Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elvira Zappale

Alcune questioni in omogeneizzazione: condizioni di Dirichlet e problemi con scale multiple

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 339–342.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_339_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 339-342

Alcune questioni in omogeneizzazione: condizioni di Dirichlet e problemi con scale multiple.

ELVIRA ZAPPALE

Oggetto principale di questo lavoro è il trattamento di alcuni problemi di omogeneizzazione in presenza di scale singole o multiple, che compaiono nelle teorie della elasticità e della plasticità. L'omogeneizzazione concerne lo studio di modellizzazioni di materiali compositi, caratterizzati come misture fini di due o più componenti distribuite, a livello microscopico, secondo una struttura periodica, nella quale la dimensione dei materiali costituenti è da ritenersi molto piccola in confronto con le dimensioni macroscopiche del materiale. Il rapporto fra le dimensioni microscopiche e quelle macroscopiche si chiama parametro di omogeneizzazione.

La descrizione dei problemi di omogeneizzazione per materiali compositi avviene solitamente in termini di equazioni o di integrali del Calcolo delle Variazioni dove i parametri che intervengono presentano un carattere di periodicità rispetto alle variabili. Il comportamento macroscopico dei materiali in esame viene, quindi, approssimativamente descritto dal comportamento asintotico dei problemi relativi quando il parametro di omogeneizzazione tende a zero.

Nella tesi vengono esaminati alcuni processi di omogeneizzazione sia in presenza di una sola scala di periodicità sia in presenza di scale multiple, dove, appunto, intervengono più scale di periodicità e, dunque, contemporaneamente più processi di omogeneizzazione. Più precisamente viene determinato il comportamento asintotico, per $\varepsilon \to 0$ (ε è il parametro di omogeneizzazione) di energie integrali del tipo $\int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du\right) dx$ (caso con una scala) e $\int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}, D^2 u\right) dx$ (caso «multiscala»), dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$, Du è il gradiente della funzione u e $D^2 u$ è il tensore hessiano. Queste analisi hanno consentito di ottenere descrizioni esplicite dei limiti di tali energie attraverso risultati di rappresentazione integrale i quali mostrano che detti limiti sono ancora integrali del Calcolo delle Variazioni. Si individuano, così, materiali fittizi, detti materiali omogeneizzati che descrivono il comportamento dei materiali approssimanti quando ε è piccolo. Strumento principale per condurre tale studio è stato la Γ-convergenza.

Per quanto concerne il comportamento asintotico di energie integrali del primo tipo, molto studiati sono stati i problemi di minimo di tipo Neumann o di tipo Dirichlet nel caso omogeneo, mentre non molto è stato detto circa l'omogeneizzazione di problemi di tipo Dirichlet con dati al bordo generici. Per questi ultimi sono stati ottenuti nella tesi risultati di omogeneizzazione in spazi di Sobolev e delle funzioni a variazione limitata (cfr. [6]).

Per quanto riguarda i problemi di secondo tipo, nella tesi sono stati studiati processi di omogeneizzazione descritti attraverso il metodo della convergenza multiscala, introdotta in maniera rigorosa per la prima volta da [4] e poi sviluppata, soprattutto, in [1]. I risultati ottenuti sono riportati in [3] e [5], a cui si fa riferimento per i dettagli. Raramente questo metodo è stato adoperato per determinare il comportamento asintotico descritto mediante funzionali integrali. La nozione di «convergenza multiscala» è stata utilizzata in letteratura solo nel caso di integrali dipendenti dal gradiente. Restava dunque da capire come estendere tale convergenza a funzioni dotate anche di derivate seconde, e conseguentemente determinare il Γ-limite della famiglia di funzionali $J_\varepsilon(u, \Omega) := \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}, D^2 u\right) dx$. Nel seguito si descrivono i risultati ottenuti in questo caso.

Al fine di precisare quanto detto, diamo la definizione di convergenza multiscala ($n = 3$) fornendo l'enunciato di una proposizione che ne giustifica l'introduzione (cf., ad esempio, [1] e [4]). Nel seguito Ω indicherà un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$ ed Y_1 e Y_2 due copie identiche del cubo $(0, 1)^N$ e con $E_t^s(\mathbf{R}^m)$ si denoterà lo spazio delle s-uple di forme t-lineari su $\mathbf{R}^m$ completamente simmetriche.

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $\{u_\varepsilon\}$ una successione limitata in $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Allora esiste una sottosuccessione (denotata con gli stessi indici) ed una funzione $u_0 \in L^p(\Omega \times Y_1 \times Y_2)$ tale che*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}\right) u_\varepsilon(x)\, dx = \int_\Omega \int_{Y_1} \int_{Y_2} \varphi(x, y, z)\, u_0(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

per ogni $\varphi \in L^{p'}(\Omega; C_{\mathrm{per}}(Y_1 \times Y_2))$, $p' = \frac{p}{p-1}$. La (sotto)successione $\{u_\varepsilon\}$ si dice convergere, nel senso 3-scala ad u_0, (in simboli $u_\varepsilon(3 - sc) \rightharpoonup u_0$).

Vale la pena osservare che tale convergenza può essere intesa come una generalizzazione del Lemma di Riemann-Lebesgue, ed è fortemente connessa con la teoria delle misure di Young.

Nella tesi è stato dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 1. – *Se $\{u_\varepsilon\}$ è una successione limitata in $W^{2,p}(\Omega, \mathbf{R}^d)$ allora è possibile estrarre una sottosuccessione (indicata con gli stessi indici) che converge debolmente ad u ed esistono $U \in L^p(\Omega; W^{2,p}(Y_1; \mathbf{R}^d))$ e $W \in L^p(\Omega \times Y_1; W^{2,p}(Y_2; \mathbf{R}^d))$ tali che*

(i) $U - A(x)\, y \in L^p(\Omega; W^{2,p}_{\mathrm{per}}(Y_1; \mathbf{R}^d))$ per qualche $A \in L^p(\Omega; \mathbf{R}^{d \times N})$;

(ii) $W - C(x, y)\, z \in L^p(\Omega \times Y_1; W^{2,p}_{\mathrm{per}}(Y_2; \mathbf{R}^d))$ per qualche $C \in L^p(\Omega \times Y_1; \mathbf{R}^{d \times N})$;

(iii) $u_\varepsilon(3 - sc) \rightharpoonup u$, $Du_\varepsilon(3 - sc) \rightharpoonup Du$ e

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i\, \partial x_j}(3 - sc) \rightharpoonup \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_i\, \partial y_j}(x, y) + \frac{\partial^2 W}{\partial z_i\, \partial z_j}(x, y, z). \tag{2}$$

Viceversa, assegnate $u \in W^{2,p}(\Omega; \mathbf{R}^d)$, $U \in L^p(\Omega; W^{2,p}(Y_1; \mathbf{R}^d))$ *e* $W \in L^p(\Omega \times Y_1; W^{2,p}(Y_2; \mathbf{R}^d))$ *che verificano (i) e (ii), esiste una successione limitata* $\{u_\varepsilon\} \subseteq W^{2,p}(\Omega, \mathbf{R}^d)$ *che soddisfa (iii).*

Va osservato che questo risultato, pur procedendo in analogia con quello valido nel caso del gradiente (cf. Theorem 2.6 in [1]), dà luogo, al limite, a funzioni U e W che non sono periodiche nell'ultima variabile, se non a meno di un addendo lineare, il quale, del resto, non porta contributo al tensore hessiano. D'altra parte, va sottolineato che la misurabilità di U e W è tuttaltro che scontata, ed è ottenuta con considerazioni completamente differenti dal caso $W^{1,p}$. Il Teorema 1 è stato adoperato per determinare l'esistenza del Γ-limite $J(u, \Omega)$ della famiglia di funzionali $J_\varepsilon(u, \Omega)$, assumendo, ad esempio, che la funzione

$$f : (x, y, H) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times E_2^d(\mathbf{R}^N) \to [0, +\infty[$$

sia continua, separatamente $(0, 1)^N$-periodica in x e y, convessa in H e soddisfi una condizione di crescita del tipo

$$\frac{1}{C}|H|^p \leqslant f(x, y, H) \leqslant C(1 + |H|^p)$$

per qualche $C > 0$ e $p > 1$. Risulta, infatti, che

$$J(u, \Omega) = \inf_X \int_\Omega \int_{Y_1} \int_{Y_2} f(y, z, D^2_{xx} u(x) + D^2_{yy} U(x, y) + D^2_{zz} W(x, y, z))\, dx\, dy\, dz \tag{3}$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega; \mathbf{R}^d)$, dove

$$X := \{(U, W) : U - A(x) y \in L^p(\Omega; W^{2,p}_{\mathrm{per}}(Y_1)), \text{ per qualche } A \in L^p(\Omega),$$

$$W - C(x, y)\, z \in L^p(\Omega \times Y_1; W^{2,p}_{\mathrm{per}}(Y_2)) \text{ per qualche } C \in L^p(\Omega \times Y_1)\}.$$

La formula (3), apparentemente, non fornisce una rappresentazione integrale «in senso classico» per il funzionale $J(u, \Omega)$. È, però, possibile «riscrivere» $J(u, \Omega)$ anche come l'integrale di una densità f_{hom}, collegata, attraverso una formula esplicita, alla densità di partenza f, del tipo

$$J(u, \Omega) = \int_\Omega f_{\mathrm{hom}}(D^2 u)\, dx. \tag{4}$$

La semicontinuità inferiore del Γ limite comporta che l'integrando f_{hom} sia 2-quasiconvesso.

Sia $k \in \mathbf{N}$, ricordiamo che una funzione di Borel $f : \mathbf{R}^t \to \mathbf{R}$ si dice k-quasiconvessa se

$$f(v) \leqslant \int_{(0,1)^t} f(v + D^k \varphi)\, dx \tag{5}$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty((0,1)^t)$. Per $k=1$, la (5) è la nota disuguaglianza di quasiconvessità, equivalente alla convessità se anche $t=1$.

È ben noto che ogni funzione quasiconvessa è localmente lipschitziana, e, di recente, è stato dimostrato che la stessa proprietà vale per le funzioni 2-quasiconvesse. Restava aperta la questione se tale proprietà continuasse a sussistere per funzioni k-quasiconvesse, con $k>2$ (cf. ad esempio [2] per un quadro complessivo sull'argomento). Nella tesi, infine, è stata fornita risposta affermativa a tale questione, dimostrando il seguente teorema.

TEOREMA 2. – *Sia k un numero naturale. Se $f : E_k^s(\mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}$ è $k-$ quasiconvessa, allora f è localmente Lipschitziana.*

Inoltre se

$$|f(A)| \leqslant \alpha(1+|A|^p)$$

allora

$$|f(A)-f(B)| \leqslant \beta\left(1+|A|^{p-1}+|B|^{p-1}\right)|A-B|, \tag{6}$$

per ogni $A, B \in E_k^s$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLAIRE G. e BRIANE M., *Multiscale Convergence and Reiterated Homogenization*, Proc. Royal Soc. Edin., **126** (1996), 297-342.
[2] DACOROGNA B. e MARCELLINI P., *Implicit Partial Differential Equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkäuser (1999).
[3] FONSECA I. e ZAPPALE E., *Multiscale relaxation of Convex Functionals*, accettato per la pubblicazione su J. Convex. Anal.
[4] NGUETSTENG G., *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **20** (1989), 608-623.
[5] SANTOS P. M. e ZAPPALE E., *Second Order Analysis for Thin Structures*, Research Report 02-CNA-021 CMU, inviato per la pubblicazione.
[6] ZAPPALE E., *On the Homogenization of Dirichlet Minimum Problems*, in corso di pubblicazione su Ricerche di Mat.

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata,
Università degli Studi di Salerno
e-mail: zappale@diima.unisa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II»)-Ciclo XIII
Direttore di Ricerca: Prof. Riccardo De Arcangelis,
Università degli Studi di Napoli «Federico II»