BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

CRISTINA ZUCCA

Tecniche analitiche, numeriche e di MonteCarlo per lo studio dei tempi di primo passaggio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **6-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2003), n.2, p. 343–346.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_2_343_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2003.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VI-A, Agosto 2003, 343-346

Tecniche analitiche, numeriche e di MonteCarlo per lo studio dei tempi di primo passaggio.

CRISTINA ZUCCA

I modelli stocastici sono stati ampiamente utilizzati per descrivere la dinamica di sistemi complessi di interesse in una vasta gamma di campi applicativi. Problemi riguardanti la biologia teorica, la finanza matematica, l'analisi di affidabilità, la teoria delle code o la statistica matematica possono essere descritti in modo esauriente in termini di processi caratterizzati da una componente aleatoria intrinseca.

In particolare, i processi di diffusione assumono un ruolo importante nella descrizione di molti fenomeni e risultano adatti a descrivere sistemi che evolvono su spazi limitati poiché permettono l'inserimento di diversi tipi di barriere nel modello. Ad esempio, in biologia teorica l'evoluzione del potenziale di membrana di un neurone può essere modellizzata tramite particolari processi di diffusione e il tempo di sparo della cellula può essere descritto come il tempo di primo passaggio della diffusione considerata attraverso una barriera interpretabile dal punto di vista biologico (cf.[5]). Ugualmente, nella teoria delle code i processi di diffusione vengono utilizzati per descrivere l'evoluzione temporale di una coda e lo studio può essere per esempio motivato dalla necessità di conoscere l'istante in cui tale coda raggiunge la capacità massima del sistema in modo da individuare possibili miglioramenti nel servizio.

Dagli esempi citati si evince come, in molti casi pratici, si presenti la necessità di considerare il tempo di primo passaggio (FPT) di un processo di diffusione attraverso una particolare barriera piuttosto che descrivere l'evoluzione dettagliata di tale processo. Le quantità di interesse diventano quindi la distribuzione o altri funzionali del tempo di primo passaggio attraverso una barriera costante o dipendente dal tempo. Inoltre, esistono situazioni di interesse applicativo in cui il fenomeno in esame non può essere descritto in modo adeguato usando semplicemente processi di diffusione; pertanto sorge la necessità di studiare modelli più generali quali i processi di diffusione con salti. Lo studio di questi processi limitati da barriere può essere considerato come l'obiettivo finale delle ricerche in questa tesi. Tali processi presentano importanti difficoltà se analizzati nella loro totalità, pertanto nel nostro approccio separiamo le due componenti: una parte continua in spazio e tempo, di tipo diffusivo e una discreta nello spazio ma continua nel tempo che è un processo di salto. Lo studio di queste due classi di processi corrisponde ad una divisione di questa tesi in due parti principali, una dedicata all'analisi dei processi di diffusione e l'altra dedicata all'indagine sui processi di salto. Tuttavia i metodi introdotti per ciascuna componente potranno in seguito venire utilizzati per il processo composto.

Per quanto riguarda il problema del FPT, i casi in cui le soluzioni sono disponibili in forma chiusa sono rari e non corrispondono ai casi di interesse per le applicazioni. Il lavoro è stato quindi diretto verso la ricerca di metodi alternativi numerici o simulativi. Purtroppo le tecniche di facile utilizzo per lo studio di FPT di processi di salto presentano difficoltà quando si tenti di estendere l'applicazione ai FPT di diffusioni e viceversa. In particolare, mentre è semplice utilizzare le simulazioni quando si lavori con processi di salto, esse presentano delle difficoltà quando si vogliano simulare delle diffusioni. In modo equivalente, metodi di ordinamento stocastico sono molto utili e di facile utilizzo per confrontare FPT dei processi di diffusione ma tali metodologie non sono state ancora studiate per l'analisi dei processi di salto. Per determinare metodi che possano essere usati sia per i processi continui che discreti, in questa tesi proponiamo nuove tecniche numeriche e simulative per i FPT dei processi di diffusione sia per il problema «diretto» sia per quello «inverso» (parte I) e su relazioni di ordinamento stocastico per processi di salto (parte II).

1. – Parte I: FPT per processi di diffusione.

Nella parte I di questa tesi focalizziamo la nostra attenzione sui FPT di processi di diffusione unidimensionali

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t),\ X(0) = x_0 \tag{1}$$

limitati da una barriera assorbente $b(t) > x_0$ continua. In particolare denotiamo con $T_{b;\,x_0} = \inf\{t > t_0 \colon X(t) \geqslant b(t);\ X(t_0) = x_0\}$ il FPT di X attraverso $b(t)$.

Notiamo che, negli ultimi cinquant'anni del secolo scorso molti ricercatori hanno lavorato su questo problema sia da un punto di vista teorico che numerico (cf. [3]) ma nella maggior parte dei casi non è stato possibile trovare risultati in forma chiusa per i funzionali del FPT di interesse applicativo; per questo motivo sono state utilizzate procedure alternative basate sulle simulazioni. Tuttavia, anche negli approcci simulativi e numerici ci sono alcuni aspetti che possono condurre a risultati non affidabili. Un problema, trattato in questa tesi, che è nascosto spesso nella simulazione delle traiettorie, riguarda il mancato riconoscimento del tempo di primo passaggio. Per riconoscere l'istante di attraversamento del processo attraverso la barriera, discretizzando la traiettoria campione del processo, l'assorbimento può accadere durante l'intervallo di discretizzazione e quindi può rimanere inosservato nella simulazione. Questo porta a una importante sovrastima del tempo di primo passaggio. L'utilizzo di un passo di simulazione più piccolo o di uno schema di discretizzazione con più alto ordine di convergenza può migliorare i risultati soltanto parzialmente perché il rumore bianco che genera il processo stocastico può indurre l'attraversamento della barriera in un intervallo arbitrariamente piccolo.

Nella prima parte della tesi viene introdotta una nuova procedura completamente simulativa di tipo Monte Carlo che, utilizzando alcune proprietà dei processi legati (tied-down), fornisce risultati affidabili nello studio dei FPT dei processi di diffusione quali i momenti e la densità del tempo di primo passaggio. L'algoritmo proposto è stato validato tramite uno studio analitico sull'ordine e la limitatezza dell'errore tra $\widetilde{T}_{b;\,x_0}$ FPT del processo discretizzato con $T^{*}_{b;\,x_0}$ FPT risultante dall'algoritmo di simulazione innestato:

$$E[\,|\,\widetilde{T}_{b;\,x_0} - T^*_{b;\,x_0}\,|\,] \sim O\left(\sqrt{\frac{h}{M}}\right) \tag{2}$$

dove con M si è indicato il numero di simulazioni del processo tied-down per ogni intervallo di discretizzazione di passo h. Il metodo può anche essere esteso proponendo un algoritmo per casi più generali quali i processi di diffusione con salti.

Nel lavoro di tesi si è inoltre lavorato sul cosiddetto «problema inverso» sui tempi di primo passaggio. Si è considerata la seguente domanda formulata da A.N. Shiryaev nel 1976 durante un Banach centre meeting: «Esiste un tempo del primo-passaggio rispetto ad un processo di Wiener con distribuzione esponenziale?». Tale domanda è motivata dall'interesse nella costruzione di un processo di Poisson generato dal primo passaggio di un moto Browniano attraverso una barriera dipendente dal tempo. La soluzione di questo problema inoltre conduce ad un problema inverso più generale: data la funzione di densità di FPT di un processo di Wiener, è possibile ottenere delle informazioni sulla forma della barriera? Questo genere di studio non è stato ancora analizzato in dettaglio (cf. [1]) anche se ha interesse applicativo; ad esempio in statistica matematica è interessante interpretare i dati di una serie storica come un FPT di un processo di Wiener per ottenere informazioni su un modello che possa generare i dati osservati. Nel lavoro di tesi è stata condotta un'indagine sulle equazioni integrali che coinvolgono la distribuzione dei tempi di primo passaggio note in letteratura ed è stata dimostrata la loro equivalenza. In seguito si è ricavata una soluzione numerica per il problema diretto, ottenuta discretizzando una nuova equazione integrale. Notiamo esplicitamente come il metodo diretto, anche se equivalente alle varie tecniche numeriche esistenti in letteratura per i processi di diffusione, risulti molto veloce e di facile applicazione quando si lavori con un moto Browniano. Tale metodo diretto si è inoltre rivelato un supporto utile negli studi preliminari per il problema inverso. Successivamente vengono presentati alcuni risultati analitici che costituiscono un collegamento fra la forma della barriera e la densità di probabilità del FPT (p.d.f.) utili per lo studio del problema «inverso». Viene descritta una nuova procedura di tipo Monte Carlo che permette di ottenere un'approssimazione lineare a tratti $\tilde{b}_h(t)$ della barriera $b(t)$(cf. [2]), nota l'espressione analitica della FPT p.d.f. di un processo di Wiener e viene confermata l'attendibilità del metodo dimostrando la limitatezza dell'errore:

$$|\,b(t) - \tilde{b}_h(t)\,| \sim O(h). \tag{3}$$

Il metodo proposto per il problema inverso viene poi applicato al caso esponenziale fornendo quindi una risposta numerica alla domanda di Shiryaev.

2. – Parte II: Ordinamenti stocastici.

La parte II della tesi concerne l'analisi di processi di puro salto e in particolare di processi di rischio di interesse nella teoria matematica delle assicurazioni.

Sia $N(t)$ un generico processo di conteggio e sia X_i, $i \in N^+$ una sequenza di variabili aleatorie iid non negative e indipendenti da N. Un processo di rischio composto $S = S(t)$, $t \geqslant 0$ è dato da

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geqslant 0. \tag{4}$$

I processi di puro salto possono essere efficacemente studiati e trattati con dei metodi di tipo simulativo. Tuttavia, un'alternativa possibile alle simulazioni è l'uso di determinate relazioni d'ordine che permettano di limitare la variabile aleatoria di interesse (cf. [4]). Nella parte II di questa tesi cerchiamo pertanto relazioni d'ordine fra i processi di salto. Il primo obiettivo del nostro lavoro è quindi di trovare un'approssimazione continua del processo discreto con l'obiettivo finale di combinarlo con la parte diffusiva in modo da ottenere un'approssimazione del processo iniziale di diffusioni con salti di interesse per le applicazioni. In particolare nel lavoro di tesi si determinano due processi stocastici che sono, rispettivamente più piccolo e più grande del processo puro di salto secondo un ordinamento stocastico (bf in particolare, secondo l'ordinamento stocastico classico ST). Le relazioni d'ordine trovate permettono di determinare, come conseguenza, un limite superiore e uno inferiore delle distribuzioni delle relative marginali nonché dei relativi tempi di primo passaggio. Viene inoltre mostrata una generalizzazione di questi risultati ai processi di rischio perturbati da diffusioni mentre gli ulteriori sviluppi ed applicazioni considereranno i processi di diffusione con salti.

BIBLIOGRAFIA

[1] Anulova, S.V., *On Markov stopping times with a given distribution for a Wiener process.*, Theory Probab. Appl., **5** (1980), 362-366.

[2] Durbin, J., *Boundary crossing probabilities for the Brownian motion and Poisson processes and techniques for computing the power of the Kolmogorov-Smirnov theorem.*, J. Appl. Probab., 8 (1971), 431-453.

[3] Fortet, R., *Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique.*, J. Math. Pures Appl., **22** (1943), 177-243.

[4] Pellerey, F. and Shaked, M., *Stochastic comparison of some wear processes.*, Probability in the Engineering and Informational Sciences, **7** (1993), 421-435.

[5] Ricciardi, L.M., *Diffusion processes and related topics in Biology*, Springer Verlag, New York (1977).

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: zucca@dm.unito.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo XIV
Direttori di ricerca: Prof. ssa Laura Sacerdote, Università di Torino,
e Prof. Franco Pellerey, Politecnico di Torino