
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

NICOLA PAROLINI, ALFIO QUARTERONI

Simulazione numerica per la Coppa America di vela

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2004), n.1, p. 1–15.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_1_1_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_1_1_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Simulazione numerica per la Coppa America di vela.

NICOLA PAROLINI - ALFIO QUARTERONI

1. – Introduzione.

La Coppa America di vela rappresenta il piú antico trofeo sportivo del mondo. La prima edizione si svolse nel lontano 1851 presso l'isola di Wight in Inghilterra. Le regate di Coppa America sono ferocemente competitive. Anche dopo una gara di alcune ore, le due imbarcazioni possono tagliare il traguardo con solo pochi centimetri di distanza.

A differenza che in applicazioni industriali (quali ad esempio il progetto di velivoli o di autoveicoli), dove ampi margini di sicurezza devono essere adottati, per puntare alla vittoria della Coppa America è necessario ottenere performance estreme. I progettisti devono effettuare analisi le piú accurate possibili in modo da assicurare che le loro imbarcazioni possano ottenere la vittoria senza oltrepassare i limiti di resistenza strutturale.

La 31^a edizione della Coppa America svoltasi da Ottobre 2002 a Marzo 2003 a Auckland, in Nuova Zelanda, è stata vinta dal Team Svizzero Alinghi (fig. 1). Nel luglio 2001 il sindacato svizzero di Alinghi ha chiesto all'EPFL, l'Ecole Polytechnique Fédérale di Losanna, di assumere il ruolo di consulente scientifico ufficiale di Alinghi. Alcuni ricercatori dell'EPFL, operanti in particolare nel dipartimento di scienza dei materiali in tecnologia dei polimeri e nel dipartimento di matematica in modellistica numerica e calcolo scientifico, hanno aiutato il design team di Alinghi (costituito da una decina di ingegneri) a valutare materiali di tipo commerciale, sviluppare e sperimentare nuovi compositi e nuovi metodi di indagine, modellare e simulare gli aspetti aerodinamici, idrodi-



Fig. 1. – Due barche del Team Alinghi (SUI59 e SUI64) durante un allenamento (foto T. Martinez/Alinghi Team).

namici e strutturali di nuove configurazioni di barca e selezionare quelle con prestazioni ottimali.

Una barca della classe «Coppa America» è costituita di varie componenti: lo scafo, la chiglia e il bulbo, ed altre «appendici» quali le alette (o *winglets*) e il timone e, naturalmente, nella parte fuori dall'acqua l'albero e le vele (la randa, il genoa ma anche lo spinnaker e il gennaker, da usare in diversi regimi di regata). Si vedano a titolo di esempio le fig. 2 e 3.

Sino ad una ventina di anni fa, le diverse squadre di progettisti sviluppavano forme assai diversificate di scafi, bulbi e chiglie. Oggi le diverse forme geometriche hanno raggiunto una standardizzazione piuttosto uniforme, ed anche i più piccoli dettagli possono fare la differenza in termini di risultati. Jerome Milgram, professore del MIT e veterano nella consulenza ai team di Coppa America, ha affermato prima dell'inizio dell'ultima competizione

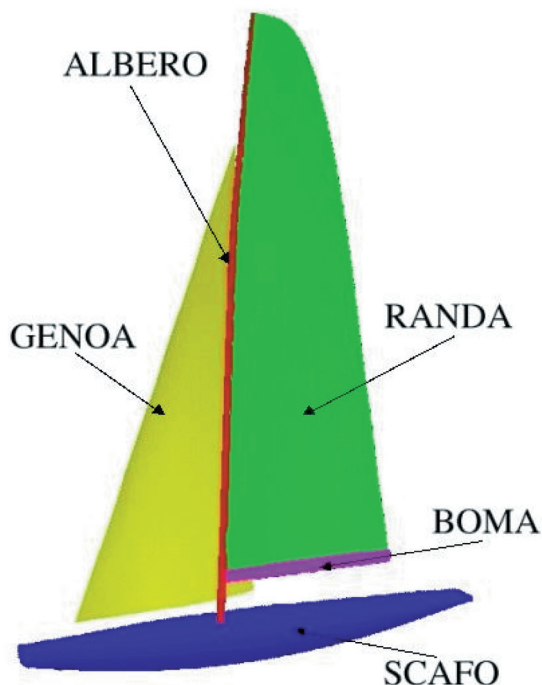


Fig. 2. – Componenti aeree di una barca di classe «Coppa America».

«Gli yachts di Coppa America richiedono una estrema precisione nel design dello scafo, delle parti in acqua e delle vele. Un nuovo scafo che offra una resistenza all'onda ridotta dell'1% può assicurare un guadagno di 30 secondi sulla linea d'arrivo.»

Per ottimizzare le prestazioni di uno scafo si devono ovviamente risolvere le equazioni della dinamica dei fluidi intorno all'intera barca, tenendo conto delle innumerevoli condizioni di regata, quali ad esempio la variabilità di venti e onde, dei diversi regimi di regata (di poppa piuttosto che di bolina), della posizione e del movimento della barca avversaria. Ma va considerata anche la dinamica dell'interazione fra componenti fluide e strutturali (acqua e parti sommerse, aria e vele ed albero). Infine, va modellata con grande accuratezza la forma ed il moto della cosiddetta superficie libera, ovvero dell'interfaccia di separazione fra acqua ed aria.

Idealmente, un modello completo dovrebbe essere in grado di ri-

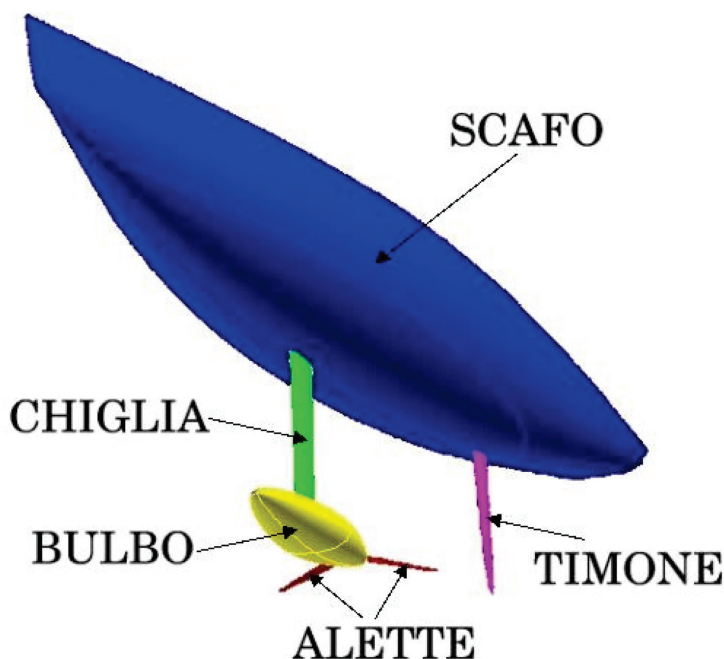


Fig. 3. – Componenti immerse di una barca di classe «Coppa America».

produrre diversi aspetti fisici del problema in oggetto. Da un lato, per la simulazione della fluidodinamica dovrebbe tenere conto degli effetti viscosi, della transizione fra flusso laminare e flusso turbolento, della generazione dell'onda sulla superficie libera. D'altro lato, dovrebbe saper calcolare le deformazioni strutturali che sono assai significative per via dei carichi estremi agenti sullo scafo (sino a 20 tonnellate), sull'albero e sulle vele.

2. – Il problema matematico e la sua complessità.

Denotiamo con Ω la regione tridimensionale in cui vanno risolte le equazioni del fluido. Dal punto di vista computazionale, Ω è la regione esterna alla barca nella sua configurazione completa, qui indicata con B , e racchiusa all'interno di un parallelepipedo di dimensioni $300 \text{ m} \times 200 \text{ m} \times 180 \text{ m}$ che delimita il dominio di calcolo. Ovviamente alla frontiera (fittizia, non fisica) del parallelepipedo dovranno-

no essere prescritte condizioni al bordo che riflettano le effettive condizioni al contorno per la soluzione del problema differenziale. Si confronti la fig. 4 per una rappresentazione schematica del dominio computazionale.

Nelle tre sezioni che seguono accenniamo brevemente al modello matematico e agli algoritmi di discretizzazione numerica che governano questo tipo di problema. Per una più completa descrizione delle problematiche matematico-numeriche si veda [3].

2.1. Le equazioni della fluidodinamica.

Le equazioni che governano il flusso intorno a B sono le cosiddette equazioni di Navier-Stokes per fluidi a densità non costante (o non omogenei). Esse si scrivono nel modo seguente

$$(1) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}, p) = \varrho \mathbf{g}$$

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

per $\mathbf{x} \in \Omega$ e $0 < t < T$, e dove ϱ è la densità (variabile), $\mathbf{u}$ il campo di velocità, p la pressione, $\mathbf{g} = (0, 0, g)^T$ l'accelerazione di gravità e

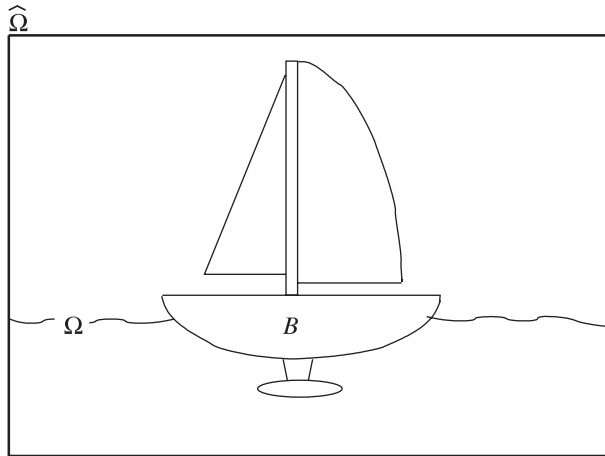


Fig. 4. – Sezione bidimensionale del dominio di calcolo $\Omega = \widehat{\Omega} \setminus B$.

$T(\mathbf{u}, p) := \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - p\mathbf{I}$ il tensore degli sforzi con μ che indica la viscosità (variabile). La prima equazione traduce il principio di conservazione della massa, la seconda quella di conservazione della quantità di moto, mentre la terza impone il vincolo di incomprimibilità del fluido. Oltre alle condizioni al contorno di cui si è detto prima, tali equazioni vanno completate con condizioni che valgono sulla superficie solida della barca (possono essere di velocità nulla se si suppongono tali parti indeformabili, oppure espresse da equazioni della dinamica strutturale nel caso si voglia tenere conto dell'interazione dinamica fra fluido e struttura). Infine, vanno prescritte le condizioni iniziali, ovvero il campo di velocità in tutto il dominio Ω , dunque sia la velocità dell'acqua che quella dell'aria. Nonostante tali equazioni siano state introdotte da oltre cento anni, esercizi di fisici, ingegneri e matematici continuano ad indagarne gli aspetti qualitativi, analitici e quantitativi. In particolare alcuni aspetti fondamentali quali la stabilità dinamica delle soluzioni, l'unicità delle soluzioni, la loro approssimazione numerica diretta nel caso di numeri di Reynolds elevati, costituiscono ancora oggi dei difficili ed affascinanti campi di ricerca.

In ogni caso, non disponendo di alcuna formula esplicita che permetta di rappresentare la soluzione «esatta» delle equazioni di Navier-Stokes, diventa inevitabile ricorrere alla loro approssimazione numerica. A tale scopo si introduce dapprima una descrizione geometrica della barca, si genera una griglia fatta di centinaia di migliaia di mini-superfici triangolari che descrivano la superficie esterna di B (si veda la fig. 5 per un dettaglio concernente la parte immersa), di conseguenza per estrusione si genera una griglia di (alcuni milioni di) tetraedri (che chiamiamo elementi) che invadono l'intero dominio di calcolo Ω .

Indi si riformulano le equazioni (1)-(3) su ogni elemento, assumendo che le soluzioni numeriche abbiano una struttura polinomiale su ogni elemento e rappresentando i flussi alle interfacce (che si trovano via le formule di Gauss-Green) in modo conveniente in funzione della direzione locale del flusso. Un esempio di soluzione è mostrato in fig. 6. Questo processo di discretizzazione conduce ad un sistema di equazioni algebriche nonlineari la cui dimensione è in genere pro-

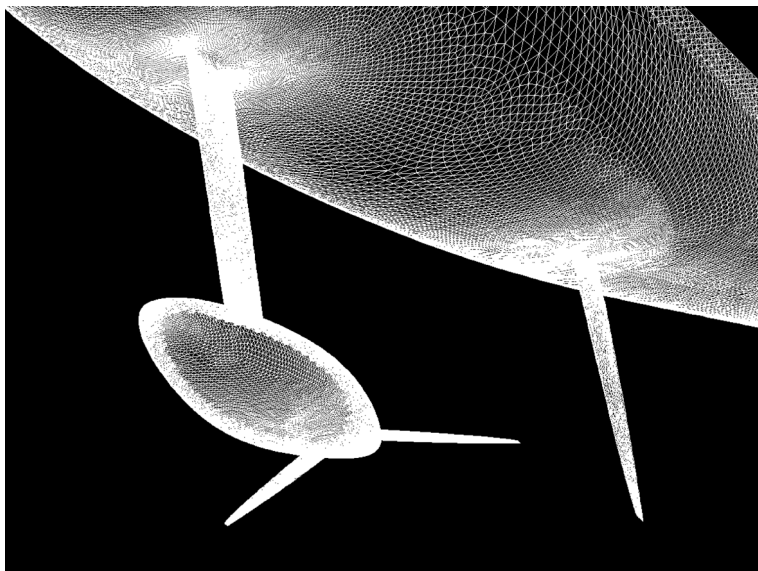


Fig. 5. – Dettaglio della griglia superficiale sulla parte immersa della barca.

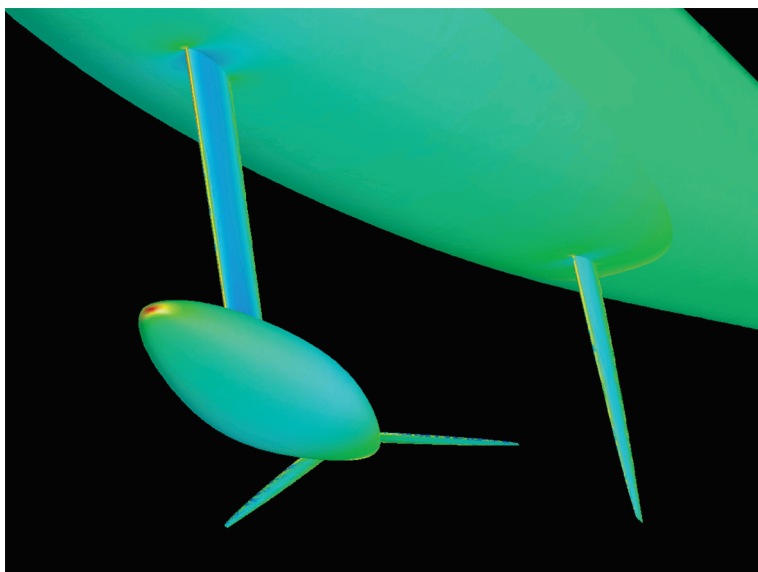


Fig. 6. – Distribuzione della pressione sulla parte immersa della barca.

porzionale al numero di elementi. Peraltro, in un moto turbolento questi ultimi dovrebbero essere, in teoria, tanto piccoli da permettere di «catturare» i meccanismi di scambio energetico che avvengono, come noto, ad ogni possibile scala spaziale sino a quella straordinariamente piccola detta di Kolmogoroff.

2.2. *I modelli di turbolenza.*

Il flusso intorno ad una barca della classe Coppa America in regime da competizione è caratterizzato da comportamento turbolento in prossimità della maggior parte della superficie bagnata. I flussi turbolenti sono caratterizzati da comportamento instazionario, effetti tridimensionali, ed esibiscono strutture vorticosi coerenti che interagiscono, si scambiano energia e fluttuano in un ampio intervallo di scale, sia spaziali sia temporali. In tali condizioni risulta improponibile la simulazione diretta delle equazioni di Navier Stokes (in breve, DNS, *direct numerical simulation*), ovvero una approssimazione in grado di utilizzare elementi di taglia talmente piccola da consentire di catturare tutte le strutture coerenti significative. Ciò infatti richiederebbe l'utilizzazione di una griglia di calcolo contenente un numero talmente abnorme di elementi che nessun calcolatore sarebbe in grado di risolvere il metodo numerico ad essa associato, per via delle odierne limitazioni alla velocità di calcolo e alla memoria disponibile.

È pertanto pratica comune surrogare la DNS ricorrendo ai cosiddetti modelli di turbolenza, ottenuti operando sulle equazioni di Navier-Stokes un filtro opportuno che separi le quantità mediate (di velocità e pressione), che vengono effettivamente risolte, dalle fluttuazioni di cui viene solo modellata l'incidenza sulle quantità mediate.

In tale contesto vanno considerati i modelli algebrici, quelli a due equazioni (quali il noto modello $k - \varepsilon$), quello agli sforzi di Reynolds ed, infine, i modelli LES (Large Eddy Simulation). In tal modo si riesce a limitare la dimensione del sistema numerico che descrive il solo aspetto fluidodinamico ad un numero di equazioni variabile fra i venti e i trenta milioni.

Nel presente studio si è considerato il modello $k - \varepsilon$ a due equa-

zioni in cui la viscosità che compare nell'equazione (2) viene modificata in modo da tener conto di effetti turbolenti. Alla viscosità molecolare μ viene infatti aggiunta la cosiddetta viscosità turbolenta μ_t che può essere determinata risolvendo due equazioni di diffusione e trasporto per due variabili ausiliarie: l'energia cinetica turbolenta k e la sua velocità di dissipazione ε [2].

I modelli mediatati verranno attivati solo in quelle regioni in cui ci si attende che il fluido esibisca una turbolenza sviluppata. L'accurata localizzazione della zona di transizione fra la regione di flusso laminare e quella di flusso turbolento è piuttosto critica ed è effettuata attraverso modelli di flusso complementari a quelli qui considerati, nonché ad informazioni derivanti da un'analisi sperimentale condotta nei bacini di carena o nelle prove in acqua.

2.3. *Il modello strutturale.*

Un ulteriore sistema di equazioni deve essere considerato nel caso si voglia tenere conto della deformazione delle vele. Per la soluzione del problema accoppiato fluido-struttura si fa in genere ricorso ad algoritmi iterativi segregati, ovvero che separino le due simulazioni, quella per il fluido e quella per la struttura, garantendo comunicazione fra le due soluzioni attraverso l'equilibratura delle forze e la continuità delle velocità alla frontiera di separazione.

Denotiamo con S_t la configurazione corrente della vela al tempo t e con $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ la sua configurazione iniziale che supponiamo in assenza di sforzi. Sia $\mathbf{f}$ la forza di volume esercitata sulla vela (ad esempio, la gravità) e ϱ_s la sua densità. Le equazioni di equilibrio che governano la deformazione della vela in un contesto elastodinamico in tre dimensioni sono

$$(4) \quad \varrho_s \partial_{tt}^2 \boldsymbol{\psi} - \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\psi})) = \mathbf{f}, \quad \text{in } S_0 \times \mathbb{R}^+,$$

dove $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\psi})$ è il tensore degli sforzi e $\boldsymbol{\psi} : S_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow S_t$ è la mappa di trasformazione che deve verificare le condizioni iniziali $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ e $\partial_t \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$.

Opportune condizioni al contorno devono essere applicate sui bordi della vela. A queste condizioni al contorno, dobbiamo aggiun-

gere due altre condizioni di accoppiamento. La prima è data da

$$(5) \quad \partial_t \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma^I \times \mathbb{R}^+,$$

e significa che la velocità è continua all'interfaccia.

La seconda, che esprime l'equilibrio degli sforzi all'interfaccia, è data da

$$(6) \quad \nabla \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_S = \mathbf{T}(\mathbf{u}, p) \circ \boldsymbol{\psi} \operatorname{Cof}(\nabla \boldsymbol{\psi}) \mathbf{n}_S, \quad \text{on } \Gamma^I \times \mathbb{R}^+,$$

dove $\mathbf{n}_S$ è il vettore normale unitario, $\operatorname{Cof}(\nabla \boldsymbol{\psi}) = \operatorname{Det}(\nabla \boldsymbol{\psi}) \nabla \boldsymbol{\psi}^{-T}$ è il tensore cofattore $\mathbf{T}(\mathbf{u}, p)$ è il tensore degli sforzi per il fluido.

Le equazioni di Navier-Stokes (nella loro forma mediata, o RANS) insieme alle equazioni che governano la struttura (4) e le condizioni di accoppiamento (5)-(6) forniscono un problema globale di interazione fluido-struttura la cui soluzione può essere ottenuta attraverso un processo iterativo di tipo punto fisso oppure di Newton o quasi-Newton [4].

3. – Alcune simulazioni numeriche.

Le simulazioni numeriche effettuate hanno interessato principalmente tre soggetti di ricerca: l'analisi di diverse configurazioni di appendici per una barca di Coppa America, la superficie libera attorno allo scafo e la sua interazione con le appendici e il flusso aerodinamico attorno alle vele [1].

Questi calcoli hanno permesso di fornire una vasta gamma di informazioni al design team da integrare in diverse fasi del ciclo di progetto. Tali informazioni sono state usate dai progettisti per modificare le forme delle diverse componenti, anche durante le fasi finali della competizione.

I risultati che si possono estrarre da questo tipo di simulazioni numeriche sono sia quantitativi (forze, distribuzioni di pressione e di sforzi a parete) sia qualitativi (campi vettoriali, linee di corrente per localizzare, ad esempio, regioni con flusso separato).

Un fattore chiave per il successo di una barca di Coppa America è il progetto di appendici che possano garantire performance elevate in differenti condizioni di regata (di poppa e di bolina) ed in un'ampia

gamma di condizioni di vento (e quindi di velocità della barca stessa).

Si sono considerati diversi parametri di progetto per le differenti componenti al fine di selezionare una combinazione ottimale dei parametri stessi. Per quanto riguarda la forma del bulbo sono stati analizzati diversi profili laterali e verticali e diverse sezioni trasversali. In generale, opzioni diverse presentano sia vantaggi che svantaggi. Per esempio bulbi più allungati si comportano meglio per quanto riguarda la resistenza di pressione, ma avendo una superficie bagnata più ampia subiscono una resistenza d'attrito maggiore. Altre caratteristiche del bulbo, quali ad esempio la curvatura della linea media e la forma della regione di coda sono state analizzate (fig. 7).

Da quando furono per la prima volta adottate su Australia II vincitrice dell'edizione 1983 della Coppa America, le alette (*winglets*) sono state ampiamente utilizzate da quasi tutti i concorrenti delle edizioni successive. L'idea sulla quale si basano è che la presenza delle alette all'estremità della chiglia (o analogamente all'estremità di un ala di aeroplano) permette di ridurre i vortici di estremità con una conseguente diminuzione di una componente della resistenza nota come *resistenza indotta* (fig. 8). Nonostante l'uso estensivo delle alette negli ultimi vent'anni, la loro ottimizzazione rispetto a diversi parametri (posizione longitudinale, angoli di attacco, di svergolamento e di freccia, forma della pianta) rimane un problema aperto.

Per imbarcazioni di Coppa America, la resistenza d'onda può rappresentare una componente assai significativa (sino al 60%) della resistenza totale. Una predizione accurata di questa componente risulta quindi decisiva in fase di progetto e, a tal fine, sono necessari metodi numerici in grado di simulare la dinamica della superficie libera che separa l'aria dall'acqua. Attraverso simulazioni numeriche basate sulla soluzione delle equazioni di Navier-Stokes del flusso a superficie libera attorno allo scafo, abbiamo analizzato diverse configurazioni caratterizzate da forme diverse in particolare nella regione di prua.

L'aerodinamica delle vele è un altro fattore determinante. Nei lati di poppa, il flusso attorno alle vele presenta ampie regioni di separazione che non possono essere adeguatamente simulate utilizzando modelli semplificati (quali ad esempio, i modelli di flusso a potenziale) e che richiedono dunque l'utilizzo di metodi basati sulla soluzione

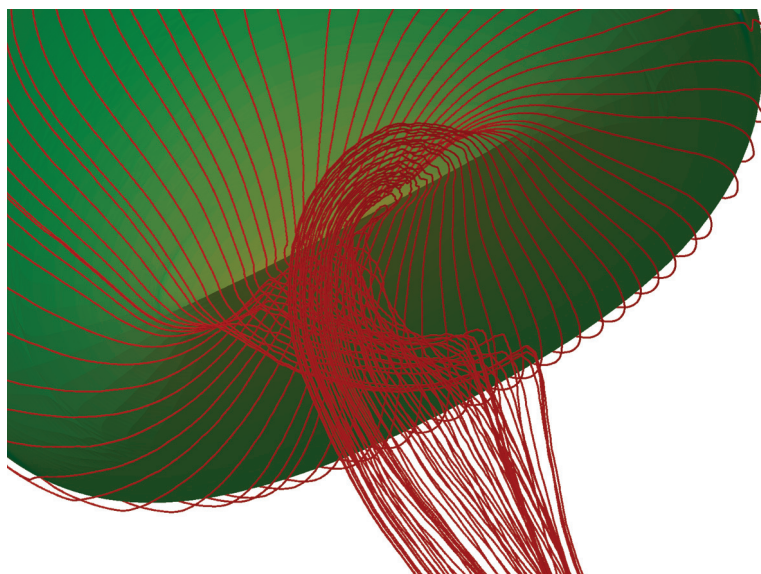


Fig. 7. – Linee di corrente nella regione di coda del bulbo.

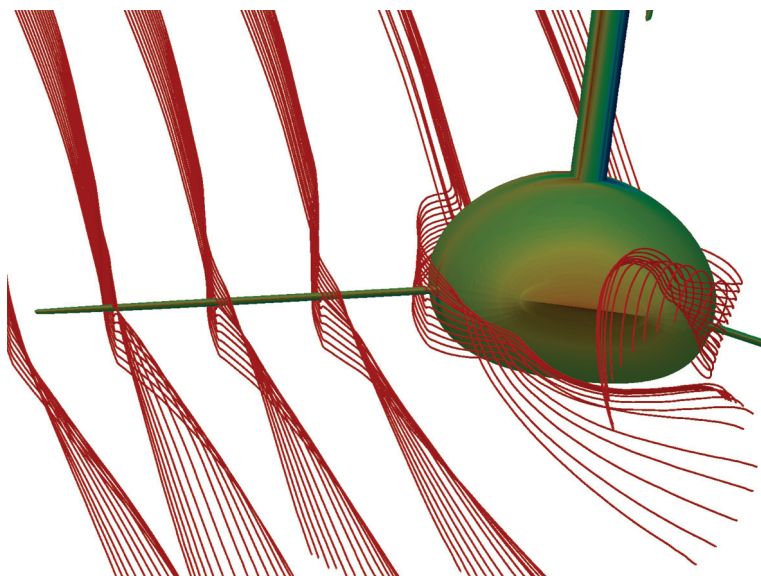


Fig. 8. – Distribuzione di pressione sulla superficie delle appendici e linee di corrente attorno alle alette.

delle equazioni di Navier-Stokes. Si sono considerati tre aspetti specifici di questo problema: la stima delle forze sulle vele in navigazione di poppa, l'interazione tra due imbarcazioni e l'analisi della regione d'ombra a valle delle vele.

Basandosi sull'analisi delle forza propulsiva e della forza laterale e sulla distribuzione di pressione sulle vele, si dimostra come le vele agiscano come una combinazione di un paracadute (con la portanza allineata alla direzione della spinta) e di un'ala verticale (con la resistenza allineata alla direzione della spinta), come osservato da Richards in [5].

Nei lati di poppa, la barca sopravento ha un vantaggio dal punto di vista tattico in quanto può controllare l'avversario in modo che quest'ultimo si trovi nella regione d'ombra a valle delle sue vele. Simulazioni numeriche del flusso attorno alle due imbarcazioni in uno scenario di copertura in un lato di poppa sono state effettuate per meglio comprendere i fenomeni fluidodinamici sottostanti. L'imbarcazione sottovento incontra un flusso che è ampiamente perturbato dalla barca concorrente e le distribuzioni di pressione sulle vele delle due imbarcazioni risultano essere sostanzialmente diverse (fig. 9).

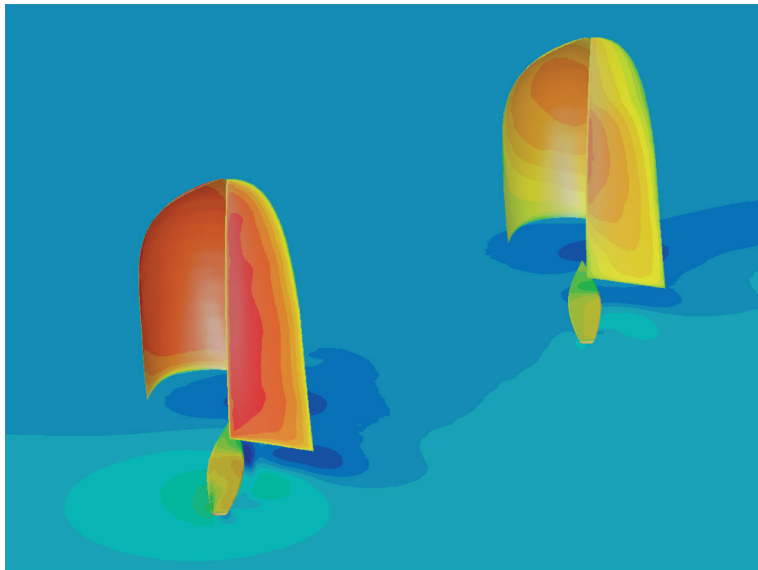


Fig. 9. – Distribuzione di pressione sulle due barche durante un lato di poppa.

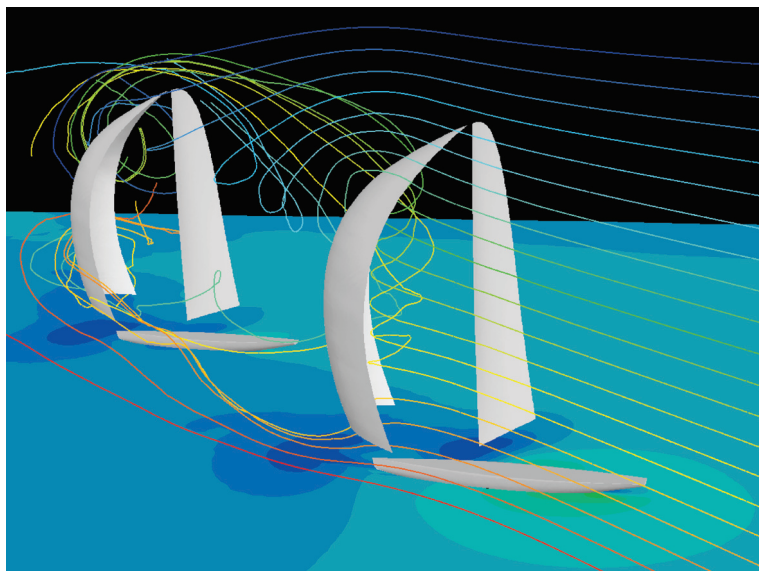


Fig. 10. – Interazione aerodinamica tra due barche in navigazione di poppa.

Una indicazione visiva del flusso perturbato incontrato dalla barca sottovento è mostrato in fig. 10.

Informazioni di questo tipo estratte dalle simulazioni numeriche possono essere utilizzate per supportare le decisioni tattiche di entrambe le imbarcazioni, in modo da massimizzare la copertura o limitarne gli effetti negativi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] G. COWLES - N. PAROLINI - M. SAWLEY, *Numerical Simulation using RANS-based Tools for America's Cup Design*, to appear in the *Proceedings of the 16th Chesapeake Sailing Yacht Symposium*, Annapolis, Maryland, 2003.
- [2] P. MOHAMMADI - O. PIRONNEAU, *Analysis of the k-epsilon model*, Masson, Paris, 1994.
- [3] N. PAROLINI - A. QUARTERONI, *Mathematical Models and Numerical Simulations for the America's Cup*, submitted to *Comp. Met. Appl. Mech. Eng.*, 2003.

- [4] A. QUARTERONI - R. SACCO - F. SALERI, *Numerical Mathematics*, Springer, New York, 2000.
- [5] P. J. RICHARDS - A. JONHSON - S. STANTON, *America's Cup Downwind Sails – Vertical Wings or Horizontal Parachutes?*, J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn., **89** (2001), 1565-1577.

Nicola Parolini, CMCS, Institut d'Analyse et Calcul Scientifique, EPFL
Lausanne, Svizzera. Web page: <http://iacs.epfl.ch/cmcs>

Alfio Quarteroni, CMCS, Institut d'Analyse et Calcul Scientifique, EPFL
Lausanne, Svizzera. Web page: <http://iacs.epfl.ch/cmcs>
MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, Milano, Italia