Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Daniela Scaramelli

Metodi di approssimazione/interpolazione nell'applicazione alle griglie computazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 323–326.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_323_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 323-326

Metodi di approssimazione/interpolazione nell'applicazione alle griglie computazionali.

SCARAMELLI DANIELA

Nella risoluzione numerica di equazioni alle derivate parziali gioca un ruolo essenziale la generazione di un insieme di punti in cui valutare le variabili del fenomeno studiato al fine di ottenere una soluzione del problema. La generazione di una griglia computazionale che ricopre il dominio fisico in cui è definito il fenomeno può essere una delle richieste più costose in termini di tempo computazionale, tra quelle che conducono alla soluzione del problema fisico ([3], [5]).

Per la generazione numerica di griglie possono essere utilizzati metodi algebrici (basati su schemi di approssimazione e/o interpolazione), metodi differenziali (basati sulla risoluzione di equazioni ellittiche, iperboliche o paraboliche), o metodi variazionali (basati sull'ottimizzazione di alcune funzioni obiettivo che tengono conto di misure di qualità della griglia).

Nella tesi è stato affrontato lo studio di metodi algebrici e l'approccio utilizzato prevede l'uso di una trasformazione

$$\mathbf{G} : I = [0, 1]^2 \to \Omega \subset \mathbb{R}^d, \qquad d = 2, 3$$

(dal dominio computazionale I al dominio fisico Ω dove è definito il problema fisico) che sia conforme al bordo, cioè tale che $\mathbf{G}_{|\partial I} = \partial\Omega$.

Tra i metodi algebrici, che si basano su schemi di interpolazione e/o approssimazione, sono stati studiati schemi transfiniti, schemi di tipo prodotto tensoriale e schemi di tipo misto, ottenuti combinando i metodi transfiniti e i metodi prodotto tensoriale.

I metodi di tipo transfinito generano griglie conformi al bordo di Ω e in grado di interpolare, con una scelta opportuna delle basi coinvolte nello schema, anche le direzioni ortogonali al bordo garantendo così l'ortogonalità della griglia al bordo di Ω. Questi schemi generalmente non possiedono parametri liberi nella definizione della trasformazione $\mathbf{G}$, e non permettono quindi di operare una scelta ottimale di eventuali parametri al fine di migliorare la qualità della griglia.

Gli schemi di tipo prodotto tensoriale invece possiedono molti gradi di libertà (ad esempio i punti di controllo e i nodi delle B-splines o di altre basi scelte) per modificare la posizione delle linee di griglia. Inoltre, consentono un controllo locale della griglia mediante l'uso di basi locali, ma non garantiscono conformità al bordo di Ω in quanto possono eventualmente interpolare, con la scelta opportuna di basi interpolanti, solo un insieme finito di punti.

L'utilizzo di metodi misti, combinando l'interpolazione delle curve di bordo (ed eventualmente delle derivate normali al bordo), garantita dai metodi transfiniti, e il controllo delle linee di griglia nell'interno del dominio, garantito dai metodi di tipo prodotto tensoriale mediante l'uso di opportuni punti di controllo, risulta essere una buona scelta sia per le proprietà possedute dalla griglia che per il numero di parametri di libertà sui quali lavorare per migliorare la griglia algebrica iniziale.

Anche se i metodi algebrici generano in alcuni casi griglie meno «smooth» rispetto a quelle generate con altri metodi (ad esempio differenziali), essi consentono un controllo locale della griglia e permettono di «guidare» le linee coordinate della griglia stessa. Inoltre, essendo semplici da implementare e non molto costosi, i metodi algebrici sono particolarmente interessanti se visti come generatori di una griglia iniziale da raffinare con altri metodi, quali ad esempio gli ellittici.

In questa tesi è stata posta particolare attenzione a schemi di tipo misto, per i quali sono state studiate tecniche per la determinazione di valori ottimali per i parametri liberi della trasformazione, al fine di garantire alcune proprietà desiderabili in una griglia qualitativamente buona. In particolare i parametri liberi della trasformazione sono stati scelti cercando di ottenere una certa «uniformità geometrica» nelle celle di griglia.

Nella tesi è stato presentato un particolare metodo misto, ottenuto come estensione del metodo Control Point Form presentato in [1] e [4], che genera una griglia ortogonale al bordo.
Più dettagliatamente, la trasformazione che genera la griglia è definita come somma di due trasformazioni,

$$\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{B}_{\partial\Omega}(s, t) + \mathbf{T}(s, t), \qquad s, t \in [0, 1] \tag{1}$$

una delle quali agisce localmente vicino al bordo di Ω, mentre l'altra si annulla sul bordo ed è in grado di controllare localmente il comportamento delle linee di griglia nell'interno di Ω; viene usato uno schema transfinito con funzioni blending all'Hermite (che garantiscono l'ortogonalità al bordo di Ω) ed uno schema prodotto tensoriale basato su B-splines cubiche, ed è quindi possibile scrivere:

$$\mathbf{B}_{\partial\Omega}(s, t) = (P_1^H \oplus P_2^H)[\partial\Omega](s, t) \tag{2}$$

e

$$\mathbf{T}(s, t) = \mathbf{Tp}(s, t) - (P_1^H \oplus P_2^H)[\mathbf{Tp}](s, t) \tag{3}$$

dove $(P_1^H \oplus P_2^H)$ è la somma booleana degli operatori di Hermite P_1^H e P_2^H definiti mediante funzioni blending ottenute localizzando le funzioni cubiche di Hermite, e

$$\mathbf{Tp}(s, t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Q}_{ij} B_{i,3}(s) B_{j,3}(t) \tag{4}$$

è il prodotto tensoriale definito a partire da un insieme $\mathcal{Q} = \{\mathbf{Q}_{ij},\ i = 1, \dots, m,$

$j = 1, \ldots, n\}$ di punti di controllo e dalle funzioni B-splines $B_{i,3}(s)$ e $B_{j,3}(t)$ di grado 3.

Particolare importanza è data alla proprietà di uniformità, introdotta da Eiseman nel 1979 per il caso univariato. Mediante questa proprietà è possibile controllare la spaziatura della griglia sul dominio fisico attraverso la spaziatura del parametro nel dominio computazionale. Il controllo sulla spaziatura si può ottenere studiando le proiezioni dei vettori $(\mathbf{G}(s, t) - \mathbf{G}(0, t))$ e $(\mathbf{G}(s, t) - \mathbf{G}(s, 0))$ rispettivamente su due direzioni assegnate privilegiate di $\mathbb{R}^2$, che indichiamo con η e θ. Quello che si richiede alla trasformazione, affinchè valga questa proprietà, è che tali proiezioni siano crescenti linearmente rispettivamente con s e t, così che le proiezioni delle spaziature della griglia siano «conformi» alle relative spaziature dei parametri. Questa richiesta può essere ragionevole per domini Ω che siano «pseudo-rettangolari».

Della proprietà di uniformità possiamo dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. – *Siano h, $\theta \in \mathbb{R}^2$ due direzioni linearmente indipendenti. Una trasformazione $\mathbf{G} : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^2$ per cui valga*

$$\begin{aligned} &(\mathbf{G}(s, \bar{t}) - \mathbf{G}(0, \bar{t}))\cdot\eta = s(\mathbf{G}(1, \bar{t}) - \mathbf{G}(0, \bar{t}))\cdot\eta, \quad \bar{t} = 0, 1\,, \\ &(\mathbf{G}(\bar{s}, t) - \mathbf{G}(\bar{s}, 0))\cdot\theta = t(\mathbf{G}(\bar{s}, 1) - \mathbf{G}(\bar{s}, 0))\cdot\theta, \quad \bar{s} = 0, 1\,, \end{aligned} \tag{5}$$

verifica la proprietà di uniformità rispetto alle proiezioni su η, θ se

$$\begin{aligned} &(\mathbf{G}(s, t) - \mathbf{G}(0, t))\cdot\eta = s(\mathbf{G}(1, t) - \mathbf{G}(0, t))\cdot\eta, \quad \forall s \in (0, 1),\ \forall t \in (0, 1)\,, \\ &(\mathbf{G}(s, t) - \mathbf{G}(s, 0))\cdot\theta = t(\mathbf{G}(s, 1) - \mathbf{G}(s, 0))\cdot\theta, \quad \forall s \in (0, 1),\ \forall t \in (0, 1)\,. \end{aligned}$$

Nella tesi vengono studiate condizioni sufficienti per la validità di una versione discreta di questa proprietà, nelle ipotesi che Ω sia un dominio «pseudo-rettangolare». Nelle condizioni sufficienti ottenute, giocano un ruolo fondamentale i nodi delle B-splines e i punti di controllo. Proprio per determinare valori ottimali di questi parametri liberi vengono presentate due strategie per la scelta dei nodi e due strategie per la scelta dei punti di controllo.

In particolare, per i nodi si ottiene una posizione ottimale sia risolvendo il sistema non lineare che si determina imponendo la proprietà di uniformità, sia equilibrando opportuni pesi definiti a partire dalle derivate delle B-splines o dalle aree delle B-splines.

Per quanto riguarda la scelta dei punti di controllo (una volta fissati i nodi delle B-splines), questa viene effettuata sia mediante una strategia che coinvolge la proprietà di uniformità, sia mediante un problema di minimizzazione basato su particolari parametri di qualità della griglia. Infatti nella tesi sono stati studiati alcuni parametri che misurano la qualità di una singola cella di griglia, ovvero l'ortogonalità tra i lati e una certa uniformità tra le lunghezze dei lati. Questi parametri sono definiti a partire da norme di particolari matrici i cui elementi sono strettamente legati a quantità geometriche delle celle di griglia. Per mezzo di questi parametri si definiscono funzioni obiettivo che minimizzate permettono di ottenere valori ottimali per i punti di controllo.

Il compito di rendere una griglia algebrica più regolare può essere affidato, oltre che a strategie che scelgono in modo ottimale i parametri liberi della trasformazione, anche ad un metodo ellittico di per sè regolarizzante. I generatori ellittici forniscono, mediante la risoluzione di un sistema ellittico con metodi iterativi, una griglia finale molto regolare. Il tempo di risoluzione del sistema è spesso elevato e dipende anche dall'innesco usato per il procedimento iterativo. Usualmente l'innesco è ottenuto mediante un'interpolazione lineare in una eventuale direzione privilegiata. Le griglie algebriche ottenute con il particolare metodo misto presentato nella tesi, sono state utilizzate come innesco per un generatore ellittico ortogonale, ottenendo così una riduzione nel tempo di calcolo rispetto al tempo impiegato con un innesco ottenuto mediante interpolazione lineare.

Numerosi test confermano i risultati teorici presentati nella tesi e mettono in evidenza i miglioramenti apportati alle griglie mediante la scelta dei parametri ottenuti con le strategie proposte.

BIBLIOGRAFIA

[1] EISEMAN P.R., *Control Point Grid Generation*, Computer Math. Applic., **24** (5/6), (1992), 57-67.

[2] KNUPP P.M., *Matrix norms & the condition number*, Prooceedings of 8th International Meshing Roundtable, South Lake Tahoe, CA, U.S.A. (1999), 13-22.

[3] LISEIKIN V.D., *Grid Generation Methods*, Springer, (1999.

[4] MORANDI R., SESTINI A., *Precise Controls in Numerical Grid Generation*, Advanced Topics in Multivariate Approximation, edited by F. Fontanella, K. Jetter, P.J. Laurent, (1996), 243-258.

[5] THOMPSON J.F., SONI B.K. and WEATHERILL N.P. (EDS), *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, Boca Raton, Florida, (1999).

Dipartimento di Energetica S.Stecco, Università di Firenze
e-mail: daniela_scaramelli@tiscali.it
Dottorato in Matematica Computazionale, (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof.ssa Rossana Morandi