Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giancarlo Sangalli

Analisi di metodi numerici per il problema di diffusione-trasporto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 319–321.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 319-321

Analisi di metodi numerici per il problema di diffusione-trasporto.

GIANCARLO SANGALLI

Si considera il problema si diffusione e trasporto lineare:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \mathbf{c} \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega , \end{cases}$$

dove $u : \Omega \to \mathbb{R}$ rappresenta l'incognita, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ è il dominio e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è il dato; inoltre il coefficiente di diffusione ε è assunto positivo e costante, mentre il campo delle velocità $\mathbf{c} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ è assunto regolare. Tale problema è *modello* di altri più complessi che appaiono in diversi campi dell'ingegneria e della fisica, ad esempio in fluido-dinamica (si faccia riferimento a [5] per una discussione più dettagliata).

Nella tesi si focalizza l'attenzione sul problema (1) e sui metodi numerici ad elementi finiti per esso, con particolare riferimento a *Streamline-Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) (si veda [4]) e a *Residual-Free Bubbles* (RFB) (si veda [3]). L'obiettivo della tesi è nell'analisi di (1) e in una più approfondita comprensione delle tecniche numeriche citate, con lo scopo di indagarne il campo di utilizzo ottimale; si affrontano pertanto una serie di tematiche:

• Analisi del problema differenziale

L'analisi del problema (1) nel *continuo* fornisce indicazioni utili per la successiva *discretizzazione*. Lo strumento più adatto allo scopo è la teoria dell'interpolazione di spazi funzionali (si faccia riferimento ad esempio a [6]). Si perviene alla caratterizzazione delle *topologie naturali* rispetto a cui l'operatore differenziale di (1) è isomorfismo in modo uniforme rispetto ai suoi parametri (ε e $\mathbf{c}$).

• Analisi dell'errore per il metodo RFB

Si dimostrano stime dell'errore *a priori* e *a posteriori* per il metodo RFB applicato al problema (1).

Nell'analisi *a priori* l'errore numerico dello schema viene controllato in termini della soluzione esatta del problema. Si generalizza la stima già nota ([1,2]) in cui l'errore viene misurato nella norma dell'energia: si ottengono risultati di stabilità e di convergenza per la norma $L^2(\Omega)$, e si localizzano le stime dell'errore precedenti. Quest'ultimo risultato dà la reale garanzia di robustezza per lo schema RFB, dato che la soluzione esatta di (1) non è in generale uniformemente regolare in tutto il dominio Ω. L'analisi è ottenuta combinando le tecniche già utilizzate da Johnson e coautori per trattare il metodo SUPG, e le peculiari proprietà della formulazione RFB.

Nell'analisi *a posteriori*, l'errore numerico viene stimato in termini del *residuo*, che è facilmente calcolabile al calcolatore; quindi si fornisce uno strumento per la scrittura di algoritmi adattativi. Le stime riguardano la norma L^2 dell'errore, la norma dell'energia dell'errore ed infine l'errore nel flusso di trasporto. Si è inoltre indagata la natura dello stimatore basato sul residuo numerico, dimostrando l'equivalenza (uniforme rispetto ad ε e alla mesh) tra lo stimatore e una opportuna norma dell'errore: rispetto a tale norma lo stimatore è robusto. Quest'ultimo punto può essere esteso al caso di altri metodi numerici (per esempio SUPG), per i quali stimatori del tipo qui considerato sono frequentemente utilizzati, nella pratica e nella teoria. Perciò l'equivalenza sopra menzionata chiarisce meglio la natura dello stimatore studiato.

- **Analisi dell'errore per il metodo SUPG**

Si migliorano le stime di errore *a priori*, note da tempo, per il metodo SUPG applicato al problema di diffusione e trasporto unidimensionale (che rappresenta una semplificazione di (1)). Utilizzando di nuovo tecniche di interpolazione di spazi funzionali, si dimostra che il metodo è *quasi-ottimale:* cioè l'errore numerico $u - u_h$ è dello stesso ordine dell' errore di miglior approssimazione nello spazio degli elementi finiti V_h, secondo la stima

$$\|u - u_h\| \leqslant C \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|,$$

dove $\|\cdot\|$ è una norma opportuna e C è una costante indipendente da u, ε, e dal passo di discretizzazione h.

- **Valutazione automatica degli schemi numerici**

Si introducono e si studiano alcune procedure numeriche rivolte alla valutazione automatica degli schemi numerici ad elementi finiti per (1). Tali procedure risolvono opportuni problemi agli autovalori generalizzati e forniscono una cifra di merito per lo schema numerico da valutare. In questo contesto si ottengono, per il problema di diffusione trasporto unidimensionale, due differenti procedure molto efficaci, che consentono ad esempio di individuare la quantità ottimale di diffusione artificiale che va aggiunta per la *stabilizzazione*.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Brezzi, T. J. R. Hughes, L. D. Marini, A. Russo and E. Süli, *A priori error analysis of residual-free bubbles for advection-diffusion problems*, SIAM J. Numer. Anal., **36** (1999), pp. 1933-1948 (electronic).

[2] F. Brezzi, D. Marini and E. Süli, *Residual-free bubbles for advection-diffusion problems: the general error analysis*, Numer. Math., **85** (2000), pp. 31-47.
[3] F. Brezzi and A. Russo, *Choosing bubbles for advection-diffusion problems*, Math. Models Methods Appl. Sci., **4** (1994), pp. 571-587.
[4] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes, *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **32** (1982), pp. 199-259. FENOMECH '81, Part I (Stuttgart, 1981).
[5] H.-G. Roos, M. Stynes and L. Tobiska, *Numerical methods for singularly perturbed differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1996. Convection-diffusion and flow problems.
[6] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second ed., 1995.

Dipartimento di Matematica «F. Casorati», Università di Pavia
e-mail: sangalli@dimat.unipv.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Franco Brezzi (Università di Pavia)