Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Dimitri Mugnai

Disequazioni variazionali inverse e punti asintoticamente critici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 303–306.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_303_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 303-306

Disequazioni variazionali inverse e punti asintoticamente critici.

DIMITRI MUGNAI

1. – Il problema: primi risultati di esistenza e molteplicità.

In questa tesi si studia una classe di problemi variazionali che potremmo definire disequazioni variazionali «inverse», in quanto il segno della disuguaglianza è opposto a quello delle classiche disequazioni variazionali introdotte da Lions e Stampacchia (alla suddetta classe, appartengono, per esempio, le disequazioni che descrivono il rimbalzo unidimensionale tra 2 punti assegnati di un biliardo).

Disequazioni di questo tipo non sono state molto studiate, forse per la mancanza di una teoria astratta che provi l'esistenza (e magari l'unicità) di soluzioni, come avviene invece per alcune disequazioni variazionali classiche. Tanto per fare un esempio, se D non è convesso, possono essere costruiti dei controesempi all'esistenza di traiettorie di rimbalzo elastico, mentre se D è convesso, ne esistono infinite. Un altro fatto sorprendente è che disequazioni dello stesso tipo, ma di ordine diverso, hanno comportamento diverso: se si considerano i problemi

$$(1)\qquad \begin{cases} u \in H_0^1(0,1) \\ \displaystyle\int_0^1 u'(v'-u')\,dt \leq 0 \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \quad v \geq -1, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} u \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \\ \displaystyle\int_0^1 u''(v''-u'')\,dt \leq 0 \quad \forall v \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1), \quad v \geq -1, \end{cases}$$

non è difficile dimostrare che (1) ammette infinite soluzioni, mentre (2) ne ha solo due, di cui una banale.

In questa tesi è stato considerato il problema seguente:

$$(P)\qquad \begin{cases} \exists\, u \in K_\phi := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \,|\, u \geq \phi \right\} \text{ tale che} \\ \displaystyle\int_\Omega \Delta u\, \Delta(v-u)\,dx - c\int_\Omega Du \cdot D(v-u)\,dx - \alpha\int_\Omega u(v-u)\,dx \leq 0 \\ \forall v \in K_\phi, \end{cases}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, è un aperto regolare e limitato, c ed α sono numeri reali e ϕ è una funzione misurabile con $\sup \phi < 0$. Ovviamente $u \equiv 0$ è una soluzione del problema, qualunque siano a e c; quindi siamo interessati alla ricerca di soluzioni u non banali, cioè funzioni che risolvono (P) ma non l'equazione associata $\Delta^2 u + c\Delta u - au = 0$, dove Δ^2 indica l'operatore biarmonico.

Proprio per la mancanza di una teoria generale relativa all'esistenza di soluzioni per disequazioni variazionali inverse, sembra naturale considerare un procedimento di approssimazione. Si considerano quindi i problemi

$$(P_\omega) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u - au + \omega((u-\phi)^-)^{k-1} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove ω è un parametro positivo e $k > 2$ è sottocritico. Si può pensare quindi che, nel caso dei problemi (P_ω), la parte di «piastra» sotto ϕ sia soggetta ad una forza sempre più intensa che la spinge verso il basso: di conseguenza le posizioni di equilibrio sono sempre più alte. In definitiva, nel caso del problema (P), si può pensare che la «piastra» u sia uncinata alla parete rigida ϕ (i problemi (P_ω) sono legati ad un modello di onde viaggianti sui ponti sospesi, introdotto da Lazer e McKenna in [2], per $k = 2$ e $\phi \equiv -1$).
Con $(\lambda_i)_i$ denotiamo la successione crescente $(\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots)$ degli autovalori di $-\Delta$ su $H_0^1(\Omega)$ e con $(\Lambda_j)_j$ quella degli autovalori di $\Delta^2 + c\Delta$ su $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Infine consideriamo i funzionali definiti su $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ da

$$f_\omega(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \frac{c}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \frac{a}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{\omega}{k}\int_\Omega ((u-\phi)^-)^k dx,$$

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \frac{c}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \frac{a}{2}\int_\Omega u^2 dx & \text{se } u \geq \phi, \\ -\infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Evidentemente le soluzioni di (P_ω) sono tutti e soli i punti critici di f_ω, mentre le soluzioni di (P) sono tutti e soli i punti *superiormente critici* di f (cf. [1]).

Tramite metodi variazionali dimostriamo che se $N \geq 1$ e $a < \lambda_1^2 - c\lambda_1$ o se $N \geq 2$ e $a > \lambda_1^2 - c\lambda_1$, ogni (P_ω) ammette una soluzione u_ω con $(u_\omega - \phi)^- \not\equiv 0$. Inoltre, se $a \neq \lambda_1^2 - c\lambda_1$, vale una maggiorazione *a priori* per le u_ω stesse, e se $N \leq 3$, le u_ω convergono fortemente, lungo successioni, a soluzioni di (P). Pertanto sussiste il seguente risultato (cf. [5]).

TEOREMA 1. – *Se $N = 2, 3$ e $a \neq \lambda_1^2 - c\lambda_1$, allora (P) ammette una soluzione non banale. Se $a < \lambda_1^2 - c\lambda_1$, allora la tesi è vera anche per $N = 1$.*

Per $a = \lambda_1^2 - c\lambda_1$, tutte le funzioni della forma te_1, $t > 0$, risolvono (P_ω) per ogni ω, e quindi in questo caso nessuna maggiorazione è possibile (per lo stesso motivo, inoltre, f_ω non soddisfa la condizione di Palais-Smale per questo valore di a).

Per valori particolari dei parametri a e c è possibilie stabilire dei risultati di molteplicità attraverso un teorema di *linking*, piuttosto sofisticato, che permette di dimostrare l'esistenza di più soluzioni, eventualmente allo stesso livello critico (cf. [5]).

TEOREMA 2. – *Sia* $\Lambda_j < \Lambda_{j+1} = \ldots = \Lambda_s < \Lambda_{s+1}$. *Supponiamo inoltre che valga una delle due ipotesi seguenti:*

(i) $\lambda_1^2 - c\lambda_1 > \Lambda_s$; *oppure*

(ii) $N \geqslant 2$ *e* $\lambda_1^2 - c\lambda_1 \leqslant \Lambda_j$.

Allora esiste $\tau_s^\omega > 0$ *tale che*

(i) (P_ω) *ha almeno tre soluzioni non banali per ogni* $\alpha \in (\Lambda_s - \tau_s^\omega, \Lambda_s)$;

(ii) $\tau_s^\omega = \tau_s$ *non dipende da* ω *se* $N \leqslant 3$.

Nelle ipotesi del Teorema 2, due soluzioni, diciamo $u_{1\omega}$ e $u_{2\omega}$, sono punti critici di f_ω che possono essere allo stesso livello.

Passando al limite si dimostra il seguente teorema di molteplicità (cf. [5]).

TEOREMA 3. – *Sia* $N \leqslant 3$. *Nelle ipotesi del Teorema* 2, *esiste* $\tau_s > 0$ *tale che* (P) *ammette almeno due soluzioni distinte non banali per ogni* $\alpha \in (\Lambda_s - \tau_s, \Lambda_s)$.

L'eventuale coincidenza delle successioni di valori critici $f_\omega(u_{1\omega})$ e $f_\omega(u_{2\omega})$ rende difficile prevedere se i limiti di $u_{1\omega}$ e $u_{1\omega}$ sono distinti. Questa difficoltà viene superata con la teoria presentata nel paragrafo successivo, mostrando che (in breve) il numero di punti *superiormente critici* di f è legato alle proprietà topologiche dei sottolivelli degli f_ω e che essi sono limiti di punti u_ω tali che $\nabla f_\omega(u_\omega) \to 0$ e non necessariamente $\nabla f_\omega(u_\omega) = 0$.

2. – Una teoria astratta di molteplicità.

In questo paragrafo consideriamo una varietà (eventualmente con bordo) M e funzioni $h_n, h: M \to [-\infty, +\infty]$, che supponiamo qui regolari per brevità e semplicità di trattazione.

DEFINIZIONE 1. – *Sia* $h(u) \in \mathbb{R}$. *Diciamo che* $u \in M$ *è un punto asintoticamente critico* (**p.a.c.**) *per la coppia* $((h_n)_n, h)$ *se esistono una successione strettamente crescente* $(n_k)_k$ *in* $\mathbb{N}$ *ed una successione* $(u_k)_k$ *in* M *tale che*

$$\nabla_M h_{n_k}(u_k) \to 0, \quad u_k \to u \quad e \quad h_{n_k}(u_k) \to h(u),$$

e $h(u)$ *è anche detto valore asintoticamente critico* (**v.a.c.**) *per* $((h_n)_n, h)$.

DEFINIZIONE 2. – *Sia* $\beta \in \mathbb{R}$. *Diciamo che vale la condizione* $\nabla(h_n, h; \beta)$ *se per ogni successione strettamente crescente* $(n_k)_k$ *in* $\mathbb{N}$ *e per ogni successione* $(u_k)_k$ *in* M *tali che*

$$\nabla_M h_{n_k}(u_k) \to 0 \quad e \quad h_{n_k}(u_k) \to \beta,$$

esiste una successione strettamente crescente $(k_j)_j$ *in* N *ed esiste* u *in* M *tali che* $u_{k_j} \to u$ *e* $h(u) = \beta$.

La Definizione 2 rappresenta quindi una sorta di condizione di Palais-Smale per successioni, con la differenza che non si richiede che il punto limite u sia critico per il funzionale limite h.

Si dimostra poi il seguente risultato (cf. [3]).

TEOREMA 4. – *Sia $a \leq b$ e supponiamo che valga la $\nabla(h_n, h; c)$ per ogni $c \in [a, b]$. Allora il numero di* **p.a.c.** *per $((h_n)_n, h)$ con* **v.a.c.** *in $[a, b]$ è maggiore o uguale a*

$$\limsup_{n \to \infty} \operatorname{cat}_M(h_n^b, h_n^a).$$

Qui $h_n^c = \{u \in M \mid h_n(u) \leq c\}$ e $\operatorname{cat}_M(A, B)$ denota la categoria relativa di A rispetto a B in M. Sottolineiamo che vale anche una versione *nonsmooth* del teorema precente, utile quando i funzionali non sono nemmeno continui e la nozione di gradiente viene sostituita da una sua generalizzazione.

3. – Il risultato finale di molteplicità.

Prima di tutto dimostriamo che i **p.a.c.** per $((f_\omega)_\omega, f)$ sono soluzioni di (P), poi che se $N \leq 3$ e $\alpha \neq \lambda_1^2 - c\lambda_1$, la condizione $\nabla(f_\omega, f; \beta)$ vale per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Infine, con un calcolo accurato della categoria relativa dei sottolivelli di f_ω, si può applicare il Teorema 4 e concludere con il seguente teorema (cf. [4]).

TEOREMA 5. – *Sia $N \leq 3$. Nelle ipotesi del Teorema 2, esiste $\tau_s > 0$ tale che il problema (P) ha almeno tre soluzioni non banali per ogni $\alpha \in (\Lambda_s - \tau_s, \Lambda_s)$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] E. DE GIORGI - A. MARINO - M. TOSQUES, *Problems of evolution in metric spaces and maximal decreasing curve*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **68**, no. 3 (1980), 180-187.

[2] A. C. LAZER - P. J. MCKENNA, *Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis*, SIAM Review, **32** (1990), 537-578.

[3] A. MARINO - D. MUGNAI, *Asymptotically critical points and their multiplicity*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **19** (2002), 29-38.

[4] A. MARINO - D. MUGNAI, *Asymptotical multiplicity and some reversed variational inequalities*, in corso di stampa su Topol. Methods Nonlinear Anal.

[5] D. MUGNAI, *On a «reversed» variational inequality*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **17** (2001), 321-358.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
e-mail: mugnai@dipmat.unipg.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XII
Direttore di ricerca: Prof. Antonio Marino, Università di Pisa