BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Salvatore Coen

RECENSIONE. Cominciamo da Zero. Autore: Vinicio Villani, collana «Complementi di Matematica per l'indirizzo didattico» N. 12, Pitagora Editrice, 2003

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.1, p. 173–183.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_1_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Aprile 2004, 173-183

RECENSIONI

***Cominciamo da Zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica* (*Aritmetica ed Algebra*)** di Vinicio Villani, collana «Complementi di Matematica per l'indirizzo didattico», N. 12. Pitagora Editrice Bologna, 2003, pp. 216, € 17.

Recensione di SALVATORE COEN

I capitoli del libro sono trentacinque, tutti brevi: raramente raggiungono le dieci pagine. Questo vuole essere un libro dei perché. Coerentemente con questo proposito i titoli sono tutti posti in forma interrogativa (un modo originale e moderno di esporre che ha tuttavia qualcosa d'antico; ricordiamo vecchi libri con capitoli dal titolo «Come potrà il nostro eroe sfuggire ai selvaggi cannibali ?»...)

Il titolo è curioso: *Cominciamo da Zero.* Dobbiamo osservare che il termine «Zero» è scritto con la maiuscola. Ciò (forse) significa che nel volume la materia deve essere esposta a partire dai numeri naturali e che questi è bene che abbiano come primo elemento lo zero (...*per dare maggiore uniformità e generalità ai calcoli aritmetici e soprattutto a quelli algebrici*...). Del resto, il primo capitolo si intitola *Zero è un numero? Perché?* Non crediamo, tuttavia, che all'Autore sia sfuggito il fatto che un siffatto titolo può essere letto con altro significato. Il volume, impostato sull'esposizione dei perché dell'aritmetica e dell'algebra «elementari», non ha certo molti precedenti. Effettivamente i libri di divulgazione mirano ad esporre il «cosa», quelli didattici il «come» ed entrambe le categorie non sviluppano nella gran parte dei casi il «perché». Questo volume potrebbe segnare (vedremo che, a nostro avviso, ha tutti i requisiti di contenuto per farlo) una svolta significativa. Si tratta di *cominciare da zero* un nuovo metodo di esposizione. Non insistiamo con questa interpretazione perché, per quel tanto che conosciamo l'Autore, questi mai ci darebbe la soddisfazione di farla sua.

Vedremo più avanti quali sono i naturali fruitori di questo volume.

Diamo una esposizione sommaria del piano generale del volume.

La prima parte di esso è dedicata all'aritmetica. Un capitoletto è dedicato al problema dell'attualità della teoria delle proporzioni. Seguono le risposte ad una serie di domande sui sistemi numerici. Dopo un capitolo sul calcolo letterale, vari capitoli sono rivolti allo studio della teoria dei polinomi (a coefficienti negli anelli numerici conosciuti dal lettore $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Ci si pone poi il problema di comprendere che cosa significhi l'equivalenza tra due equazioni o due sistemi o due disequazioni. Ci si domanda, in seguito, come si può operare con le frazioni algebriche. I capitoli finali sono dedicati a questioni logiche e semantiche, sempre sulla base dei problemi che si presentano nella didattica della matematica. L'ultimo, interrogandosi sul ruolo di assiomi, definizioni, teoremi, … prospettiva storica nell'insegnamento – apprendimento nelle scuole secondarie, affronta ed offre soluzioni ad alcuni dei problemi di fondo della didattica della matematica nelle scuole secondarie. Il libro si conclude con una post-fazione dove l'Autore ripensa e giustifica quanto ha fatto, prevenendo critiche ed osservazioni. Una post-fazione che, forse, potrebbe sostituire utilmente la recensione che stiamo cercando di fare.

Dalla esposizione sommaria del contenuto, però, non è possibile comprendere lo spirito di questo libro. Occorre un'analisi più dettagliata anche se questo significa richiedere un poco di pazienza a chi ci legge.

Nell'ambito dei capitoli-domanda sull'aritmetica, consideriamo qualche esempio. Quale è – domanda l'Autore – il successivo di 72185609? La domanda sembra talmente ovvia che alcuni lettori potrebbero essere portati a saltare il capitolo. Così non avrebbero modo di rendersi conto di quanto «stupefacente» sia il conoscere facilmente la risposta. «*Soffermiamoci per un attimo a riflettere: siamo stati in grado di individuare senza esitazione l'espressione deci-*

male, cioè il "nome proprio" del successivo di un numero mai visto prima! E lo stesso varrebbe per ogni possibile numero naturale, pur essendo $\mathbb{N}$ un insieme infinito!» Provi il lettore a determinare il vocabolo che segue «casa» in un dizionario della lingua italiana o a ricordare il papa che segue a Leone X. Questo spinge a esaminare bene quale è l'algoritmo (applicato senza tanto pensarci) della determinazione del successivo in $\mathbb{N}$. Quando ciò è chiarito, si comincia a chiarire la natura della notazione posizionale dei naturali e questo porta nuove domande e V. Villani (V. V. nel seguito) è contento perché ha raggiunto il suo scopo. Nel capitolo seguente, in un processo di prolungamento naturale, si risponde alle domande sulle procedure di calcolo per le operazioni di somma, sottrazione e moltiplicazione in colonna. La domanda che sovente ci viene fatta dai ragazzi o anche dai bambini che vogliono capire qualcosa sui negativi: *Perché meno per meno fa più?* ottiene finalmente una risposta semplice (la regola dei segni è l'unica che permette di estendere le operazioni di somma e prodotto dai naturali agli interi mantenendo le proprietà formali fondamentali (la struttura di anello)). V. V. fa' piazza pulita di certe giustificazioni inconsistenti, anche se bisogna ammettere che se la risposta può essere compresa da ragazzi, per i bambini la risposta rischia di essere il vecchio e pericoloso: «Te lo spiegherò quando sarai più grande».

È un dato di fatto che nei corsi universitari non si parla quasi mai di **numeri decimali**. Come mai? A livello di scuola secondaria, il problema è uno dei capitoli- domanda del libro: *Nelle applicazioni della matematica si usano quasi esclusivamente numeri decimali finiti. Perché invece i matematici non amano l'insieme di questi numeri, al punto di non avere avvertito l'esigenza di introdurre un simbolo specifico … per denotarlo?* Questa è una domanda che può fare pensare i giovani e che permette l'introduzione di concetti che normalmente i nostri corsi secondari non trattano. Operare con i decimali non è del tutto facile ed ecco quindi un capitolo che, sulla base di esperienze varie, elenca gli errori nei quali si incorre più comunemente e cerca di esaminarne le ragioni, al fine di migliorarne la trattazione nell'ambito delle secondarie.

Tutti i nostri lettori sanno bene che l'introduzione del campo ordinato dei **numeri reali** presenta grandi difficoltà, a livello secondario (e non solo). La maniera di introdurre i reali attraverso la nozione di sezione in campo razionale o di classi contigue, tradizionale nelle nostre scuole, è, a livello scientifico, ineccepibile. In una visione «storicizzata» della matematica questo approccio è pure ineccepibile; in una visione unitaria della matematica questo metodo tanto significativo anche sul piano geometrico, è ineccepibile. Purtroppo sembra eccepibile sul piano didattico. Libri su libri scolastici hanno adottato per decenni questo approccio, con esiti didattici deludenti. Ora, le cose sono cambiate; nei corsi universitari di matematica spesso si tralascia il problema della «costruzione» dei reali e si opta per una introduzione assiomatica. Chi scrive ha molte perplessità su questa strategia; il lungo elenco degli assiomi rischia di essere solo un pesante elenco di pochissimo significato per chi legge. A maggior ragione, se l'approccio «classico» costruttivo è ben poco capito, un elenco degli assiomi cui devono soggiacere i numeri reali rischia di fare piangere di noia i giovani delle secondarie.

Che fare? Si sarebbe portati a dire che il capitolo sui reali è il punto dolente dell'insegnamento secondario superiore della matematica. Il nostro Autore segue un procedimento diverso da entrambi quelli che ora abbiamo delineato. Egli, conformemente ad un uso che si sta attualmente affermando, introduce i numeri reali col metodo degli allineamenti decimali. In un mondo in cui il sistema decimale è largamente prevalso e la gran parte delle volte si esprimono le misure mediante decimali, questo è un metodo che ha certamente il grande vantaggio di essere naturale, nel senso di poter essere accettato senza traumi dai lettori (siano studenti delle secondarie che giovani dei primi anni universitari). Le difficoltà sono ben note: il previlegio accordato al numero 10 come base di numerazione, e, soprattutto, la difficoltà di definire correttamente le strutture d'ordine e le operazioni algebriche elementari. Ed è qui che, forse, l'Autore fa il massimo sforzo, cercando di trasformare questo pesante handicap in un fatto positivo. Infatti, la definizione delle proprietà d'ordine ed algebriche sull'insieme degli allineamenti (decimali o no) lo porta, come egli stesso dice a dedicare *particolare attenzione alle problematiche del calcolo approssimato*. È più che una particolare attenzione. Si tratta di varii paragrafi che servono a delucidare una serie di concetti, usati, nel linguaggio comune, con terminologia piuttosto confusa. Le nozioni di «cifre esatte», di «cifre significative», di «troncamento», di «arrotondamento», di «errore» (o «precisione»), di «propagazione degli errori» sono introdotte con definizioni rigorose, regolarmente esemplificate e, soprattutto, ampiamente «discusse» sempre con il metodo socratico delle domande (del tutto socratico non è perchè qui è l'Autore che risponde, ma, anche nel caso classico, credete veramente che fosse Menone a rispondere a Socrate ?).

Altri concetti devono allora essere introdotti fino a giungere a parlare di propagazione degli errori, battendo sempre sull'affermazione che *conoscere un numero reale significa disporre di un algoritmo che consenta di calcolarne un numero arbitrariamente alto di cifre decimali esatte* e mostrando man mano quanto impegnativa sia questa definizione. Così i lettori percepiscono in modo concreto le difficoltà che si trovano dietro certe definizioni più o meno naturali e ne traggono insegnamento per comprendere meglio le leggi che regolano il sistema numerico con il quale hanno continuamente a che fare. Non basta; il capitolo 16 si intitola così: *Perché le formule per la propagazione degli errori usate in matematica differiscono da quelle usate in fisica e nelle altre scienze sperimentali*? Così vediamo apparire le nozioni di scarto quadratico medio, errore standard della media, intervalli di confidenza, … Si noti che abbiamo cominciato da Zero e ci troviamo, dopo un centinaio di pagine, a «ragionare in termini di valutazioni probabilistiche». L'Autore non è ancora soddisfatto di quanto ha detto sui numeri reali e continua con un capitolo sulle *relazioni tra i numeri della matematica e i numeri delle calcolatrici e dei computer*. È questo uno dei capitoli più innovativi del libro e può essere assai utile agli insegnanti; «*trovo particolarmente stimolante*- scrive V.V. – *e formativo individuare e discutere analogie e differenze tra il funzionamento della mente umana e quello degli strumenti di calcolo elettronico*» Un computer adeguatamente programmato può calcolare un altissimo numero di cifre decimali di π, ma non sa decidere se π è un irrazionale algebrico o trascendente. «La mente umana, invece, si».

È da domandarsi se questo metodo per introdurre i numeri reali sia effettivamente più semplice di quello usato in una introduzione classica costruttiva. Il problema non è ben posto se non si chiarisce a quali lettori ci si rivolge. Per gli studenti dei primi anni universitari di una facoltà scientifica (e chi ci legge ha ormai compreso che V.V. si volge anche a questa categoria di lettori, pur senza dirlo in termini espliciti), quando questi abbiano acquisito un minimo di terminologia algebrica, ho l'impressione che non sia da dare per scontato che le «vecchie» sezioni razionali di Dedekind pur con le loro operazioni e relazioni d'ordine abbastanza noiose siano più ostiche degli allineamenti decimali con tutto il loro armamentario di calcolo approssimato. Anzi. Direi, tuttavia, che proprio qui sta l'interesse del metodo sviluppato dall'Autore, perché con tale metodo vengono a galla una serie di difficoltà, interessanti e «concrete», la cui risoluzione è già di per sé significativa. Il metodo permette di affrontare il tema dei reali con linguaggio elementare ed adatto a studenti delle scuole secondarie, ma si illuderebbe chi credesse che tale lettura fosse facile. Il problema didattico posto dalla introduzione e dal primo studio dei reali va' affrontato in modo diverso a seconda degli interessi e del livello di preparazione degli studenti; è importante avere chiaro che di scappatoie non ce ne sono. Si tratta di un argomento che richiede tempo e forse andrebbe affrontato in più stadi, cioè in tempi diversi sulla base delle conoscenze man mano acquisite dai discenti.

Nell'insegnamento liceale della matematica, la geometria euclidea ha sostenuto il ruolo principale. Le influenze storiche e la tradizione hanno giocato certo un loro ruolo nell'imporre programmi ad un mondo piuttosto tradizionalista come è quello dei docenti di matematica. Non è questo, a nostro avviso, il motivo principale. La bellezza di questa disciplina, il suo evidente e straordinario ruolo di palestra di ragionamento hanno tradizionalmente, in qualche modo, sopraffatto l'**algebra**. Questa, spesso intesa come un insieme neanche tanto omogeneo di regole pareva ai giovani meno interessante, meno impegnativa, un insieme di regole atte a risolvere problemi concreti, basata sul cosiddetto «calcolo letterale», naturale generalizzazione dell'aritmetica elementare (secondo il motto ampiamente qui esaminato: *in algebra si opera con le lettere come in aritmetica con i numeri*).

Tale modo di introdurre l'algebra V.V. lo giudica nettamente negativo. Si potrebbe dire che V.V. desse ragione allo scarso entusiasmo verso una tale algebra manifestato spesso proprio dai giovani più interessati alla matematica. Sentiamo cosa dice V. V. (nel capitolo 22). «*In genere i testi scolastici iniziano con la definizione di monomio, proseguono specificando cosa si debba intendere per monomi simili e infine introducono la nozione di polinomio definendolo come somma di due o più monomi non simili. Orbene, tale definizione è inaccettabile. Ho già avuto modo di dire che una definizione di per se stessa non è corretta o sbagliata. Si richiede però che la definizione non sia ambigua e che nel seguito della trattazione il termine introdotto venga utilizzato sempre e solo coerentemente col significato codificato dalla definizione.*» Non gli è difficile dimostrare che la definizione precedente non soddisfa nessuno dei suddetti requisiti. Rispetto a qualche decina di anni or sono, noi abbiamo il vantaggio che ora è abbastanza diffusa la capacità di identificare ed usare, nell'ambito di enti matematici, le più semplici strutture algebriche. L'Autore è ben conscio di questo fatto. Almeno otto capitoli sono dedicati alla teoria dei **polinomi** a coefficienti in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). I temi che l'Autore tratta sono principalmente *il teorema d'identità dei polinomi*, il *teorema di fattorizzazione unica e ricerca del MCD e del mcm tra due polinomi*, *i polinomi irriducibili*, *formule risolutive per le equazioni polinomiali*, *regola di Ruffini*, *metodo per il calcolo approssimato delle radici dei polinomi*, *polinomi in più variabili*. Evidentemente si va oltre i programmi tradizionali; principalmente si va per una strada diversa. Per esempio, il teorema di identità dei polinomi è ottenuto come conseguenza del teorema della radice, dimostrato mediante ripetute applicazioni del teorema di divisione euclidea. Il teorema della fattorizzazione unica dei polinomi lo porta alla nozione di polinomio irriducibile. Il procedimento euclideo delle divisioni successive porta all'algoritmo per il calcolo del **MCD** e quindi del **mcm**. Il tutto è sempre illustrato da esempi significativi e in questi capitoli, come si è visto, l'Autore entra anche in qualche particolare tecnico delle dimostrazioni ed insiste giustamente più volte sulla necessità di stabilire l'ambito numerico nel quale si cercano radici o fattorizzazioni dei polinomi, stigmatizzando ancora una volta certi libri scolastici «che falsano la situazione proponendo esercizi nei quali la fattorizzazione in $\mathbb{Z}[X]$ o in $\mathbb{Q}[X]$ è sempre possibile» La nozione di risolubilità per radicali è introdotta facilmente per spiegare il teorema di Ruffini-Abel, il tutto inquadrato brevemente in una discussione storica. Ma l'insistenza sulla regola di Ruffini, tradizionale nelle nostre scuole, V.V. non l'accetta. Le ragioni sono motivate con grande scrupolo; V.V. ritiene più formativo «*...il tradizionale algoritmo della divisione con resto di due polinomi in un programma di calcolo (per esempio in Pascal...)*». È ripetuto insistentemente l'invito quando i calcoli a mano non siano agevoli, a ricorrere ad una calcolatrice o ad un «computer debitamente programmato». Così si vede anche indirettamente che lungi dall'evitare l'uso del computer, l'Autore lo auspica, ma ancora una volta quando e solo quando questo sia fatto in modo critico.

La trattazione dei polinomi in una sola lettera è condotta con particolare rigore e con uno spiccato senso della concretezza, con insistenza sugli algoritmi da usare. La trattazione si conclude con il capitolo dal titolo significativo: «*dato un polinomio $P(x)$ di grado qualsiasi, a coefficienti reali, è possibile determinare con una precisione prefissata i valori numerici delle sue (eventuali) radici reali, ricorrendo ad opportuni procedimenti di calcolo numerico approssimato?*» Questo è uno dei capitoli più impegnativi per l'Autore ed anche per il lettore. Il problema è spezzato in quattro diversi problemi di ciascuno dei quali si specificano i metodi più agevoli da impiegare, nell'ambito delle possibilità degli studenti delle secondarie. Si comincia ad osservare che la determinazione di un intervallo reale nel cui interno cadano tutte le soluzioni è un problema perfettamente alla portata degli studenti di certe nostre scuole secondarie; poi è opportuno studiare il numero delle radici reali distinte che cadono in un intervallo reale dato e studiare il problema di suddividere l'intervallo dato in intervallini di ampiezza minore della precisione prefissata e tali inoltre che in ognuno di tali intervallini cada al più una radice reale. Questi ultimi due problemi non si prestano bene ad una esposizione per le secondarie, ma «*se tradotti in un pro-*

gramma per un computer possono essere utilizzati per svolgere qualche esercizio significativo». Una trattazione di questo respiro permette di dare qualche nozione sui polinomi in più lettere e di vedere, per esempio, nell'ambito dei teoremi di fattorizzazione i cosiddetti «prodotti notevoli».

Negli ultimi capitoli molte indicazioni sono dedicate alla nomenclatura usuale per cercare di individuare i significati evidenziando le differenze tra i termini: *costante, variabile, indeterminata, incognita, parametro*... e lo stesso si fa a livello diverso per termini come *definizione*, *postulato, assioma, legge, regola, criterio, principio,* ...

Anche il capitolo della postfazione è impostato a domande e risposte. Le domande sono quelle che i critici potrebbero rivolgere al libro o che hanno già rivolto in sede di stesura; le risposte si rifanno sempre a principi generali che sono gli stessi principi didattici che vengono consigliati lungo tutto il testo; insomma questo stesso testo è un esempio di applicazione delle idee di V.V. sulla didattica.

È evidente che questo libro è un libro della maturità. Cerco di essere più preciso. Villani da molti anni lavora sia da studioso e ricercatore, sia in posizioni di grande responsabilità nell'ambito della didattica della matematica. Pertanto, egli ha avuto modo di giungere ad una visione di largo respiro dei problemi della didattica secondaria e di dare contributi a questa, di grande importanza. Un curriculum di questo tipo non sarebbe a nostro avviso sufficiente a scrivere un libro come questo, se non attraverso una visione matematica generale, ottenuta in lunghi anni di ricerca scientifica (di carattere non didattico) in varii campi. Questo ha permesso quella matura visione globale che gli fa introdurre, con naturalezza, quando il caso, metodi di aritmetica, algebra, logica, analisi numerica, teoria dei numeri... quando opportuni e per quel tanto (difficile da determinare) che si rivela utile ai lettori. Qui sta la svolta di cui parlavamo all'inizio di queste righe.

Il testo, in quasi tutti i capitoli, è costellato di osservazioni particolari o anche di carattere generale che, se comprese, potrebbero rivelarsi utilissime per chi la matematica deve imparare ad insegnarla. Per esempio, parlando della divisione, ecco cosa si dice: *L'uso di* *uno stesso segno «.» per indicare la* divisione con resto *(tra numeri naturali ed interi) e la* divisione esatta *(tra numeri interi, naturali e razionali, ma col quoziente solo eccezionalmente naturale od intero) può essere fonte di malintesi. Per evitare questa ambiguità, le notazioni usate dagli strumenti di calcolo elettronico sono più specifiche. Per esempio, nel linguaggio di programmazione PASCAL la divisione* esatta *di* a *per* b *viene denotata col segno* «a/b», mentre i comandi per la divisione con resto *sono rispettivamente* a DIV b *per il quoziente* e a MOD b *per il resto*. Così i metodi di programmazione sono usati per chiarire un delicato concetto matematico. Dove si parla dell'algebra, si dice (cap. 21): … *per padroneggiare il calcolo letterale sono indispensabili due diversi tipi di abilità: quella formale di saper manipolare correttamente le espressioni algebriche e quella strategica di saper scegliere di volta in volta la direzione più opportuna…*», quando spesso la necessità di una tale strategia non appare nemmeno nell'insegnamento.

Non si creda, però, che la lettura di questo libro possa essere del tutto agevole. A nostro avviso i capitoli non vanno letti, ma studiati e ristudiati.

A chi può essere utile il libro? Anzitutto, naturalmente, a coloro cui è esplicitamente indirizzato, cioè a coloro che vogliono apprendere ad insegnare la matematica nelle secondarie (come sono oggi i corsisti delle cosiddette SSIS). Poi, certamente, a chi la matematica nelle secondarie già la insegna. Poi anche ai maestri elementari. L'utilità maggiore a nostro avviso, dovrebbe presentarsi nella possibilità di inquadrare gli argomenti, vari e spesso incoerenti, dei programmi nel loro naturale ambiente matematico. Per esempio, avere spunti per scrivere programmi di calcolo come esercizio di matematica, lo studio delle varie nozioni di propagazione degli errori, anche solo il comprendere che i prodotti notevoli hanno a che fare con il problema della fattorizzazione dei polinomi in più lettere, … sono tutti temi che possono essere autentiche illuminazioni per chi legge.

È chiaro, d'altronde, che scrivendo queste note l'Autore aveva davanti agli occhi anche i problemi che si presentano agli studenti dei primi anni delle facoltà scientifiche nell'apprendimento della matematica ed anche a questi studenti il libro dovrebbe essere, ad avviso di chi scrive, caldamente raccomandato. Anche studenti degli ultimi anni delle secondarie potrebbero trarre giovamento dalla lettura per sviluppare la loro fantasia matematica.

Come leggere *Cominciamo da Zero*? Dipende dalle conoscenze del lettore. Non mi sembra, per esempio, adatto ad una lettura dall'inizio alla fine (forse proprio perché comincia da zero...), a meno che questo non venga fatto usando il libro come libro di testo per corsi di didattica matematica, ma con un docente dal polso fermo. Il libro è assai indicato ad una lettura più frammentata, non dico che debba essere consultato come un dizionario matematico, ma che, individuato il problema che si vuole chiarire, il libro può dare risposte esaurienti, attraverso la lettura di un certo insieme di suoi capitoli e soprattutto che esso può, in questo caso, stimolare ad altre domande.