

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

FERNANDO SANSÒ

## **Il campo di gravità: dalla mela di Newton alle misure da satellite**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 6-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura (2003), n.3, p. 385–413.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2003\\_8\\_6A\\_3\\_385\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2003_8_6A_3_385_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## **Il campo di gravità: dalla mela di Newton alle misure da satellite.**

F. SANSÒ

### **1. – Introduzione.**

Le leggi della gravità, i fenomeni di attrazione e i moti che ne conseguono stanno alla base delle scienze fisiche così come oggi le conosciamo.

Nell'arco di un secolo, il 1600, si va dai primi esperimenti razionali di Galileo ad una disciplina matura, dotata dei nuovi potenti strumenti analitici del calcolo differenziale e integrale e ben strutturata in definizioni, assiomi e leggi, nonché capace di interpretare al livello di accuratezza dell'epoca tutti i principali fenomeni indagati.

A quei tempi la nascente teoria fisica della meccanica, l'astronomia e la geodesia, come scienza che si occupa del campo di gravità della terra, erano una cosa sola ed i fenomeni astronomici, così come quelli geofisici legati alla costituzione dell'interno della terra, hanno di fatto guidato l'individuazione delle leggi universali che tanto successo hanno avuto nello spiegare il mondo fisico.

Certo nessuna legge, nemmeno oggi, sembra essere così universale da spiegare tutto ed anche la meccanica classica ha dovuto essere superata, essendo incapace di spiegare alcuni nuovi fenomeni che hanno portato, alle soglie del '900, alla formulazione della teoria della relatività e, poco dopo, alla fondazione della meccanica quantistica.

Nel frattempo, tuttavia, anche le antiche scienze, come la geodesia, hanno progredito lungo strade diverse, maturando lentamente mano mano che si raffinavano gli strumenti di misura e cresceva la quantità di informazione disponibile e gestibile per mezzo dei computer. Tutto ciò naturalmente restando nell'alveo teorico della fisica classica, solo incrementando enormemente la capacità di osservare

minute variazioni della gravità (nello spazio e nel tempo) e di interpretarle legandole agli altri aspetti geofisici della conoscenza della terra. In questo senso, dopo un ventennio di crescenti conquiste, particolarmente dovute alla disponibilità di osservazioni prese dallo spazio, siamo ad un'importante svolta nella capacità di osservare globalmente il campo di gravità terrestre. Può essere utile perciò oggi fare il punto della situazione, cercando di capire quali nuove conoscenze sul campo di gravità ci possiamo aspettare nel prossimo decennio e le loro implicazioni sulla nostra capacità di interpretare il sistema fisico della terra.

## **2. – La legge di Newton: dalla mela alla gravitazione universale.**

Cadde una mela e fu scoperta la legge di attrazione della gravità. Certo questa è leggenda, ma contiene già due elementi interessanti; il primo è che comunque è l'osservazione del fenomeno fisico che ci permette di giungere alla legge fisica generale, il secondo è che Isacco Newton scopre la legge della gravitazione come legge universale, capace di descrivere in modo incredibilmente accurato tanto i moti dei corpi celesti quanto i moti dei corpi naturali tipici della nostra esperienza quotidiana, legati alla superficie della terra. Quei fenomeni cioè che nel cinquantennio precedente erano stati oggetto d'indagine di Galileo con i suoi esperimenti di caduta libera e di rotolamento lungo piani inclinati. Non era affatto evidente a quell'epoca che fenomeni «celesti» e fenomeni «terrestri» potessero avere la stessa origine, anche perché in quella fase i fenomeni celesti erano per lo più visti attraverso lo schermo di un misticismo religioso e metafisico, che ne facevano letteralmente «un altro mondo».

Non dimentichiamo che persino Copernico (1473-1543) nell'enunciare la sua teoria eliocentrica del sistema planetario assumeva la circolarità delle orbite per definizione in quanto la circonferenza era figura perfetta. Certo già con questa ipotesi Copernico riusciva a ridurre gli 80 moti apparentemente indipendenti, tipici del sistema tolemaico, a soli 34 e questo era il segno che ci si stava muovendo nella giusta direzione.

Ci sono voluti 30 anni di osservazioni di Tycho Brahe e poi di Ke-

plero<sup>(1)</sup> per giungere a quel miracolo di sintesi geometrica e cinematica che è costituito dalle tre famose leggi pubblicate tra il 1609 e il 1619<sup>(2)</sup>

1) ogni pianeta si muove lungo un'ellisse con il sole posto in un fuoco,

2) la linea che congiunge il sole con ogni pianeta spazza aree di ugual misura in intervalli di tempo uguali,

3) il quadrato del periodo dell'orbita di un pianeta è proporzionale al cubo della distanza media dello stesso pianeta dal sole.

Newton, già nel 1666, compie il primo pezzo di un ragionamento complesso, tipico dei problemi inversi, che lo porta attraverso le seguenti tappe:

a) comprendere che le leggi di Keplero sono compatibili solo con un moto del pianeta la cui accelerazione può essere scritta, in modulo, come

$$(2.1) \quad a = \frac{\mu}{r^2},$$

dove, come si scoprirà più tardi,  $\mu$ , che è necessariamente una costante dipendente solo dal sole, ovvero  $\mu = GM$ , con  $G$  una costante universale ed  $M$  la massa solare,

b) enunciare la famosa legge fondamentale della dinamica, per un osservatore che utilizzi un sistema di riferimento inerziale

$$(2.2) \quad F = ma,$$

arrivando anche a chiarire i concetti di forza e di massa (in questo caso massa inerziale),

c) combinare le due con il principio di eguaglianza tra azione e reazione, per giungere all'idea di gravitazione universale (*Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, 1687) che, nel riconoscere anche la proporzionalità tra la massa come fattore di resistenza al mo-

<sup>(1)</sup> Ricordiamo che a quel tempo le sole osservazioni possibili erano la ricostruzione del moto apparente dei pianeti sullo sfondo delle stelle fisse.

<sup>(2)</sup> *De Motibus Stellae Martis* (1609); *Harmoniae Mundi* (1619).

to (massa inerziale) e la massa come generatrice di gravità (massa gravitazionale) pone le basi per lo sviluppo, due secoli e mezzo dopo, della teoria della relatività generale.

La tappa indicata con la lettera a) fu compiuta dapprima in termini assai semplici, accettando di approssimare il moto dei pianeti con quello circolare uniforme. Dunque se il pianeta  $A$  si muove con velocità scalare costante  $v$  lungo un'orbita circolare di raggio  $r_A$ , allora il raggio vettore che unisce il centro  $O$  con il punto mobile spazza angoli  $\vartheta$  che sono proporzionali al tempo di percorrenza. A tempi uguali corrispondono angoli uguali e dunque aree uguali, ricadendo così sotto la seconda legge di Keplero.

D'altronde osservando la Fig. 2.1 appare chiaro che

$$v_A = \frac{r_A \dot{\vartheta}}{\tau} = r_A \omega$$

dove

$$(2.3) \quad \omega = \frac{2\pi}{T_A},$$

è la velocità angolare del pianeta e  $T_A$  è il periodo del moto.

Per analogia si vede che l'accelerazione centripeta è data da

$$(2.4) \quad a_A = v_A \omega = r_A \omega^2;$$

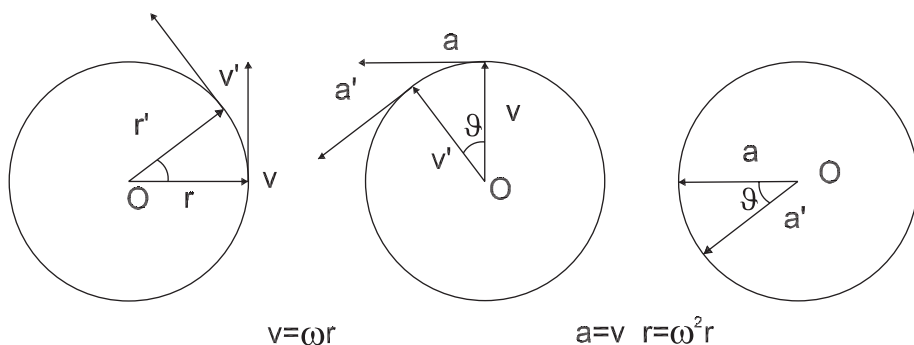


Figura 2.1. – Rapporto tra  $r$ ,  $v$ ,  $a$  in un moto circolare uniforme.

ma allora è pure

$$a_A = r_A \cdot \frac{(2\pi)^2}{T_A^2}$$

così che, sfruttando la terza legge di Keplero, si ha

$$(2.5) \quad a_A = \frac{\text{cost.}}{r_A^2}.$$

Cioè ogni pianeta  $A$  è in moto (con la suddetta approssimazione) attorno al sole con un'accelerazione che punta verso il sole stesso e che è inversamente proporzionale al quadrato della distanza; la costante di proporzionalità è la stessa per tutti i pianeti.

Ma se la presenza di accelerazione in un moto è la spia precisa di una forza in atto, secondo la (2.2), allora se ne deduce che il sole  $S$  agisce sul pianeta  $A$  con una forza pari a

$$(2.6) \quad F_{SA} = \text{cost.} \cdot \frac{m_A}{r_A^2}.$$

D'altro canto per il terzo principio della dinamica, uguale, ed opposta in verso, dovrà essere la forza esercitata da  $A$  sul sole, il che porta a specificare la costante in (2.6) come proporzionale alla massa stessa del sole, ovvero

$$(2.7) \quad F_{SA} = G \frac{M_S \cdot m_A}{r_A^2},$$

con  $G$  che assume il ruolo di una costante universale della gravitazione.

Fin qui per sole e pianeti tutto bene ma, e la mela? Cioè, si può pensare che, dando un valore universale alla legge di gravità, (2.7), anche l'accelerazione, notata già da Galileo, per i corpi che cadono a terra abbia la stessa origine? Certo il fatto che tale accelerazione sia indipendente dalla massa e dalla natura del corpo sembra già di per sé una prima conferma della (2.7), ma Newton, con un'intuizione straordinaria, contemporaneamente giunge a dimostrare sperimentalmente questo fatto e individua una sorprendente proprietà della

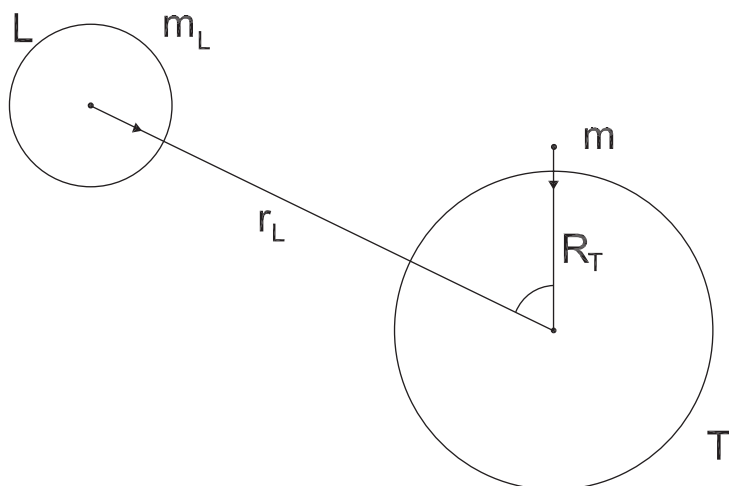


Figura 2.2. – Il sistema terra  $T$ , luna  $L$  e massa di prova  $m$ .

distribuzione di massa, che approfondiamo un poco in quanto ci sarà utile nel seguito del testo.

Supponiamo dunque che per motivi di simmetria il campo di gravità della terra sia lo stesso di quello di una massa piazzata nel suo centro, sia  $g$  l'accelerazione cui è soggetto il moto di una massa  $m$  che cade sulla superficie terrestre, cioè  $978 \text{ cm s}^{-2}$ , mentre sia  $m_L$  la massa della luna e  $g_L$  la sua accelerazione nel moto di rivoluzione attorno alla terra.

Poiché

$$g_L = \omega_L^2 r_L, \quad \omega_L = 2\pi/T_L,$$

$g_L$  è calcolabile abbastanza facilmente da osservazioni astronomiche già note al tempo di Newton. Ma allora dovrà essere

$$(2.8) \quad \frac{g}{g_L} = \frac{r_L^2}{R_T^2}$$

e poiché anche il raggio della terra era stato determinato (ad esempio da J. Picard nel 1669), la (2.8) diventava una relazione empiricamente verificabile. Newton trova che, con i valori a lui disponibili, la (2.8) è verificata con un errore relativo di circa 1.6%. Dunque una



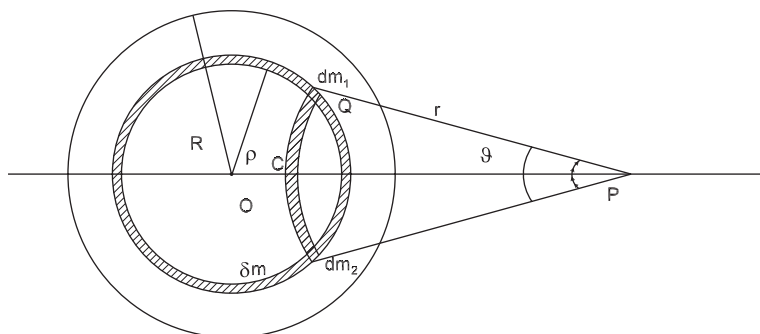


Figura 2.3. – Attrazione di un corpo composto da strati sferici omogenei.

fortissima conferma. Ma come giustificare il fatto che il campo terrestre sia lo stesso di quello di un'unica massa puntiforme piazzata al suo centro?

Newton non si limita a fare ciò, ma dimostra anche che la massa equivalente piazzata nel centro della terra deve essere precisamente uguale a tutta la massa terrestre.

Più precisamente, Newton considera una massa  $\delta m$  distribuita su uno strato infinitesimo di forma sferica e di raggio  $\varrho$  e prova che l'attrazione di questa su una massa unitaria di prova posta nel punto  $P$  esterno (vedi Fig. 2.3) è la stessa di una massa  $\delta m$  posta nel centro alla sfera. Ne segue che se la massa totale di un corpo sferico è distribuita in modo uniforme in ogni strato infinitesimo, con  $\varrho$  che corre da  $O$  ad  $R$ , allora la forza totale esercitata dal corpo sulla massa di prova in  $P$  sarà data dalla somma della forza dovuta ad ogni strato, cioè la stessa forza che eserciterebbe un'unica massa posta nel centro  $O$  e composta dal collasso in  $O$  di ognuna delle singole masse  $\delta m$  degli strati; in altri termini l'intera massa  $m$  del corpo sferico, concentrata in  $O$ .

L'ingegnosa e semplicità della prova ne meritano un veloce richiamo. Concentriamoci sul singolo strato contenente la massa  $\delta m$ , che idealizziamo perciò come una superficie sferica di raggio  $\varrho$ , come in Fig. 2.3.

Osservando tale figura si comprende che ogni piccola massa  $dm_1$ , contenuta nella corona sferica  $C$  assieme alla sua simmetrica  $dm_2$

contribuiscono al vettore forza con una componente diretta lungo  $PO$ . Poiché  $dm_1$  esercita l'attrazione  $g_1 = Fdm_1/r^2$ , in direzione  $PQ$ , la componente in direzione  $PO$  è data da

$$(2.9) \quad g_{1,PO} = \frac{Gdm_1 \cos \vartheta}{r^2}.$$

Essendo  $dm_1 = \sigma dS_Q$ , con  $\sigma$  densità superficiale di massa, si ha allora per la forza esercitata da tutta  $C$  lungo  $PO$  (si noti che tutti i punti di  $C$  hanno distanza  $r$  da  $P$  e i raggi che li uniscono a tale punto hanno la stessa inclinazione  $\vartheta$  su  $OP$ )

$$(2.10) \quad g_C = G \cdot \frac{\sigma dS_C \cos \vartheta}{r^2}.$$

L'area della corona  $C$  è data da (vedi Fig. 2.4)

$$(2.11) \quad dS_C = r' \sin \alpha \cdot 2\pi \cdot dl_Q$$

dove  $r' = P'Q$  e  $P'$  è un qualunque punto sull'asse  $OP$ .

Newton sceglie  $P'$  in modo tale che

$$(2.12) \quad d' \cdot d = R^2 \quad (d' = OP', \quad d = OP, \quad R = OQ).$$

Ora si prenda  $Q'$  in modo che  $OQ'$  sia parallela a  $P'Q$ , ciò che in Fig. 2.4 è garantito dall'eguaglianza dei due angoli  $\alpha$  nel disegno, e si noti che anche per la (2.12)  $OP'Q$  e  $OQP$  sono triangoli simili, così

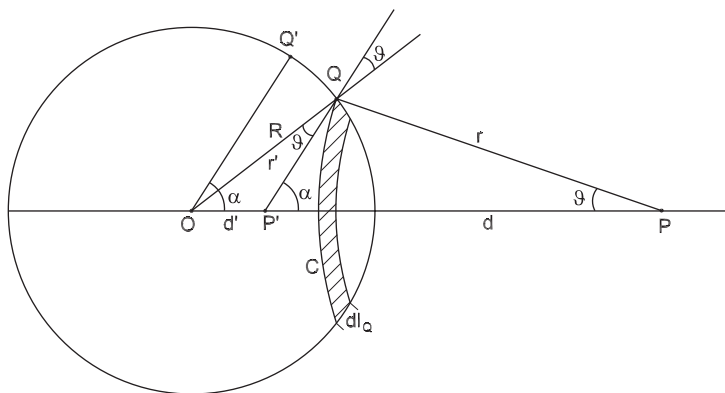


Figura 2.4. – La sfera di Newton.

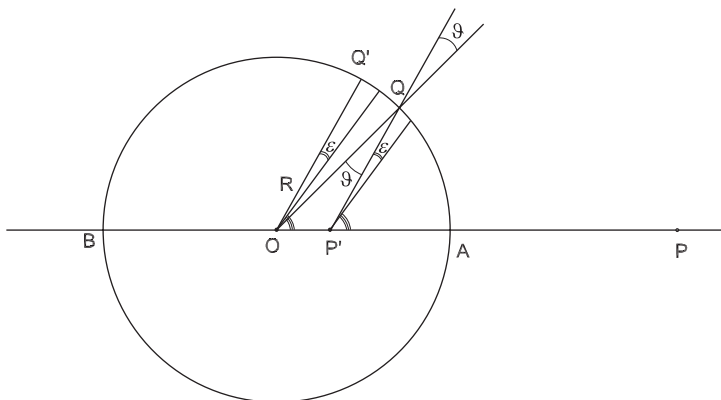


Figura 2.5. – La sfera di Newton.

che

$$(2.13) \quad \frac{r'}{R} = \frac{r}{\Delta}.$$

Si osservi la Fig. 2.5: si vede che quando  $Q$  percorre  $dl_Q$ ,  $Q'$  percorre  $dl_{Q'}$  in modo tale che gli angoli in  $P'$  ed in  $O$  siano uguali;  $dl_Q$  taglia il raggio  $r'$  con un angolo  $\pi/2 - \vartheta$ , la sezione normale di  $\varepsilon$  a distanza  $r'$  è data da  $dl_Q \cdot \cos \vartheta$  e si ha quindi

$$(2.14) \quad \varepsilon = \frac{dl_Q \cos \vartheta}{r'} = \frac{dl_Q}{R}$$

Ora se si immagina di disegnare una corona  $C'$ , parallela a  $C$ , ottenuta da  $dl_{Q'}$  ruotando la Fig. 2.5 attorno all'asse  $OP$ , si vede che

$$(2.15) \quad dS_{C'} = R \sin \alpha \cdot 2\pi \cdot dl_{Q'}$$

così che, usando le (2.11), (2.14) e (2.15),

$$\frac{dS_C \cos \vartheta}{dS_{C'}} = \frac{r' dl_Q \cos \vartheta}{R dl_{Q'}} = \left( \frac{r'}{R} \right)^2,$$

ovvero, ricordando la (2.13),

$$(2.16) \quad \frac{dS_C \cos \vartheta}{r^2} = \frac{dS_{C'}}{d^2}.$$

Ritornando alla (2.10) si trova

$$(2.17) \quad g_C = G\sigma \frac{dS_{C'}}{d^2};$$

quando  $Q$  corre sulla semicirconferenza  $AB$ ,  $Q'$  fa altrettanto e mentre tutta la sfera può essere immaginata come coperta da tante corone  $C$ , altrettanto essa risulterà coperta dalle corone «immaginarie»  $C'$ , pertanto, sommando i contributi a  $g$  per ogni  $C$ , si può altresì in (2.17) sommare i contributi di ogni  $C'$  ritrovando

$$(2.18) \quad g = G \frac{\sigma \cdot S_R}{d^2} = G \frac{\delta m}{d^2}$$

dove  $S_R$  è la superficie di tutta la sfera di raggio  $R$ , così che  $\sigma \cdot S_R$  non è altro che l'intera massa  $\delta m$  depositata su tale sfera all'inizio della nostra costruzione. La (2.18) dimostra l'assunto.

### 3. - Campo di gravità e forma della terra.

Iniziamo notando ancora una volta che il risultato ottenuto da Newton è stato duplice: non solo si è trovata una brillante conferma del valore universale della legge di gravitazione, ma anche si è avvalorata l'idea che, ad un livello di precisione relativa  $\sim 10^{-2}$ , la terra possa essere considerata come un corpo in cui le masse si distribuiscono con simmetria sferica, iniziando così una stagione di dibattiti scientifici sulla costituzione della terra che continua ancora oggi.

Già Newton comprese che, accettando un modello elementare di creazione dei pianeti come corpi fluidi, autogravitanti, che perdendo calore si solidificano, non si poteva certo trascurare il fatto che la massa fluida era in rotazione, e quindi sottoposta ad una forza centrifuga il cui effetto non poteva che essere uno schiacciamento degli strati a densità costante, tendenti ad allargarsi verso l'equatore.

Lo studio dei corpi autogravitanti e ruotanti, in equilibrio idrosta-

tico, ha un inizio folgorante con la pubblicazione nel 1743 da parte di Clairaut della sua celebre equazione differenziale, che descrive la distribuzione di massa per strati di densità omogenea delimitati da sferoidi, il cui schiacciamento si incrementa in funzione del raggio medio che corre da 0 al valore del raggio medio equatoriale terrestre.

Occorre arrivare alla fine dell'800 ed ai primi del '900 perché due matematici italiani (P. Pizzetti nel 1894 e C. Somigliana nel 1929) diano in forma chiusa le formule matematiche di un potenziale e del corrispondente campo di gravità (detti *normali*) che, aggiustando solo quattro parametri, permettono di approssimare il vero campo di gravità terrestre con una precisione relativa di  $\sim 10^{-5}$ . Il campo normale risulta analiticamente definito fissando la forma di un ellissoide di rotazione (semiasse equatoriale  $a$  ed eccentricità  $e$ ), la velocità angolare  $\omega$  di rotazione da porre uguale a quella della terra e la massa totale  $M$ , pure da fissarsi uguale a quella terrestre. L'ellissoide su menzionato risulta essere una superficie equipotenziale del campo normale, dunque ortogonale alla direzione della gravità corrispondente e quindi orizzontale. Se l'ellissoide viene correttamente piazzato con il centro nel baricentro terrestre e l'asse  $S$  coincidente con l'asse di rotazione, si ottiene come detto un'approssimazione con precisione relativa  $\sim 10^{-5}$ ; in particolare dunque ci aspettiamo anche che una superficie equipotenziale del campo di gravità attuale, vicino alla superficie terrestre, devii dalla corrispondente superficie equipotenziale del campo normale con delle ondulazioni di altezza di ordine di grandezza pari a circa  $10^{-5}$  per il raggio medio terrestre. Poiché questo è circa 6.370 km, ci aspettiamo ondulazioni dell'ordine di 60 m. In effetti se definiamo geoidi la superficie equipotenziale che più si accorda al livello medio degli oceani e se prendiamo un corrispondente ellissoide con il relativo campo normale le ondulazioni del geoidi  $N$  (cfr. Fig. 3.1) hanno un andamento oscillante entro i limiti massimo e minimo di circa  $\pm 100$  m. Una rappresentazione del miglior geoidi sulla base delle conoscenze attuali (EGM96) è data in Fig. 3.2. Tra l'altro si può osservare che se si conosce il potenziale attuale  $W(P)$ , che su  $G$  assumerà il valore costante  $W_0$ , ed il potenziale normale  $U$ , che sull'ellissoide  $E$  pure assumerà il valore

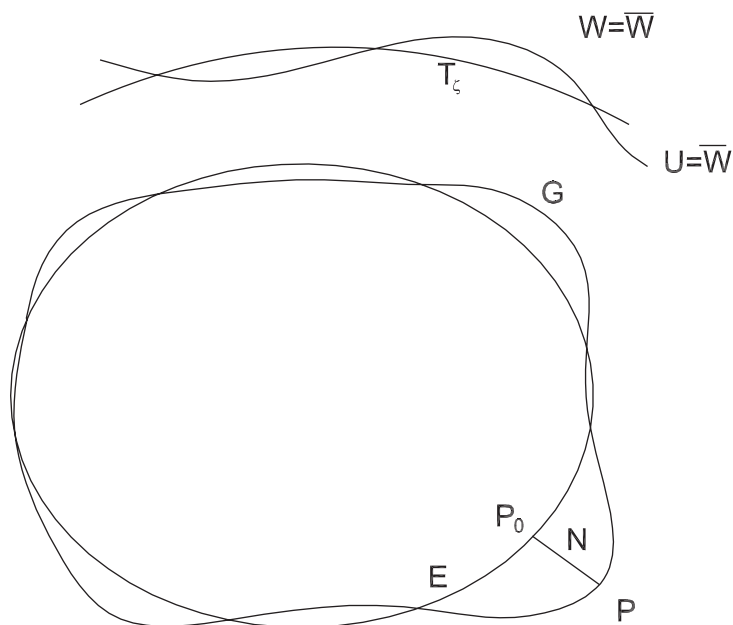


Figura 3.1. – Ellissoide, geoide, ondulazione del geoide, anomalia d'altezza.

costante  $W_0$ , allora il potenziale anomalo  $T(P)$ , definito come

$$(3.1) \quad T(P) = W(P) - U(P),$$

risulta in prima approssimazione direttamente legato ad  $N$ . Infatti, considerando che la gravità normale in  $P_0$ ,  $\gamma(P_0)$ , punta verso l'interno di  $E$ , si può scrivere

$$(3.2) \quad U(P) \cong U(P_0) - \gamma(P_0) N;$$

ma (cfr. Fig. 3.1)

$$U(P_0) = W_0 = W(P),$$

così che la (3.1) diventa

$$(3.3) \quad T(P) \cong \gamma(P_0) N$$

ovvero

$$(3.4) \quad N = \frac{T(P)}{\gamma(P_0)},$$

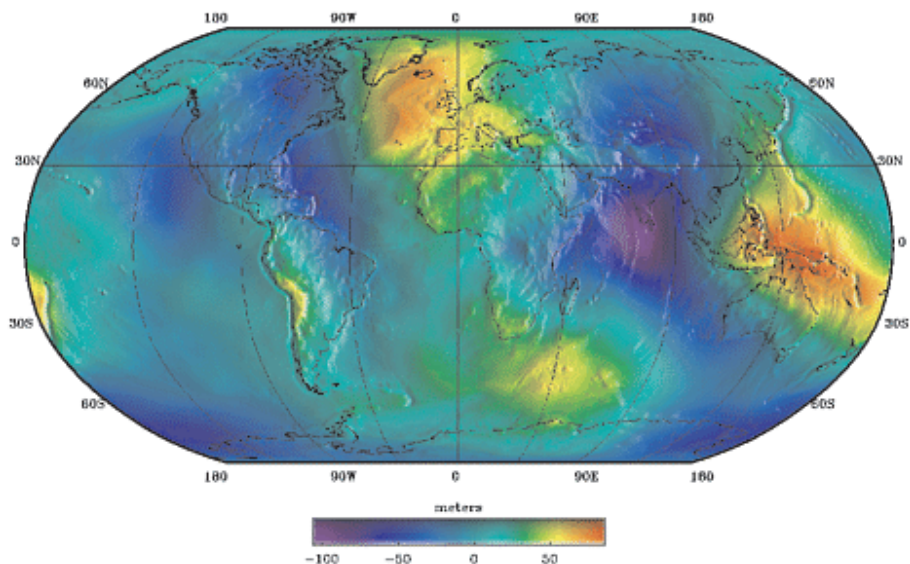


Figure 3.2. – Il geoide EGM96.

nota come relazione di Bruns (H. Bruns, *Die Figur der Erde* - Preuss. Geod. Inst. 1878).

Osserviamo anche che una relazione analoga vale per ogni coppia di superfici equipotenziali del campo attuale e di quello normale sulle quali i due potenziali assumano lo stesso valore. In Fig. 3.1 è mostrata una tale coppia corrispondente al valore  $\bar{W}$  del potenziale. La separazione tra le due in questo caso è indicata col simbolo  $\zeta$  e chiamata *anomalia d'altezza*. La (3.4) chiarisce che per ricavare la più o meno complessa geometria delle superfici equipotenziali del campo attuale, occorre di fatto ricavare il potenziale anomalo  $T(P)$ .

Un altro vantaggio della (3.4) è che nel descrivere l'ordine di grandezza di un potenziale anomalo, si può con tale relazione trasformarlo nel corrispondente valore di  $N$  ed esprimerlo in metri. Così il campo anomalo totale corrisponde a tutto il geoide e dunque ad un segnale di circa 100 m di ampiezza; il modello di campo EGM96 già menzionato contiene errori dell'ordine di grandezza di qualche metro (2 ~ 3 m), come discuteremo tra poco.

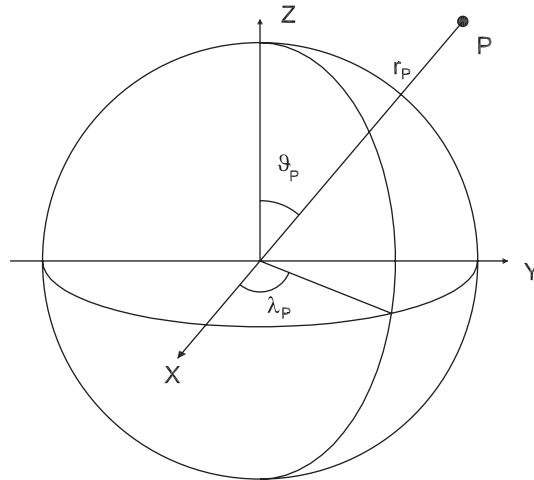


Figura 3.3. – Coordinate sferiche nello spazio.

Quando si voglia dare di  $T(P)$  una rappresentazione globale, ancorché approssimata, cioè valida per tutta la superficie terrestre e lo spazio esterno si fa ricorso ad una serie troncata di armoniche sferiche; in formula

$$(3.5) \quad T(P) = \frac{\mu}{R} \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n T_{nm} \left( \frac{R}{r_P} \right)^{n+1} Y_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P)$$

dove  $\mu = GM$  ( $M$  è la massa della terra),  $R$  il raggio medio terrestre,  $r_P$  la distanza di  $P$  dall'origine,  $(\vartheta_P, \lambda_P)$  le coordinate sferiche angolari rappresentate in Fig. 3.3, le  $Y_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P)$  sono polinomi trigonometrici in  $\sin \vartheta_P$ ,  $\cos \vartheta_P$ ,  $\sin \lambda_P$ ,  $\cos \lambda_P$  che hanno ordine di grandezza che sta tra 1 e  $\sqrt{2n+1}$ , <sup>(3)</sup>  $n$  ed  $m$  sono due indici detti rispettivamente grado e ordine dell'armonica sferica e  $T_{nm}$  sono i coefficienti armonici di  $T$ , cioè quei gradi di libertà la cui scelta determina il particolare modello globale (3.5).

<sup>(3)</sup> In particolare si può dimostrare che

$$\sum_{m=-n}^n Y_{nm}^2(\vartheta_P, \lambda_P) \equiv 2n+1$$

per ogni punto  $P$  della sfera unitaria.



Per un modello completo da grado 2 a grado  $N$  vi sono  $(N+1)^2 - 4$  coefficienti armonici.

Va notato che la sommatoria parte da grado 2 in quanto i gradi 0 ed 1 vengono automaticamente assorbiti dalle convenzioni fatte su campo normale ed ellissoide.

Si deve inoltre osservare che la risoluzione spaziale della rappresentazione (3.5) è data, in gradi sessagesimali, da  $\frac{180}{N}$ ; ad esempio per un modello completo fino a grado 360, come quello mostrato in Fig. 3.2, la risoluzione geografica è di  $0^{\circ},5$  ( $\sim 55$  km), ovvero si riescono a descrivere con la (3.5) particolari delle dimensioni di  $0^{\circ},5$  mentre particolari più fini della funzione vengono mediati e non sono più distintamente visibili. Sottolineiamo ancora che per definire un modello di questo tipo è necessario determinare i circa 130.000 coefficienti della serie (3.5) troncata a grado 360. Come si è già detto i modelli fino ad ora noti per  $T$  producono geoidi che contengono errori in media di circa 2-3 m. Il risultato potrebbe sembrare soddisfacente, ma non lo è.

Vi sono imponenti fenomeni geofisici che, come vedremo più avanti, richiedono che il geode sia noto con una precisione migliore di due ordini di grandezza, 2-3 cm, per poter essere correttamente studiati e spiegati.

A noi per ora interessa osservare che l'errore dei modelli di geoidi ha alcune caratteristiche peculiari che dipendono dal modo in cui fino ad ora è stato possibile derivarli.

Infatti essi sono frutto di una faticosa combinazione di dati sulla forma delle orbite di satelliti artificiali, che danno informazione fino a circa grado 50, con dati terrestri, primariamente misure relative <sup>(4)</sup> di accelerazione di gravità  $g$ . Queste ultime in particolare hanno procedure diverse di osservazione per i mari e per le terre emerse e sono state accumulate nel tempo con osservazioni diverse, per calibrazione e precisione degli strumenti, nonché riferite a valori as-

<sup>(4)</sup> Misure assolute di  $g$  si ottengono con apparecchi che fondamentalmente ricostruiscono il moto di caduta dei gravi nel vuoto; le misure relative invece, assai più facili che ottenere, ricostruiscono la variazione della forza peso esercitata su una massa di prova, spostandola tra due punti.

soluti osservati in stazioni diverse. Inoltre le osservazioni disponibili sono molte di più in paesi come il Nord America o l'Europa che in altre nazioni, fino al caso dell'Antartide che solo negli ultimi anni comincia ad essere direttamente osservata. Il risultato finale è che i modelli di tipo (3.5) contengono errori molto variabili da un continente all'altro, con punte che arrivano fino a 6 m nell'Himalaya, mentre restano generalmente attorno al metro in Nord America ed in Europa. In aggiunta naturalmente occorre metter il fatto che un modello del tipo (3.5) non può riflettere il comportamento locale del campo dovuto all'andamento delle disomogeneità delle masse più prossime al punto di calcolo, in primo luogo delle masse topografiche, legate cioè alle ondulazioni della superficie vera della terra. Si pensi ad esempio che un massiccio montuoso di 20 km di raggio e di 2 km di altezza media, produce da solo un'ondulazione di circa 1 m nel geode, pur essendo di dimensioni non risolvibili con la risoluzione di un modello globale.

Naturalmente la parte più locale del campo, si potrebbe pensare a questa come al residuo della serie (3.5) sommando dal grado  $N + 1$  fino all'infinito, può essere più convenientemente modellata con altri mezzi, raggiungendo un'accuratezza dell'ordine di pochi centimetri. Ciò in particolare è vero per la parte «topografica» del campo, per la quale il dato fondamentale è geometrico e costituito proprio dall'altezza della superficie reale della terra rispetto ad una superficie di riferimento. E tuttavia è proprio nel modello globale che sono contenuti errori ancora troppo elevati, dell'ordine di circa 1 ~ 2 m ed è per abbattere tali errori di due ordini di grandezza che nel primo decennio del 2000 si sono progettate delle apposite missioni spaziali che porteranno ad una svolta nella nostra conoscenza del campo di gravità terrestre.

#### **4. – La gravità vista dallo spazio.**

Come si è visto nel paragrafo precedente, la disomogeneità delle osservazioni a terra è uno dei principali fattori che limita la nostra capacità di conoscere modelli globali di gravità con la richiesta risoluzione (diciamo  $\sim 0^\circ,5$ ) e precisione (diciamo  $\sim 2$  cm di errore in

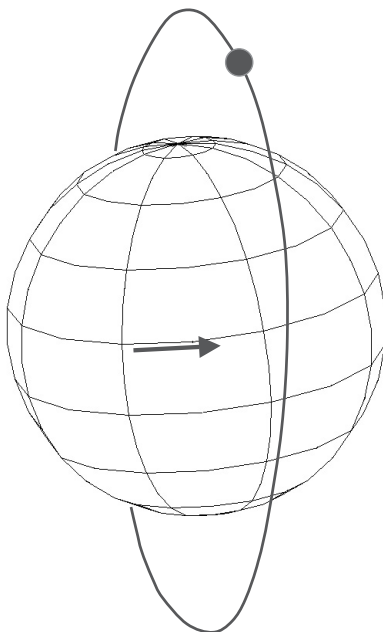


Figura 4.1. – Il moto relativo satellite-terra.

geoide). Tuttavia volendo raggiungere un tale risultato si dovrebbe pensare di ricoprire la superficie terrestre con un reticolato geografico di misure (non ci occupiamo per ora di che tipo di misure si tratta) di fatto almeno di  $0^{\circ},5$ , corrispondente a  $\sim 260.000$  dati. Per garanzia del risultato e per abbattere gli inevitabili errori di misura nelle osservazioni, diciamo che si dovrebbero avere circa un numero 10 volte più grande di osservazioni ben distribuite sulla superficie. Come si può capire non è possibile realizzare ciò con una sola campagna, se non altro per motivi logistici, finché si resta a terra. Ma la cosa cambia drasticamente se ci si mette a bordo di un satellite che vola su un'orbita polare. Diciamo che il satellite abbia un periodo di circa 5000 s; mentre il satellite compie un giro completo, la terra sotto ruota di circa  $21^{\circ}$ , così che la prossima orbita visiterà un'altra zona e così via giro dopo giro. Se il satellite facesse un'osservazione per secondo, in 20 giorni si avrebbero circa le 2.600.000 osservazioni di cui si stava parlando. Se il rapporto tra il periodo del satellite ed il

periodo di rotazione della terra è ben scelto, i dati si distribuiranno con buona uniformità sia in latitudine che in longitudine. In effetti una delle missioni che descriveremo, nei loro termini essenziali, e più precisamente la missione di gradiometria spaziale dell'ESA, GOCE, ha caratteristiche assai simili a queste.

Dunque basare le nostre misure su un satellite artificiale può risolvere il problema della distribuzione omogenea dei dati; ma c'è un prezzo da pagare. Si torni all'espressione (3.5) per il potenziale anomalo e si consideri che ora  $T$ , o una grandezza ad esso collegata, verrà osservato ad una distanza dall'origine pari al raggio  $r$  dell'orbita (che per semplicità supponiamo circolare) su cui il satellite si muove. Come si vede l'azione di ogni singolo coefficiente  $T_{nm}$  è smorzata dal fattore  $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ ; cioè

$$(4.1) \quad (T_{nm})_{\text{orbita}} = T_{nm} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}.$$

Se poi si tiene conto che già gli stessi  $T_{nm}$  decrescono al crescere di  $n$  <sup>(5)</sup> ben si comprende che  $T$  all'altezza del satellite produce un segnale assai smorzato, così che sarebbe conveniente mantenere l'orbita più bassa possibile. Questa esigenza è però a sua volta limitata dal fatto che più bassi si scende più aumenta la densità del lembo esterno di atmosfera con un effetto negativo; il satellite perde energia con l'attrito e quindi tende a cadere, inoltre una maggior densità fa nascere una forza di scuotimento dal satellite (drag atmosferico) rendendo assai più «rumoroso» l'ambiente in cui si effettua la misura, così che diminuisce la precisione. Il primo effetto può essere controbilanciato da una continua correzione d'orbita, che però richiede di sollevare il carburante che sarà poi a poco a poco consumato, limitando la durata della missione. In pratica, con l'attuale tecnologia, è difficile pensare di scendere al di sotto dei 250 km. Quanto al secondo effetto, questo potrebbe essere eliminato imponendo al guscio esterno del satellite di seguire un'orbita che lasci l'apparato interno di misura in caduta libera; naturalmente ciò richiede, oltre a raffina-

<sup>(5)</sup> Una regola grezza, detta di Kaula, stabilisce che i  $T_{nm}$  diminuiscono in ragione inversa al quadrato del grado  $n$ .

te tecniche di controllo, l'uso di una grande quantità di carburante, rendendo molto costosa la missione.

Un'alternativa consiste nel misurare l'effetto del drag ed eliminarne poi l'influenza dalla osservazione per mezzo del calcolo. Prima però di spiegare sommariamente questo procedimento, dobbiamo osservare che c'è anche un altro modo per contrastare l'effetto di smorzamento del segnale dovuto al fatto che le osservazioni sono fatte alla quote del satellite; infatti, tornando sempre all'espressione (3.5), si vede che, derivando ad esempio in direzione radiale, si ha

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{\mu}{R^2} \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n T_{nm} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} Y_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= -\frac{\mu}{R^3} \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n T_{nm} (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} Y_{nm}(\vartheta, \lambda). \end{aligned}$$

Ciò significa che la funzione di trasferimento tra segnale a terra e segnale in orbita, che per  $T$  è data dalla (4.1), diventa invece nel caso della derivata  $\frac{\partial T}{\partial r}$ ,  $(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}$  e nel caso della  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ ,  $(n+1)(n+2)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}$ .

I valori di queste tre funzioni sono mostrati, per  $r = R + 250$  km, per diversi gradi in Tab. 4.1.

Tabella 4.1. – Funzioni di trasferimento dei  $T_{nm}$  per osservazioni di  $T$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$  all'altezza del satellite (250 km).

$n =$	90	180	270	360
$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} =$	$3 \cdot 10^{-2}$	$10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-6}$
$(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+R} =$	2,64	0,16	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$
$(n+1)(n+2)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} =$	233,35	28,72	2,01	0,11

Fissandoci al grado 180 e ricordando la regola di Kaula (vedi Nota 5) si trova che a livello del satellite il rapporto tra l'effetto di

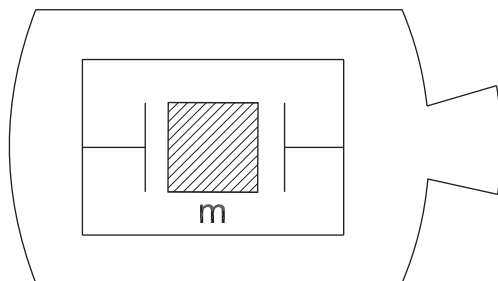


Figura 4.2. – Schema ideale di un accelerometro elettrostatico.

$T_{180,m}$  quello di  $T_{2,m}$  su  $T$  è  $\sim 10^{-7}$ , su  $\frac{\partial T}{\partial r}$  è  $\sim 10^{-5}$ , su  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$  è  $\sim 10^{-3}$ . Questo spiega perché per cercare di raggiungere il massimo di risoluzione del campo si è progettata una missione in cui le osservabili sono direttamente le derivate seconde.

Veniamo ora a descrivere il modo in cui è possibile eseguire su satelliti misure relative al campo di gravità per mezzo di accelerometri. Lo schema a cui faremo riferimento è quello attualmente in uso degli accelerometri elettrostatici, sebbene in futuro si potranno avere strumenti ancor più raffinati e precisi. Supponiamo dunque di avere un satellite  $S$ , di massa  $M$ , nel cui baricentro è posta una massa di prova  $m$  mantenuta in posizione per mezzo di elettrodi e di un circuito capacitivo a reazione che non appena  $m$  tende a scostarsi dalla sua posizione all'interno del satellite, la riporti nella posizione corretta applicando un opportuno voltaggio a due elettrodi (vedi Fig. 4.2); il voltaggio e quindi la forza  $\underline{f}_E$  che il satellite esercita su  $m$  vengono misurati ed i dati inviati a terra. Sia  $\underline{X}$  il vettore che indica la posizione del baricentro di  $S$ . L'equazione fondamentale della dinamica per  $S$  diventa

$$(4.3) \quad M\ddot{\underline{X}} = M\nabla V(\underline{X}) + M\underline{f}_g + \underline{f}_n - \underline{f}_E$$

dove  $V(\underline{X})$  è il potenziale gravitazionale terrestre,  $\underline{f}_g$  sono perturbazioni gravitazionali che agiscono su  $S$  quali l'attrazione luni-solare, le forze di marea indotte dalle deformazioni della terra, tutte forze ovviamente proporzionali ad  $M$ , e facilmente calcolabili,  $\underline{f}_n$  sono le

perturbazioni non gravitazionali che agiscono sul guscio di  $S$ , quali il drag atmosferico e la pressione di radiazione della luce diretta solare e di quella riflessa della terra (albedo). La forza  $\underline{f}_E$  è la forza di reazione di  $m$  su  $S$ .

Analogamente per  $m$ , che pure si trova nella posizione  $\underline{X}$ , avremo

$$(4.4) \quad m\ddot{\underline{X}} = m\nabla V(\underline{X}) + m\underline{f}_g + \underline{f}_E.$$

Notiamo che in (4.4) non compare il termine  $\underline{f}_n$  in quanto le forze non gravitazionali agiscono su  $S$  ma non su  $m$ .

Combinando le (4.3) e (4.4) si trova

$$(4.5) \quad \underline{f}_n = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \underline{f}_E,$$

ovvero la misura di  $\underline{f}_E$  ci dà direttamente  $\underline{f}_n$ . Ora linearizziamo l'equazione (4.4), ponendo

$$(4.6) \quad \underline{X} = \tilde{\underline{X}} + \underline{\xi}$$

dove  $\tilde{\underline{X}}$  è una traiettoria di riferimento che tra breve definiremo meglio, mentre  $\underline{\xi}$  è una piccola perturbazione.

Inoltre poniamo

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \nabla V &\cong -\mu \frac{\underline{X}}{|\underline{X}|^3} + \nabla T(\underline{X}) \cong \\ &\cong -\mu \frac{\tilde{\underline{X}}}{|\tilde{\underline{X}}|^3} - \frac{\mu}{|\tilde{\underline{X}}|^3} (I - 3P_r) \underline{\xi} + \nabla T(\tilde{\underline{X}}) \end{aligned}$$

dove  $P_r$  è una matrice che proietta il vettore  $\underline{\xi}$  in direzione radiale (cioè in direzione di  $\tilde{\underline{X}}$ ) e dove, essendo già  $T(\underline{X})$  una quantità piccola rispetto al termine principale  $\frac{\mu}{|\underline{X}|}$ , si è accettata l'approssimazione

$$T(\underline{X}) \cong T(\tilde{\underline{X}}).$$

Notiamo anche che se l'orbita di di riferimento è pressoché circolare

si può anche scrivere, per la terza legge di Keplero,

$$\frac{\mu}{|\underline{\tilde{X}}|^3} = \frac{\mu}{r^3} \cong \omega^2.$$

Usando le (4.5) e (4.7), dividendo i termini grandi dagli infinitesimi, la (4.4) diventa

$$(4.8) \quad \underline{\ddot{X}} = -\frac{\mu \underline{\tilde{X}}}{|\underline{\tilde{X}}|^3} + \underline{f}_g + \frac{1}{m} \underline{f}_E$$

$$(4.9) \quad \underline{\ddot{\xi}} + \omega^2(I - 3P_r) \underline{\xi} = \nabla T(\underline{\tilde{X}}).$$

La (4.8) può essere integrata perché  $\underline{f}_g$  è, come già detto, ben calcolabile ed  $\underline{f}_E$  è osservata. Così la (4.9) ci dà una relazione esatta tra  $\underline{\xi}$  e  $\nabla T(\underline{\tilde{X}})$ . Ora se  $\underline{X}(t)$ , e quindi  $\underline{\xi}(t)$ , è nota perché osservata, mettendo un ricevitore GPS sul satellite e ricostruendone l'orbita, la (4.9) può essere usata per trovare  $\nabla T(\underline{\tilde{X}})$  (cioè sostanzialmente il vettore di accelerazione anomala di gravità) a partire da  $\underline{\xi}$ .

Naturalmente il procedimento è complicato dal dover calcolare la derivata a seconda di  $\underline{\xi}$  rispetto al tempo, tuttavia ciò è possibile ed una missione congiunta di Francia e Germania basata sullo

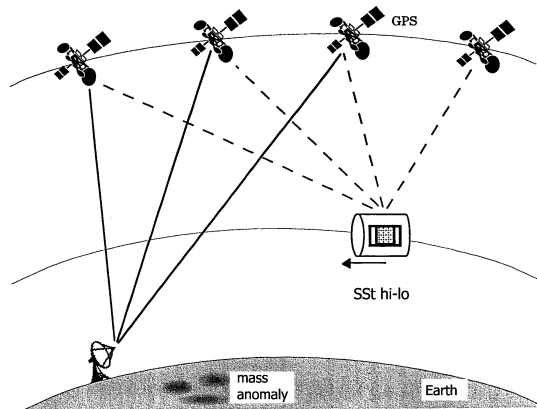


Figura 4.3. – CHAMP.



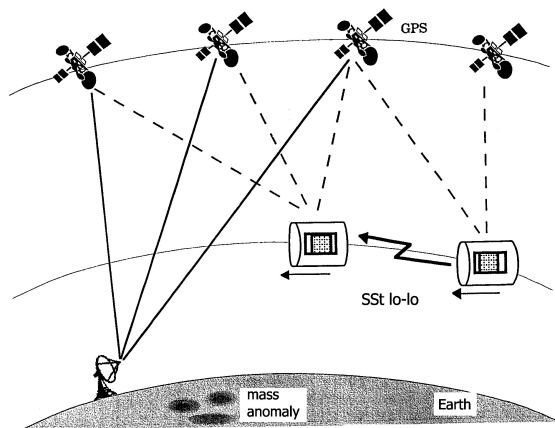


Figura 4.4. – GRACE.

stesso principio, CHAMP, è attualmente in volo, con una durata prevista di 5 anni.

La risoluzione ottenibile con questa configurazione è stimata tra grado 30 e grado 50. Un diverso concetto è quello di accoppiare due satelliti identici che si inseguono sulla stessa orbita ad esempio a circa 30 km di distanza osservando direttamente la posizione relativa dell'uno rispetto all'altro,  $\underline{X}_1 - \underline{X}_2$ , nonché la sua derivata nel tempo. Questo concetto è applicato nella missione della NASA, GRACE, iniziata nel marzo 2002 e che pure dovrebbe volare per 5 anni.

Diverso ancora è il principio della gradiometria spaziale, sviluppato nella missione dell'ESA, GOCE; in questo caso si portano due masse  $m_1, m_2$  nello stesso satellite a breve distanza tra loro (ad esempio 0,5 m). In questo caso il vettore  $\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2$  è noto e fisso rispetto al corpo del satellite; esso quindi varia nel tempo perché segue la rotazione del satellite stesso che però può essere ricostruita guardando da  $S$  il moto apparente delle stelle (*star trackers*). Se ora scriviamo

$$(4.10) \quad (\underline{\xi}_1 \ddot{\underline{\xi}}_2) - \omega^2(I - 3P_r)(\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2) = \nabla T(\tilde{\underline{X}}_1) - \nabla T(\tilde{\underline{X}}_2)$$

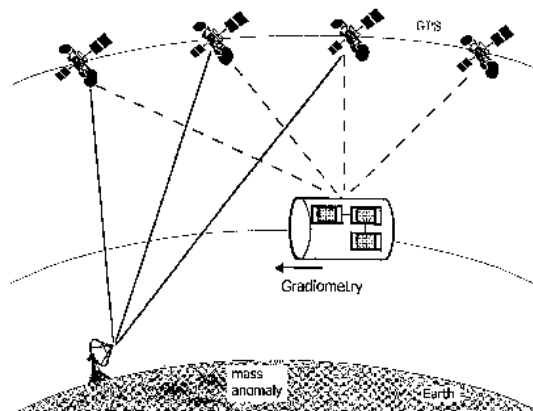


Figura 4.5. – GOCE.

si vede che la conoscenza di  $\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2$  permette di derivare

$$(4.11) \quad \nabla T(\tilde{X}_1) - \nabla T(\tilde{X}_2) \cong D\nabla T(Z) \cdot L$$

dove  $D$  è la derivata in direzione  $\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2$  ed  $\tilde{X}$  è il punto medio tra le due masse ed  $L$  la loro distanza. Dunque la gradiometria rende direttamente disponibili le derivate seconde di  $T$ .

Riassumendo si può formare la seguente tabella:

Missione	Osservabile	Calcolata	Derivata	Risoluzione (grado)
CHAMP	$\underline{\xi}$	$\ddot{\underline{\xi}}$	$\nabla T$	36
GRACE	$\begin{cases} (\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2) \\ (\dot{\underline{\xi}}_1 - \dot{\underline{\xi}}_2) \end{cases}$	$(\ddot{\underline{\xi}}_1 - \ddot{\underline{\xi}}_2)$	$\begin{cases} \nabla T(\underline{X}_1) + \\ -\nabla T(\underline{X}_2) \end{cases}$	120
GOCE	$(\ddot{\underline{\xi}}_1 - \ddot{\underline{\xi}}_2)$	—	$D^2 T(\underline{X})$	> 200

L'ultima missione, la più sofisticata per ora, volerà nel 2005 ed avrà una durata inferiore a 1 anno. I tre concetti di misura sono rappresentati schematicamente nelle Figure 4.3, 4.4, 4.5.

### 5. – Applicazioni.

Presentiamo tre diversi esempi dell'uso che può essere fatto di una buona conoscenza di un modello (3.5) in diversi campi della geofisica e della geodesia: come si vedrà i problemi che si possono affrontare sono di grandissima importanza nei rispettivi campi.

Come si è potuto vedere fin dal primo ragionamento di Newton per la formulazione della legge di gravitazione, ad un campo di gravità dato all'esterno di un corpo non corrisponde affatto un'unica distribuzione di massa che lo genera. Una qualsiasi distribuzione di massa stratificata in una sfera genera un campo esterno equivalente ad una singola massa puntiforme posta nel centro della sfera. Tuttavia, si possono costruire modelli della terra in cui una distribuzione stratificata è considerata come un modello di riferimento in equilibrio, mentre la situazione reale presenta delle anomalie di un tipo che si riflette in modo preciso nelle anomalie del campo di gravità, ovvero nelle ondulazioni del geoide oppure in variazioni locali del vettore accelerazione di gravità, cioè variazioni nel modulo o nella direzione.

Ad esempio è stato proprio esplorando le montagne dell'Himalaya che J.H. Pratt nel 1854 si è reso conto che le masse delle monta-

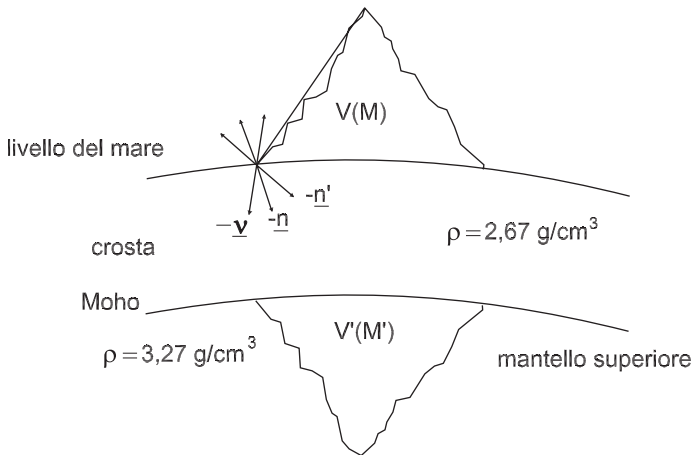


Figura 5.1. –  $\underline{v}$  direzione normale all'ellissoide di riferimento,  $\underline{n}$  direzione della verticale fisica,  $\underline{n}'$  direzione che avrebbe la verticale se la sola massa anomala fosse  $M$ .

gne vicine provocavano sì una deviazione della direzione della verticale, tuttavia l'entità della deviazione stessa  $\underline{n} - \underline{\nu}$  (cfr. Fig. 5.1) era in realtà più piccola di quanto ci si aspettava da un rapido calcolo,  $\underline{n}' - \underline{\nu}$ .

Ciò ha fatto pensare che ci fosse negli strati interni una deficienza di massa che corrispondesse in un certo senso alla presenza della massa  $M$  della montagna. Si formulò così per la prima volta una teoria, detta della *isostasia*, che consiste nel supporre che in corrispondenza ad ogni massa  $M$  sovrastante il livello del mare considerato come livello di equilibrio, vi fosse una radice, sotto un opportuno livello di compensazione, di massa meno densa,  $M'$  in Fig. 5.1, la quale, infilandosi nella parte superiore del mantello, che ha una densità maggiore, provoca una zona  $V'$  di deficienza di massa. Ciò può essere pensato come l'effetto combinato del ristabilimento della superficie di separazione tra crosta e mantello <sup>(6)</sup> in una forma completamente regolare, che corrisponde a riempire  $V'$  di massa a densità  $3,27 \text{ g/cm}^3$  come quelle circostanti, e di una successiva estrazione da  $V'$  di una densità  $\rho = -0,6 \text{ g/cm}^3$ , per portarsi al livello di densità della crosta soprastante. La prima operazione, ripristinando la simmetria sferica, non provoca alcuna variazione locale del campo di riferimento, pertanto le variazioni possono essere viste come causate solo dalla seconda operazione, cioè dalla sovrapposizione di una densità negativa di  $-0,6 \text{ g/cm}^3$ . Nell'ipotesi isostatica, questo volume  $V'$  a densità più bassa produce una spinta di Archimede verso l'alto pari alla massa spostata per l'accelerazione di gravità, cioè a  $0,6 \cdot V' \cdot g$ . Questa spinta compensa il peso aggiuntivo della massa  $M$ , cioè  $2,6 \cdot Vg$ , così che se  $V'$  e  $V$  hanno la stessa base, si ha

$$(5.1) \quad 0,6Vg' = 2,37Vg \rightarrow H' = 4,45 \cdot H$$

dove  $H$  è l'altezza media di  $V$  mentre  $H'$  è l'altezza media della «radice»  $V'$ .

Naturalmente la stessa configurazione produce diversi effetti nel campo di gravità. Ad esempio, se  $V'$  ha una base circolare di 20 km

<sup>(6)</sup> Questa è indicata nella figura come Moho, dal nome del suo scopritore Mohorovic.

di diametro ed un'altezza media  $H$  di 2 km,  $H'$  sarà profonda 8,9 km. Se in più si impone che il livello di compensazione sia 20 km, si può vedere che il geoide subisce una variazione di ondulazione pari a

$$\delta N = 2,01 \text{ m} - 0,44 \text{ m} = 1,57 \text{ m}$$

in cui 2,01 è il contributo di  $M$  e  $-0,44$  quello di  $M'$ . Se si trovasse che l'ondulazione del geoide nella zona risulta ad esempio di 1,79 m, ciò implicherebbe che il difetto di massa  $M'$  sia circa la metà di quello previsto dall'isostasia, così che si deve supporre che l'equilibrio sia mantenuto o a livello dinamico da un flusso che spinge verso l'alto, oppure dal supporto elastico formato dalla crosta. In entrambi i casi l'entità del fenomeno è estremamente interessante: nel primo caso essa fornisce informazioni sulla dinamica viscosa di una zona del mantello superiore detta *astenosfera*, nel secondo caso invece si determina una tensione della crosta che può portare a rotture e di conseguenza a terremoti. In tutti i modi occorre una conoscenza del geoide con una precisione di pochi centimetri per poter trarre conclusioni attendibili sul meccanismo geodinamico che giustifica la sussistenza di una montagna (orogenesi). Facciamo ora un cenno alle applicazioni di tipo oceanografico. Qui il problema sta nel fatto che la dinamica degli oceani, depurata dai movimenti a cortissimo periodo (moto ondoso) o a corto periodo (maree) presenta tra l'altro un'insieme di correnti quasi stazionarie come la corrente del Golfo o la corrente Kuroshio, quelle circumpolari, ecc., che hanno una grandissima importanza sulla ridistribuzione delle temperature in varie zone del pianeta. La vera origine fisica di tali correnti è tuttora oggetto di dibattito; in particolare non è chiara la sorgente di energia che ne mantiene il moto. Tuttavia è ben noto che queste correnti producono dei leggeri rigonfiamenti nella superficie media del mare (depurata cioè dai moti di breve periodo) rispetto ad una superficie equipotenziale, cioè il geoide. La superficie media del mare è ricavabile di nuovo da osservazioni spaziali, dette di radaraltimetria, con una precisione di pochi (2 ~ 3) centimetri. Dunque una conoscenza del geoide di pari precisione consentirebbe di descrivere la forma di questa circolazione stazionaria di correnti oceaniche con la dovuta accuratezza per trarne indicazioni attendibili sulla evoluzione del

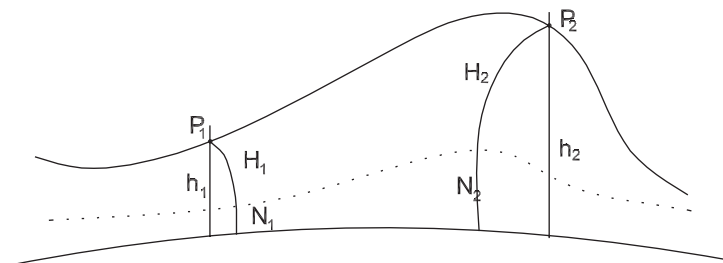


Figura 5.2. – Il principio della livellazione GPS.

clima. Per avere un ordine grandezza, osserviamo che 1 m di elevazione della superficie media del mare sul geoide, nella corrente del Golfo, è il sintomo di un flusso di 30 Sverdrup (milioni di metri cubi al secondo), così che un errore maggiore del 3% nei parametri che descrivono tale circolazione non sarebbe accettabile.

Da ultimo segnaliamo una fondamentale applicazione di tipo geodetico cartografico della conoscenza del geoide.

Osserviamo infatti che oggi sono in uso contemporaneamente due coordinate di altezza: una,  $h$ , rappresenta l'altezza del punto  $P$  su un ellissoide di riferimento, l'altra invece,  $H$ , rappresenta la quota sul geoide calcolata lungo la linea della verticale fisica per  $P$  (cfr. Fig. 5.2).  $H$  è comunemente nota come quota sul livello del mare.

Il punto è che oggi è possibile ottenere velocemente  $h_1 - h_2$  anche per punti distanti centinaia di chilometri, con precisione centimetrica, per mezzo di osservazioni GPS. In realtà si può ottenere anche  $H_1 - H_2$  con operazioni molto lunghe e costose, che danno però una precisione di pochi millimetri.

Se  $N_1 - N_2$  è noto con precisione comparabile a quella della misura di  $h_1 - h_2$ , si può evitare di misurare  $H_1 - H_2$ , calcolando direttamente

$$(5.2) \quad H_1 - H_2 = (h_1 - h_2) - (N_1 - N_2),$$

operazione che viene definita *livellazione GPS*. Moltissime sono le applicazioni di tale formula per le quali una precisione di pochi centimetri è più che sufficiente, basti pensare ad esempio al tracciamento di strade, la progettazione di canali, la posa di oleodotti, ecc.

Concludendo è necessario citare che queste tecniche spaziali, che nei prossimi anni ci daranno una conoscenza grandemente accresciuta del campo di gravità terrestre, ancor più sono essenziali per il futuro dell'esplorazione dallo spazio del sistema planetario solare. In effetti è impensabile che in futuro lo studio dei pianeti del sistema solare venga effettuato con lente e costose operazioni al suolo, quando sono disponibili tecniche come quelle qui descritte. In particolare appare evidente che l'esplorazione della luna non potrà che essere condotta in questo modo, visto che per il nostro satellite tra l'altro non vi sono problemi di atmosfera e quindi un satellite artificiale potrebbe seguire un'orbita a bassissima quota sulla superficie.

## REFERENCES

- [1] N. FEATHER, *Mass length and time*, Edinburgh University Press (1959).
- [2] C. M. R. FOULER, *The solid earth: an introduction to global geophysics*, Cambridge University Press (1990).
- [3] W. A. HEISKANEN - H. MORITZ, *Physical geodesy*, Institute of Physical Geodesy (1967), Graz. Reprint 1999.
- [4] J. A. JOHANNESSEN - M. AGUIRRE MARTINEZ, *Gravity field and steady-state ocean circulation mission*, ESA Publ. Division Estec Noordwijk (1999).
- [5] W. M. KAULA, *Theory of satellite geodesy: applications of satellites to geodesy*, Blaisdell Pub. Co., Waltham Mass.
- [6] J. PEDLOSKY, *Ocean circulation theory*, Springer-Verlag (1996).
- [7] R. RUMMEL - F. SANSÒ eds., *Theory of satellite geodesy and gravity field determination*, in: Lecture Notes in Earth Sciences, 25, Springer-Verlag (1989).
- [8] P. VANICEK - N. T. CHRISTOU, *Geoid and its geophysical interpretation*, CRC Press (1994).

F. Sansò, DIIAR, Politecnico di Milano  
P.zza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano