Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandro Musesti

Le leggi di bilancio della Meccanica dei Continui secondo la Teoria della Misura

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 307–309.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_307_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 307-309

Le leggi di bilancio della Meccanica dei Continui secondo la Teoria della Misura.

ALESSANDRO MUSESTI

1. – Introduzione.

Le leggi di bilancio sono un concetto basilare nella Meccanica dei Continui in quanto, collocandosi a monte delle equazioni costitutive, hanno valore molto generale. Esse presentano in modo naturale una struttura *integrale*, da cui si può dedurre, mediante opportune proprietà di continuità, la versione *puntuale*.

A partire dalla fine degli anni '50, seguendo la teoria della misura, Noll [4] introdusse un nuovo approccio a tale tipo di equazioni, che consisteva nel trattare le quantità integrali come funzioni d'insieme, soddisfacenti proprietà (che in un integrale sono automatiche) quali l'additività e l'assoluta continuità rispetto alla misura di Lebesgue. Quindi l'esistenza di densità non era più assunta come ipotesi, ma poteva essere dedotta. Una delle conseguenze notevoli fu la dimostrazione del *Teorema degli Sforzi di Cauchy* sotto ipotesi più deboli. In particolare, si poterono evitare le ipotesi di dipendenza della densità degli sforzi esclusivamente dalla normale e dal punto (il cosiddetto *postulato di Cauchy*), così come la continuità della densità rispetto alla posizione.

Più recentemente (vedi [3]), l'argomento è stato inquadrato nell'ambito della teoria geometrica della misura, dato che la classe degli insiemi di perimetro finito, essendo insiemi che ammettono una *normale esterna* alla frontiera e soddisfano ancora il Teorema di Gauss-Green, si presta molto bene a modellizzare la famiglia dei *sottocorpi*, ovvero gli insiemi su cui viene formulata l'equazione di bilancio in versione integrale.

2. – Risultati.

In questa dissertazione si studiano gli integrali della Meccanica dei Continui come funzioni d'insieme che non presentano assoluta continuità rispetto alla misura di Lebesgue n-dimensionale, bensì rispetto ad una generica misura di Radon. Il risultato principale è che si ottiene comunque una rappresentazione integrale di tali funzioni con densità localmente integrabili, in cui il vettore densità di flusso ha divergenza misura. Uno degli strumenti per ottenere questo è l'introduzione di un concetto di *quasi ovunque* nell'ambito della classe di insiemi su cui si formula l'equazione di bilancio, nel senso che la rappresentazione integrale varrà per quasi tutti i sottocorpi (vedi [5, 1]). Inoltre, si dimostra la validità di un'equazione di bilancio, in forma distribuzionale, anche sotto queste ipotesi più generali.

Un risultato notevole che accompagna questo sviluppo è un teorema di estensione: si dimostra infatti che è sufficiente avere informazioni soltanto su una classe molto particolare di insiemi, gli n-intervalli, per estendere in modo univoco la funzione d'insieme a quasi tutti gli insiemi di perimetro finito. Questo fatto, che è tipico di argomenti riguardanti la teoria della misura, in cui spesso si riesce ad estendere un risultato ad una classe più ampia di insiemi, contribuisce in questo ambito al dibattito su quale sia la classe «giusta» di sottocorpi su cui formulare un'equazione di bilancio integrale: la scelta degli insiemi di perimetro finito, da molti ritenuti in qualche senso troppo complicati e dunque non «fisici», sembra invece ottimale, in quanto a partire dagli n-intervalli, grazie a precise stime uniformi, si ottiene la rappresentazione per quasi tutti gli insiemi di perimetro finito. D'altro canto, tale risultato potrebbe anche prestarsi ad applicazioni di tipo numerico. Inoltre, il concetto di *quasi ovunque* formulato per la classe degli n-intervalli è senz'altro più naturale ed evidente (una famiglia contiene quasi tutti gli n-intervalli, se contiene *tutti* quelli che hanno i vertici in un opportuno insieme che contiene quasi tutto il corpo nel senso della misura di Lebesgue).

3. – Contenuti.

Nel primo capitolo si studiano le *interazioni di Cauchy* (vedi [3, 2]), una funzione di due insiemi che modellizza lo scambio di una certa quantità fisica fra due sottocorpi; in particolare, si dimostra un teorema di decomposizione in una parte di *volume*, che rappresenta l'azione a distanza, e una parte di *contatto*. Inoltre si dà un teorema di rappresentazione integrale per le interazioni di volume.

Nel secondo capitolo si analizza il caso delle interazioni di contatto e si dimostra che questo tipo di interazione è interpretabile come un flusso attraverso la superficie di contatto dei sottocorpi stessi (il cosiddetto *flusso di Cauchy*, vedi [5, 1]). In particolare, si ottiene una versione generale del Teorema degli sforzi di Cauchy per vettori flusso con divergenza misura.

Nel terzo capitolo si studiano invece equazioni di bilancio di tipo *entropia*, in cui c'è un'informazione parziale sul bilancio, data da una disequazione. In questo caso viene introdotta la *produzione di entropia*, una funzione d'insieme superadditiva, e si perviene a una formulazione debole della classica disequazione di Clausius-Duhem e alla deduzione dell'esistenza della temperatura.

Nel quarto capitolo si propone un approccio diverso alle leggi di bilancio della Meccanica, basato sullo studio della *potenza virtuale*. Si dimostra come sia possibile introdurre la cosiddetta *potenza di Cauchy*, una funzione che dipende dal sottocorpo e da un campo di velocità, e come da essa si possano dedurre le stesse proprietà ottenute nel secondo capitolo. Tale metodo, equivalente al precedente se il corpo è immerso in uno spazio euclideo, presenta però il vantaggio di poter essere applicato anche nel caso in cui il corpo sia una varietà differenziale generale, in cui non esiste una nozione di *forza risultante* e quindi la teoria precedente non può essere applicata.

Infine, nella prima appendice si mostra come si possa provare una sorta di continuità dell'interazione di Cauchy rispetto al sottocorpo, nel caso generale di misure di Radon, a patto di considerare un opportuno ispessimento della frontiera dei sottocorpi. Nella seconda appendice si forniscono delle condizioni sufficienti per estendere il vettore densità di flusso fino alla frontiera del corpo, in modo da riuscire a formulare un problema ai valori al contorno.

BIBLIOGRAFIA

[1] DEGIOVANNI M., MARZOCCHI A. and MUSESTI A., *Cauchy fluxes associated with tensor fields having divergence measure*, Arch. Ration. Mech. Anal., **147** (1999), 197-223.

[2] MARZOCCHI A. and MUSESTI A., *Decomposition and integral representation of Cauchy interactions associated with measures*, Cont. Mech. Thermodyn., **13** (2001), 149-169.

[3] GURTIN M. E., WILLIAMS W. O. and ZIEMER W. P., *Geometric measure theory and the axioms of continuum thermodynamics*, Arch. Ration. Mech. Anal., **92** (1986), 1-22.

[4] NOLL W., *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics*, Proceedings of the Berkeley Symposium on the Axiomatic Method, North-Holland, Amsterdam (1959), 266-281.

[5] ŠILHAVÝ M., *Cauchy's stress theorem and tensor fields with divergences in* L^p, Arch. Ration. Mech. Anal., **116** (1991), 223-255.

Dipartimento di Matematica, Università di Brescia
e-mail: a.musesti@dmf.unicatt.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Marco Degiovanni,
Università Cattolica del Sacro Cuore, sede di Brescia