Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paolo Ventura

Alcuni contributi alla separazione primale e duale per problemi di programmazione lineare intera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 335–338.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_335_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 335-338

Alcuni contributi alla separazione primale e duale per problemi di programmazione lineare intera.

PAOLO VENTURA

1. – Introduzione.

Un settore della Programmazione Matematica di particolare rilevanza è sicuramente quello dell'ottimizzazione lineare a numeri interi. La sua importanza è supportata dalle sue numerosissime applicazioni, che si presentano quando è possibile descrivere un problema di ottimizzazione utilizzando una formulazione con funzione obiettivo e vincoli entrambi lineari, e vincoli di interezza sulle variabili. Un caso particolare è quello in cui le variabili hanno componenti vincolate ad assumere valori 0 o 1. Si parla allora di *ottimizzazione lineare 0/1*, che rappresenta uno strumento estremamente efficace nella descrizione di problemi di ottimizzazione combinatoria, caratterizzati cioè da insiemi ammissibili finiti descritti da opportune proprietà combinatoriche. È questo, ad esempio, il caso di problemi associati a particolari strutture definite su grafi: *matching, tagli, flussi, cammini*, ecc.

Formalmente, il problema della programmazione (o ottimizzazione) lineare intera (PLI) è definito come segue: dato un poliedro P, si trovi, se esiste, un punto intero $\bar{x}$ appartenente a P che massimizzi il valore di un dato funzionale lineare.

Il problema della programmazione lineare intera è strettamente legato a quello della *separazione standard* o *duale*. Dato un poliedro P_I ed un punto x^*, il problema della separazione duale consiste nel trovare, se esiste, una disuguaglianza lineare (o piano di taglio) che sia soddisfatta da tutti i punti di P_I e violata da x^*, o nel dimostrare che tale disuguaglianza non esiste, e cioè che $x^* \in P_I$. La correlazione tra i due problemi è definita dalla loro equivalenza polinomiale [1]: l'esistenza di un algoritmo a complessità polinomiale che risolva un problema di PLI associato ad un poliedro $P \subseteq \Re^n$ implica l'esistenza di un algoritmo polinomiale per la separazione duale definita sul poliedro $P_I = conv(P \cap Z^n)$, e viceversa.

Da un punto di vista teorico, questo risultato ha rappresentato un efficacissimo strumento per la dimostrazione di polinomialità di numerosi problemi di PLI ottenuta attraverso la definizione di un algoritmo polinomiale per il problema di separazione duale associato.

Un'altra importantissima conseguenza dell'equivalenza tra ottimizzazione lineare intera e separazione duale è stato l'impulso dato da questo risultato allo sviluppo di tecniche poliedrali per la generazione di piani di taglio per problemi NP-hard delle quali, di fatto, costituisce il più importante supporto teorico (informalmente, si classifica come NP-hard un problema per il quale è estremamente improbabile l'esistenza di un algoritmo di soluzione a complessità polinomiale). Tipicamente, in questo caso, il problema della separazione viene affrontato a seguito di uno studio preliminare della struttura del particolare poliedro associato al problema di ottimizzazione che si sta considerando. In altre parole, dapprima vengono definite una serie di famiglie di disuguaglianze valide per tale poliedro ed in seguito sviluppati algoritmi esatti o euristici per la separazione di ciascuna classe.

Un procedimento alternativo consiste nel generare i piani di taglio senza avere una conoscenza a priori del poliedro in esame. Questa idea è stata elaborata per la prima volta da Gomory nel 1958 [2] e quindi successivamente ripresa e rielaborata da molti altri.

I cosidetti tagli di Chvátal-Gomory sono piani di taglio validi per generici problemi di ottimizzazione lineare intera. Gomory e, successivamente, Chvátal [5], hanno elaborato due metodi distinti per un definire la stessa classe di disuguaglianze valide per il poliedro definito dall'involucro convesso di un insieme di punti interi.

2. – Separazione duale di disuguaglianze modulo k.

Caprara e Fischetti [3], nel 1996, hanno ripreso questi concetti, riducendo il problema della separazione di un sottoinsieme dei tagli di Chvátal-Gomory (i *tagli modulo k*) ad un problema di minimizzazione di una funzione lineare nello spazio delle soluzioni di un sistema di congruenza modulo k per $k \geqslant 2$ intero. Sfortunatamente, anche in questo caso, così come per le generiche disuguaglianze di Chvátal-Gomory, il problema della separazione duale risulta essere NP-hard. Infine, nel 2000, Caprara, Fischetti e Letchford hanno definito un algoritmo a complessità polinomiale per la separazione delle *disuguaglianze modulo k massimamente violate*, che definiscono un particolare sottoinsieme dei tagli modulo k.

Contributo della tesi. È stata definita la classe delle disuguaglianze *modulo 2 quasi massimamente violate*, che rappresenta un sottoinsieme delle disuguaglianze modulo 2 contenente strettamente i tagli modulo 2 massimamente violati. Tale classe risulta essere separabile in tempo polinomiale.

È stato inoltre sviluppato un algoritmo esatto a complessità polinomiale per la generazione di questa famiglia di disuguaglianze e ne è stata testata l'efficacia sia in una procedura di tipo *cutting planes* che in un più generale algoritmo *Branch-and-cut*.

3. – Separazione primale.

Dato un poliedro P_I, un suo vertice $\bar{x}$ ed un punto x^*, il problema della *separazione primale* consiste nel trovare, se esiste, un piano di taglio che separi P_I da x^* e che passi per $\bar{x}$, o nel dimostrare che tale piano non esiste.

Il problema della separazione primale è stato introdotto da Young nel 1968 nello sviluppo di un algoritmo di tipo simplesso, e definito formalmente da Padberg e Hong (1980) e Padberg e Rao [4] nel contesto rispettivamente del problema del commesso viaggiatore ed in quello del matching.

Grazie alla teoria della dualità, la separazione primale può essere utilizzata per provare l'ottimalità di un punto intero $\bar{x}$. Inoltre, Padberg e Grotschel, nel 1985, hanno dimostrato che il problema della separazione primale può essere ridotto polinomialmente a quello della separazione standard. Questo risultato implica che la separazione primale è «non piú difficile» di quella standard. Di conseguenza, è lecito prevedere che, in genere, algoritmi e procedure di separazione primale siano più semplici delle loro varianti duali.

Contributo della tesi. La precedente ipotesi è stata suffragata dalla definizione di nuovi algoritmi polinomiali per la separazione primale delle disuguaglianze *odd cut* per i problemi del matching e del *T-join*, di quelle *odd cycle* per i problemi dell'*insieme stabile* e del *massimo sottografo bipartito*, e delle disuguaglianze *cycle* per il problema del *massimo taglio*: in tutti questi casi, gli algoritmi proposti risultano essere concettualmente più semplici di quelli per la separazione duale associati noti in letteratura. In particolare, per il problema del matching perfetto, viene presentato un algoritmo di separazione primale che si basa semplicemente sulla risoluzione di un problema di massimo flusso.

4. – Equivalenza tra ottimizzazione lineare intera e separazione primale.

Mettendo a confronto le due varianti di separazione, si può osservare come quella primale, rispetto alla standard, richieda una quantità di informazioni superiore (il vertice $\bar{x}$) e restituisca un risposta più debole, poiché la non esistenza di un piano di taglio primale non implica necessariamente che il punto x^* appartenga a P_I. A questo punto, risulta, quindi, non banale l'esistenza di una relazione di equivalenza polinomiale tra la separazione primale e quella standard. Il problema è, infatti, ancora aperto.

Contributo della tesi. È stato dimostrato che, per problemi associati a politopi di tipo 0/1, la separazione primale risulta polinomialmente equivalente a quella standard, anche in senso forte. Questo risultato, nel caso 0/1, implica quello di equivalenza polinomiale forte tra i quattro problemi di ottimizzazione, aumentazione, separazione standard e separazione primale. Di consequenza, l'algoritmo di separazione primale per le disuguaglianze odd cut sopra citato definisce una nuove dimostrazione molto semplice della polinomialità del problema del matching perfetto.

L'equivalenza polinomiale tra il problema dell'ottimizzazione intera e quello della separazione primale rappresenta quindi, nel caso di politopi con vertici a componenti 0/1, il corrispettivo *primale* del risultato sopra citato [1] di equivalenza tra ottimizzazione lineare intera e separazione standard.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRÖTSCHEL M., LOVÁSZ L. e SCHRIJVER A., *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*, Combinatorica, **1** (1981), 167-197.
[2] GOMORY R. E., *Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*, Bulletin of the American Mathematical Society, **64** (1958), 275-278.
[3] CAPRARA A. e FISCHETTI M., $\{0, \frac{1}{2}\}$-*Chvátal-Gomory Cuts,* Mathematical Programming, **74** (1996), 221-235.
[4] PADBERG M. W. e RAO M. R., *Odd minimum cut-sets and* b-matchings, Mathematics of Operations Research, **7** (1982), 67-80.
[5] CHVÁTAL V., *Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems,* Discrete Mathematics, **4** (1973), 305-337.

Istituto di Analisi dei Sistemi e Informatica del CNR
e-mail: ventura@iasi.rm.cnr.it
Dottorato in Ricerca Operativa - XIV Ciclo
(sede amministrativa: Università «La Sapienza» Roma)
Direttore di ricerca: Dr. Giovanni Rinaldi,
Istituto di Analisi dei Sistemi e Informatica del CNR