 1, \dots, M$, $\dfrac{\widetilde{Q}_i(\xi)}{\widetilde{P}(\xi)} \to_{|\xi| \to +\infty} 0$, *allora, per ogni* $x^0 \in \mathbf{R}^n$ *è possibile trovare* $\varepsilon_0(x^0, P, Q_1, \dots, Q_M) > 0$ *e* $u^0 \in B_{p, k\tilde{P}}$ *tale che* $F(u^0)(x) = g(x)$, *per ogni* $x \in \Omega$.

Anche in questo caso si trasforma l'equazione (4) in un equivalente problema di punto fisso. Dall'ipotesi $\dfrac{\widetilde{Q}_i(\xi)}{\widetilde{P}(\xi)} \to_{|\xi| \to \infty} 0$ segue $B_{p, k\tilde{P}/\tilde{Q}_i} \hookrightarrow B_{p,k}$, in particolare l'inclusione è compatta, si applica quindi il Teorema di Punto Fisso di Schauder. Concludo che l'equazione (4) è localmente risolubile in ogni punto di $\mathbf{R}^n$.

Le ipotesi nel teorema seguente sono più deboli delle ipotesi assunte nel Teorema 1.3, ma l'ambito funzionale è ora limitato ad alcuni spazi $H_k := B_{2,k}$. Più precisamente si suppone $g \in H_k$ avente la proprietà di algebra, e k della forma particolare $k = \psi^r$, con $r \in \mathbf{R}$, $\psi \in C^\infty$ soddisfacente le stime di «slowly varying», più forti della condizione di temperanza. Assumo inoltre l'ipotesi $Q_i < < P$ ($\|Q(D)\, u\|_{L^2} \leq C(P, Q, \Omega) \|P(D)\, u\|_{L^2}$ per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega)$ e $C(P, Q, \Omega) \to 0$ quando $\mathrm{meas}(\Omega) \to 0$).

TEOREMA 1.4. – *Sia* $g \in H_k$, *con k soddisfacente (3) con* $p = 2$, $k = \psi^r$ *con* $r \in \mathbf{R}$ *e* $\psi(\xi)$ *«Slowly Varying»,* $\psi^{-1}(\xi) \geq N > 0$ *per ogni* $\xi \in \mathbf{R}^n$. *Si consideri l'operatore F dove, per* $i = 1, \dots, M$, $Q_i < < P$ *e* $f(x, 0) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$; *allora per ogni* $x^0 \in \mathbf{R}^n$ *è possibile trovare* $\varepsilon_0(x^0, P, Q_1, \dots, Q_M) > 0$ *e* $u^0 \in H_{k\tilde{P}}$ *tale che* $F(u^0)(x) = g(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$.

Dopo aver trasformato l'equazione (4) in un problema di punto fisso, deduco, utilizzando l'ipotesi $Q_i < < P$ e applicando le proprietà del calcolo pseudo-differenziale, che esiste $C(\varepsilon)$ tale che $C(\varepsilon) \to_{\varepsilon \to 0} 0$ e $\|Q_i(D)\, u\|_{H_k} \leq C(\varepsilon) \|P(D)\, u\|_{H_k}$ per ogni $u \in H_{k\tilde{P}} \cap \mathcal{E}'(B_\varepsilon(x^0))$, x^0 punto fissato in $\mathbf{R}^n$. Il Principio di Contrazione ci permette di concludere che l'equazione (4) è localmente risolubile in ogni punto di $\mathbf{R}^n$.

2. – Risolubiltà locale per operatori Fuchsiani semilineari.

Ricordo che una varietà B con singolarità conica lontano dal punto singolare è una varietà liscia, mentre, vicino a questo punto ha la struttura di un cono con sezione una varietà liscia e compatta X. Tramite un *blow up* di B in un intorno del punto singolare, otteniamo una varietà $\mathbf{B}$ con bordo $\partial \mathbf{B} = X$. Si analizzano gli operatori differenziali su $\mathbf{B}$ fissando vicino al bordo le coordinate $(r, x) \in [0, 1[\times X$. Ho considerato operatori di tipo Fuchsiano, i.e. operatori che vicino al bordo sono della forma $A = r^{-\nu} \sum_{j=0}^{\nu} a_j(r)(-r\partial_r)^j$ dove ogni $a_j \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathit{Diff}^{\nu - j}(X))$ è una famiglia di operatori differenziali sulla sezione X. L'operatore A agisce, quando $\mathbf{B}$ è compatta, in modo continuo $A : \mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbf{B}) \to \mathcal{H}^{s-\nu, \gamma-\nu}(\mathbf{B})$ dove lo spazio $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbf{B})$

lontano dal bordo coincide con $H^s(\mathbf{B})$ mentre vicino al bordo $u \in \mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbf{B})$ è tale che $r^{\frac{n+1}{2}-\gamma}(r\partial_r)^k D^l u \in L_2\left([0,1[\times X, \frac{dr}{r}dx\right)$, $\forall k+l \leq s$, $n = \dim X$. Nella tesi ho studiato (cf. [4]) la risolubilità locale nel punto singolare di equazioni semilineari

$$F(u) = Au + f(x, Q_1 u, \dots, Q_M u) = g, \tag{5}$$

la cui parte lineare è un generico operatore Fuchsiano A, ellittico rispetto al peso fissato γ_0, gli operatori $Q_1, \dots, Q_M$ sono Fuchsiani e $f(x, v)$, con $x \in \mathbf{B}$ e $v \in \mathbf{C}$, è intera analitica rispetto a v ed è nello spazio $\bigcap_{s \in \mathbf{R}} \mathcal{H}^{s, \frac{n+1}{2}}(\mathbf{B})$ rispetto a x. Ho introdotto opportune ipotesi sull'ordine di regolarità s $\left(s > \frac{n+1}{2}\right)$ e sul peso γ $\left(\gamma \geq \frac{n+1}{2}\right)$ sotto le quali lo spazio di Sobolev $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbf{B})$ forma un'algebra. Sotto le stesse ipotesi, $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbf{B})$ è invariante rispetto alla composizione con funzioni analitiche. Questo permette di dare significato alla parte non lineare di (5).

TEOREMA 2.1. – *Si consideri l'operatore F definito in 5 con A operatore Fuchsiano di ordine m_0 ellittico rispetto al peso γ_0, $Q_1, \dots, Q_M$ operatori Fuchsiani di ordine $< m_0$ e $f(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{B}$, sia $g \in \mathcal{H}^{s-m_0, \gamma_0 - m_0}(\mathbf{B})$, con $s - m_0 > \frac{n+1}{2}$ e $\gamma_0 - m_0 \geq \frac{n+1}{2}$, allora è possibile trovare un intorno $U = [0, \varepsilon_0] \times X$ del bordo $\partial\mathbf{B}$ e $u \in \mathcal{H}^{s,\gamma_0}(\mathbf{B})$ tale che $Fu = g$ in U.*

Se $u \in \mathcal{H}^{s,\gamma_0}(\mathbf{B})$ allora $Au \in \mathcal{H}^{s-m_0,\gamma_0-m_0}(\mathbf{B})$, dall'ipotesi su Q_i segue che $Q_i u$ appartiene a $\mathcal{H}^{s-m_0+\varepsilon,\gamma_0-m_0+\varepsilon}(\mathbf{B})$ con $\varepsilon > 0$, inoltre $\mathcal{H}^{s-m_0+\varepsilon,\gamma_0-m_0+\varepsilon}(\mathbf{B}) \hookrightarrow \mathcal{H}^{s-m_0,\gamma_0-m_0}(\mathbf{B})$, in particolare l'inclusione è compatta. Utilizzando l'esistenza della parametrix del termine lineare A, anche in questo caso trasformo l'equazione (5) in un problema di punto fisso. Applicando il Teorema di Schauder provo l'esitenza della soluzione in un intorno del bordo $\partial\mathbf{B}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] EGOROV YU.V., SCHULZE B.W., *Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel. Boston. Berlin (1997).

[2] GRAMCHEV T., POPIVANOV P., *Local solvability for semi-linear partial differential equations*, Ann. Univ. Ferrara Sez.VII, Sc. Mat., **35** (1989), 147-154.

[3] HÖRMANDER L., *The analysis of linear partial differential operators*, I, II, III, IV, Springer-Verlag, Berlin (1983-85).

[4] MESSINA F., *Local solvability for semilinear Fuchsian equations*, Preprint 2001/29 Oktober 2001, Universität Potsdam-Institut für Mathematik.

[5] MESSINA F., RODIN L., *Local solvability for nonlinear partial differential equations*, Nonlinear Analysis, **47** (2001), 2917-2927.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: messina@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Luigi Rodino, Università di Torino