Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesco Tschinke

*-Algebre parziali di distribuzioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 331–334.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_331_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 331-334

*-Algebre parziali di distribuzioni.

Francesco Tschinke

La moltiplicazione fra distribuzioni, com'è noto, è possibile soltanto se si verificano circostanze particolari, al di fuori delle quali può presentarsi il problema di una sua corretta definizione. Ciononostante, il prodotto di distribuzioni, spesso inteso solo in senso formale, appare sovente nelle applicazioni fisiche ed ha un ruolo rilevante nella teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Per questa ragione, a partire dal famoso risultato di impossibilità di Schwartz, sono stati suggeriti in letteratura diversi modi per definire una struttura algebrica nell'insieme delle distribuzioni [1]. Parallelamente, nell'ultimo decennio hanno ricevuto molta attenzione le strutture algebriche parziali, cioè spazi lineari nei quali la moltiplicazione non è definita per ogni coppia di oggetti. In particolare, la nascita delle *-algebre parziali è dovuta al gran numero di applicazioni in fisica in cui si ha a che fare con insiemi di operatori la cui moltiplicazione non è sempre definita (si veda [3] per una rassegna).

Riconsiderando un idea sviluppata in [2], l'obiettivo della tesi è di definire nello spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ una struttura *-algebra parziale non banale. In [2] è stata definita una moltiplicazione in $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ che consiste nell'associare ad ogni distribuzione $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ un operatore di moltiplicazione $L_\Phi \colon \mathcal{S}(\mathbf{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ così definito:

$$L_\Phi \colon \phi \mapsto \Phi\phi \tag{1}$$

riconducendo poi il problema della definizione del prodotto di distribuzioni $\Phi \cdot \Psi$ alla definizione generale della moltiplicazione fra gli operatori non limitati $L_\Phi \cdot L_\Psi$ noto come moltiplicazione di operatori in *rigged Hilbert spaces* (questo metodo rientra nel cosiddetto *metodo di dualità* [1]). Infine occorre trovare le condizioni perchè esista $\Xi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ tale che $L_\Xi = L_\Phi \cdot L_\Psi$.

Per essere più precisi, introduciamo alcune definizioni e notazioni.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{D}$ un suo sottospazio denso munito di topologia localmente convessa t, più forte di quella indotta dalla norma di Hilbert. Sia $\mathcal{D}'[t']$ il suo duale topologico coniugato munito della topologia t' forte del duale. La tripletta $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{D}'$ si chiama *rigged Hilbert space*. Dato un rigged Hilbert space, denotiamo con $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari continue da $\mathcal{D}[t]$ in $\mathcal{D}'[t']$. Lo spazio $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ possiede un'involuzione $A \to A^\dagger$ così definita:

$$\langle A^\dagger f, g \rangle = \overline{\langle Ag, f \rangle} \qquad \forall f, g \in \mathcal{D}.$$

La moltiplicazione fra operatori di $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$, con un'opportuna scelta di $\mathcal{D}$, si effettua *fattorizzando* (quand'è possibile) gli operatori attraverso spazi intermedi tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ chiamati *interspazi* (si vedano ad es. [3] e [2]). Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{D}'$ un rigged Hilbert space con $\mathcal{D}[t]$ spazio semiriflessivo. Sia poi $\mathcal{E}[t_\mathcal{E}]$ uno spazio localmente convesso, tale che

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

dove $\hookrightarrow$ denota una immersione continua con range denso. Sia $\mathcal{E}'$ il duale coniugato di $\mathcal{E}[t_{\mathcal{E}}]$ munito di topologia forte del duale $t_{\mathcal{E}'}$. Gli spazi $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{E}'$, muniti delle rispettive topologie di Mackey $\tau(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \tau_{\mathcal{E}}$ e $\tau(\mathcal{E}', \mathcal{E}) := \tau_{\mathcal{E}'}$, si chiamano *interspazi*.

Siano $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ interspazi, e sia $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari continue da $\mathcal{E}$ in $\mathcal{F}$. Definiamo il sottospazio degli operatori di $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ estendibili da $\mathcal{E}$ in $\mathcal{F}$ con continuità:

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}') : A = \widetilde{A}|_{\mathcal{D}} \text{ for some } \widetilde{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})\}.$$

Si considerino ora due operatori A, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$. Se esiste un interspazio $\mathcal{E}$ tale che $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ e $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathcal{D}')$ allora definiamo il prodotto $A \cdot B$:

$$A \cdot Bf = \widetilde{A}(Bf), \qquad f \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Questo prodotto non è ben definito, perchè dipende dalla scelta dell'interspazio $\mathcal{E}$. Ciò è dovuto al fatto che $\mathcal{D}$ non è necessariamente denso nell'intersezione $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ dei due interspazi $\mathcal{E}$,$\mathcal{F}$, munita della topologia proiettiva $\tau_{\mathcal{E}} \wedge \tau_{\mathcal{F}}$. Occorre pertanto definire il prodotto rispetto ad una classe $\mathcal{M}$ di interspazi con le seguenti proprietà:

(*i*) $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$;

(*ii*) $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{M}$, il duale $\mathcal{E}'$ appartiene anche a $\mathcal{M}$;

(*iii*) $\forall \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} \in \mathcal{M}$.

Una classe di interspazi $\mathcal{M}$ siffatta prende il nome di *multiplication framework*. Vale il seguente [2]

TEOREMA 1. – *Sia* $(\mathcal{D}[t], \mathcal{H}, \mathcal{D}'[t'])$ *un rigged Hilbert space e* $\mathcal{M}$ *un multiplication framework. Allora* $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ *con la moltiplicazione sopra definita è una *-algebra parziale non associativa.*

Si consideri ora un operatore autoaggiunto A con dominio $D(A)$ in $\mathcal{H}$ e la classe dei vettori $C^{\infty}(A)$ di A, così definita:

$$\mathcal{D}^{\infty}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n).$$

Lo spazio $\mathcal{D}^{\infty}(A)$, munito della topollogia t_A generata dalle seminorme $f \to \|A^n f\|$ con $n \in \mathbf{N}$, è uno spazio di Fréchet riflessivo; sia $\mathcal{D}_{-\infty}(A)$ il suo duale coniugato rispetto al prodotto scalare di $\mathcal{H}$ munito della topologia forte del duale t'_A. La tripletta $(\mathcal{D}^{\infty}(A), \mathcal{H}, \mathcal{D}_{-\infty}(A))$ è un rigged Hilbert space. Vogliamo ora illustrare un procedimento che permetta di trovare un multiplication framework non banale tra $\mathcal{D}^{\infty}(A)$ e $\mathcal{D}_{-\infty}(A)$ (per maggiori dettagli, si veda [4]).

Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di interspazi tale che ogni E_α è uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|_\alpha$. Se la famiglia è chiusa per dualità tra $\mathcal{D}^{\infty}(A)$ e $\mathcal{D}_{-\infty}(A)$, allora possiamo definire un involuzione $\alpha \to \overline{\alpha}$ nell'insieme degli indici tale che $E_{\overline{\alpha}} \simeq (E_\alpha)'$.

Sia $U(t)$ un gruppo unitario ad un parametro generato da A e sia $\widehat{U}(t)$ la sua estensione continua a $\mathcal{D}_{-\infty}(A)$. Allora la famiglia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ si dice <u>compatibile</u> con A se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $\widehat{U}(t)\, E_\alpha = E_\alpha \;\; \forall \alpha \in I$;
2) $\lim_{t \to 0} \| \widehat{U}(t)\, F - F \|_\alpha = 0, \;\; \forall F \in E_\alpha, \;\; \forall \alpha \in I.$

Si consideri l'operatore $J = (1 + A^2)^{1/2}$. Consideriamo un sottoinsieme $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$ munito di topologia localmente convessa t tale che $\mathcal{D}$ sia semiriflessivo, soddisfacente alle seguenti proprietà:

d1) la topologia t di $\mathcal{D}$ è più fine della topologia indotta da $\mathcal{D}^\infty(A)$;

d2) le applicazioni $A : \mathcal{D}[t]) \to \mathcal{D}[t]$ e $J : \mathcal{D}[t] \to \mathcal{D}[t]$ con continuità;

d3) per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{D}$ è un *core* per J^n, tale che: $\overline{J^n \,|_{\mathcal{D}}} = J^n$.

Nelle precedenti ipotesi, anche la tripletta $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{D}')$ è un rigged Hilbert space. Definiamo, per ogni $s \in \mathbf{R}$ e $\alpha \in I$, lo spazio $L_A^{s,\alpha} \subseteq \mathcal{D}'$:

$$L_A^{s,\alpha} = \{ F \in \mathcal{D}' : J^s F \in E_\alpha \}.$$

PROPOSIZIONE 1. – *Se $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una famiglia di spazi di Banach compatibile con A, allora gli spazi $L_A^{s,\alpha}$ sono spazi di Banach. Inoltre, gli spazi $L_A^{s,\alpha}$, i loro duali, le loro intersezioni finite con i loro duali costituiscono un multiplication framework tra $\mathcal{D}^\infty(A)$ e $\mathcal{D}_{-\infty}(A)$.*

In altre parole, la famiglia $\{L_A^{s,\alpha}\}$ è una famiglia *generante* di interspazi tra $\mathcal{D}^\infty(A)$ e $\mathcal{D}_{-\infty}(A)$. Inoltre, nelle ipotesi d1), d2) e d3), la famiglia $\{L_A^{s,\alpha}\}$ genera un multiplication framework anche tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$. Nella dimostrazione della Proposizione 1 è cruciale l'utilizzo della A-convoluzione, così definita: siano $\phi \in C_0(\mathbf{R})$ e $F \in \mathcal{D}_{-\infty}(A)$, allora:

$$\phi \overset{A}{*} F = \int_{\mathbf{R}} \phi(t)\, \widehat{U}(t)\, F\, dt.$$

Nel caso particolare in cui $A := \frac{id}{dx}$, $\mathcal{D}(A) := W^{1,2}(\mathbf{R})$, la A-convoluzione diventa la convoluzione ordinaria tra funzioni. Posto $\{E_\alpha\} := \{L^p(\mathbf{R});\ 1 < p < \infty\}$, la famiglia $\{E_\alpha\}$ è compatibile con $A := \frac{id}{dx}$. Inoltre $\mathcal{D} := \mathcal{S}(\mathbf{R})$ soddisfa alle ipotesi d1), d2) e d3), e gli spazi $L_A^{s,\alpha}$ sono i noti «Bessel potential spaces» $L^{s,p}$, che, per s intero, diventano gli spazi di Sobolev $W^{k,p}$. Quindi, come conseguenza della Proposizione 1, i Bessel potential spaces generano un multiplication framework tra $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ e $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Per il Teorema 1, lo spazio $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ è una *-algebra parziale rispetto al multiplication framework generato dai Bessel potential spaces.

Se $\mathcal{D}$ è una *-algebra commutativa di Hilbert, allora è possibile definire una moltiplicazione tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ (in analogia, ad esempio, con gli spazi $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ e $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$), e quindi, analogamente con (1), associare ad ogni $\Phi \in \mathcal{D}'$ l'operatore di moltiplicazione $L_\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ tale che $L_\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$. Definito con la (2) il prodotto tra gli operatori non limitati $L_\Phi \cdot L_\Psi$ rispetto ad un multiplication framework, occorre trovare le condizioni secondo le quali, in generale, esiste $\Xi \in \mathcal{D}'$ tale che $L_\Xi = L_\Phi \cdot L_\Psi$. Le ipotesi che seguono sono una generalizzazione di quelle utilizzate nel metodo di dualità. Sia $\mathcal{C}$ un multiplication framework con le seguenti proprietà:

A1) se $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, allora $\mathcal{F}$ è stabile sotto l'involuzione $*$, inoltre la corrispondenza $* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ è continua;

A2) se $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ e $\phi \in \mathcal{D}$, allora $\phi \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$, inoltre l'applicazione $T_\phi: F \to F$ definita dalla moltiplicazione $\Phi \mapsto \phi\Phi$ è continua in $\mathcal{F}$;

A3) se $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \mathcal{F}$, l'applicazione $L_\Phi: \phi \to \phi\Phi$ è continua da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{F}$.

PROPOSIZIONE 2. – *Sia $\mathcal{C}$ un multiplication framework che soddisfa A1), A2), A3) e siano Φ, $\Psi \in \mathcal{D}'$. Se è possibile definire il prodotto $L_\Phi \cdot L_\Psi$ allora anche $L_\Psi \cdot L_\Phi$ è definito, ed esiste $\Xi \in \mathcal{D}'$ tale che:*

$$L_\Xi = L_\Phi \cdot L_\Psi = L_\Psi \cdot L_\Phi .$$

La Proposizione 2 consente di definire un prodotto commutativo parziale di distribuzioni. Consideriamo ora l'unione di tutti gli interspazi di $\mathcal{C}$, propri in $\mathcal{D}'$:

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{C}} = \bigcup \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}' \}$$

Si ha la seguente

PROPOSIZIONE 3. – *Sia $\mathcal{C}$ un multiplication framework in $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ con le proprietà A1), A2), A3). Allora $\mathcal{D}'_{\mathcal{C}}$ può essere identificato con una *-algebra parziale commutativa:*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \{ L_\Phi , \Phi \in \mathcal{D}'_{\mathcal{C}} \} \subset \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}').$$

Nel caso concreto dello spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, i Bessel potential spaces $\{L^{s,p}\}$ generano un multiplication framework soddisfacenti alle ipotesi A1), A2), A3), quindi $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ è una *-algebra parziale di distribuzioni nel senso della Proposizione 3. Il problema di trovare le condizioni per cui, più in generale, la famiglia $\{L_A^{s,\alpha}\}$ soddisfa alle ipotesi A1), A2), A3) è stato affrontato in [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] M. OBERGUGGENBERGER, *Multiplication of distributions and applications to partial differential equations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, n. 259, Longman, Harlow, 1992.

[2] A. RUSSO and C. TRAPANI, *Quasi *-algebras and multiplication of distributions*, J. Math. Anal. Appl., **215** (1997), 423-442.

[3] C. TRAPANI, *Quasi *-algebras of operators and their applications*, Rev. Math. Phys., **7** (1995), 1303-1332.

[4] C. TRAPANI and F. TSCHINKE, *Multiplication of operators in rigged Hilbert spaces*, pubblicazione pre-print n. 138, Giugno 2001, del Dip. Matematica e Applicazioni, Università di Palermo.

[5] C. TRAPANI, F. TSCHINKE, *Partial *-algebras of distributions*, pubblicazione preprint n. 147, Agosto 2001, del Dip. di Matematica ed Applicazioni - Università di Palermo.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo
e-mail: tschinke@math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. C. Trapani, Università di Palermo