

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

PIERO VILLAGGIO

## Calcolo delle variazioni e teoria delle strutture

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura (2004), n.1, p. 49–76.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2004\\_8\\_7A\\_1\\_49\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_1_49_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Calcolo delle variazioni e teoria delle strutture.

PIERO VILLAGGIO

### 1. – Principi variazionali classici e recenti.

Il calcolo delle variazioni è un capitolo esemplare della matematica per dimostrare come molti problemi della fisica e persino della vita di tutti i giorni, se posti in termini di equazioni, offrano delle questioni molto interessanti per la matematica astratta, e come, viceversa, tanti metodi teorici per trattare queste equazioni si siano rivelati utilissimi per descrivere e prevedere i fatti sperimentali.

Nel calcolo delle variazioni rientrano tutti quei problemi di ricerca del massimo o del minimo di una funzione ordinaria che si insegnano nei corsi classici di analisi, ma con la novità che, invece di voler determinare gli eventuali punti di estremo, adesso si cerca una funzione tale da estremizzare una funzione di essa, o, come si dice in termini tecnici, un «funzionale.» Esempi di funzionali da estremizzare mediante i metodi del calcolo delle variazioni sono stati proposti, fin da tempi remoti, dalla geometria. Supponiamo di voler determinare la curva che congiunge due punti nello spazio e tale che la sua lunghezza sia minima. Già i matematici greci sapevano che questa curva è un segmento di retta, ma il problema non è così semplice se i due punti estremi sono situati su una superficie e la curva che li collega deve giacere su questa superficie. La curva, o le curve, che risolvono il problema sono dette «geodetiche.» Se la superficie è sferica le geodetiche sono archi di cerchio massimo, come già sapevano i navigatori del cinquecento, ma, se la superficie è generale, la determinazione delle geodetiche è un problema difficile.

Un altro settore in cui sono stati proposti problemi variazionali è la meccanica. Il motivo non è occasionale, perchè sin dall'antichità classica si è sempre pensato che tutti i fenomeni naturali fossero regolati da un principio divino di economia. Ma l'interesse per i cosiddetti principi variazionali esplose nel seicento perchè, in questo periodo, la meccanica classica comincia ad essere formulata in termini

precisi e, d'altra parte, l'introduzione del calcolo differenziale ed integrale offre uno strumento potente per trattare le equazioni che discendono da tali principi. Uomini come Descartes, Huygens, Leibniz, propongono dei principi variazionali per descrivere il moto e l'urto dei corpi e tentativi del genere sono continuati nei secoli successivi fino ai giorni nostri. Molti di questi principi si sono rivelati erronei o semplicemente sterili, ma altri hanno permesso di mettere in forma unitaria ed elegante tante questioni di meccanica celeste e di fisica delle particelle, che altrimenti sarebbero frammentati in una marea di equazioni differenziali. Una storia affascinante di questi principi è stata scritta da C. Lanczos nel 1957 [12].

Altre applicazioni del calcolo delle variazioni sono state recentemente effettuate in campi emergenti della scienza, come l'economia e la dinamica delle popolazioni. Si è, per esempio, constatato che l'evoluzione di un mercato può essere descritta bene come problema di minimo di un funzionale, e, così pure, la competizione fra specie, il sopravvento o l'estinzione di una di esse, è riconducibile ad un problema variazionale.

Il metodo classico con cui si sono inizialmente affrontati i problemi variazionali è stato codificato da Eulero nel 1744 attraverso la deduzione di un'equazione differenziale che deve essere soddisfatta dalle eventuali soluzioni estremizzanti. Tale equazione, detta equazione di Eulero, è applicata tuttora per risolvere molti problemi nuovi, e, qualora se ne possa trovare una soluzione esplicita, è il metodo più elegante e semplice che si possa immaginare. Tuttavia, spesso le soluzioni di problemi variazionali sono funzioni «cattive,» per cui la versione in termini di equazioni differenziali non è ammissibile. Questo ha determinato, verso la metà dell'ottocento, una svolta storica nel calcolo delle variazioni mediante l'introduzione dei cosiddetti metodi diretti, a cui tanta ala hanno steso matematici come Weierstrass, Hilbert, Tonelli, e tanti altri ancora (v. Miranda [15]). Ma il fatto più sorprendente è che questi risultati che, per molti decenni, sono stati considerati appannaggio della matematica teorica, si sono rivelati importantissimi per le applicazioni tecniche. Il caso più famoso è stato rappresentato, alla fine degli anni '50 del novecento, dalla teoria dei controlli, in cui si è dimostrato che il modo migliore per minimizzare il tempo di percorrenza di un missile è

quello di imprimergli impulsi a salto di segno opposto. I seguaci di Leibniz sarebbero scandalizzati da una conclusione del genere, ma, probabilmente, né i tecnici della N.A.S.A. né i piloti della Formula 1 si preoccupano della filosofia di Leibniz.

## 2. – Principi variazionali nella teoria delle strutture.

Tuttavia, un settore imprevedibile in cui il calcolo delle variazioni, vecchio e nuovo, si è applicato con successo è quello della cosiddetta «Teoria delle Strutture.» Questa è una branca della meccanica che tratta i corpi sottili come le funi, le travi, le piastre, i gusci, cioè corpi filiformi o stratiformi atti a trasmettere carichi. J. E. Gordon [8], ingegnere meccanico, ha scritto un libro mozzafiato sulla teoria delle strutture. Queste, dagli archi dei guerrieri antichi, le leve degli operai alessandrini, gli aratri, le colonne delle cattedrali gotiche, le forme delle vele e delle chiglie delle imbarcazioni, hanno determinato — secondo Gordon — i veri momenti di svolta nella storia della civiltà, infinitamente più incisivi delle battaglie, dei trattati di pace, dei conclavi religiosi, che sono dettagliatamente raccontati nei libri di storia. Ma è anche sorprendente verificare che tanti piccoli e progressivi affinamenti nella forma degli utensili sono stati ispirati da un principio di ottimalità. Gordon cita, per esempio, il caso degli archi flessibili. Quelli del tardo paleolitico erano delle verghe rettilinee, ma quelli che si usavano in età romana erano sagomati a forma di parentesi graffa in modo che lo sforzo per tenderli fosse costante fin dall'inizio e si potesse così accumulare più energia elastica in un ordigno più corto e maneggevole. Gli archi lobati erano particolarmente utili per i guerrieri a cavallo e si trovano scolpiti nella colonna traiana.

L'ottimizzazione strutturale si propone di migliorare il più possibile le prestazioni meccaniche di una struttura a parità di materiale impiegato. Il caso più semplice che possiamo considerare è quello di un sistema formato da due barrette elastiche, incernierate al suolo e collegate con una terza cerniera in sommità dove è applicato un carico verticale  $P$  (Fig. 1).

Questa struttura, che si chiama «arco a tre cerniere,» è il modello più elementare per descrivere il comportamento di una copertura o

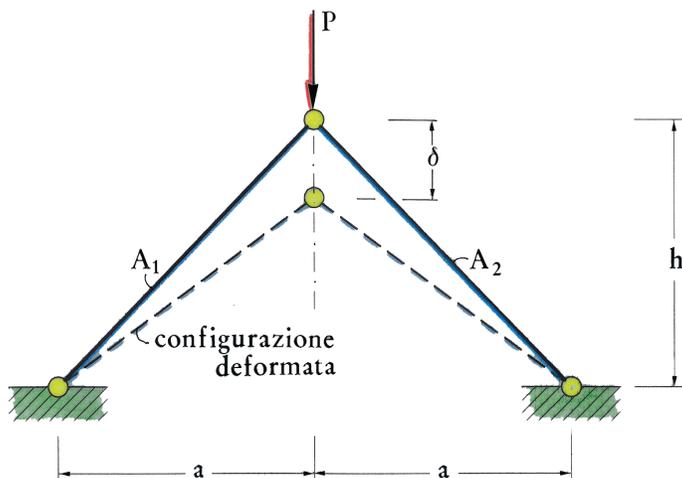


Fig. 1. – Lo spostamento verticale  $\delta$  è minimo quando le sezioni delle due barrette sono uguali.

del sostegno di un ponte, perchè, senza alcun calcolo, sappiamo che, per trovare gli sforzi nelle due barrette, basta decomporre  $P$  secondo i loro assi mediante la regola del parallelogramma. Se questi sforzi sono abbastanza bassi possiamo essere sicuri che il ponte resista. Ma supponiamo che noi, a parità di materiale impiegato, cioè mantenendo costante la quantità  $l_1 A_1 + l_2 A_2$ , dove  $l_1$ ,  $l_2$  e  $A_1$ ,  $A_2$  sono rispettivamente le lunghezze e le aree delle sezioni trasversali delle due aste (nel nostro caso  $l_1$  e  $l_2$  sono uguali), vogliamo rendere minimo lo spostamento verticale  $\delta$  della cerniera sommitale dove è applicato il carico  $P$ , facendo l'ipotesi che il materiale sia elastico in entrambe le aste e con uguali moduli. Lo spostamento verticale  $\delta$  si determina facilmente con i metodi della resistenza dei materiali e viene poi reso minimo rispetto alle due variabili  $A_1$  e  $A_2$ , soggette al vincolo che la somma  $A_1 + A_2$  sia costante. Il risultato è che  $\delta$  è minimo quando  $A_1$  è uguale ad  $A_2$ , vale a dire le aste hanno la stessa sezione trasversale e, di conseguenza, gli sforzi interni sono costanti dappertutto. Si può obiettare che, in questo caso, noi non abbiamo risolto un problema di calcolo delle variazioni, ma uno di minimo ordinario. Tuttavia già questo esempio contiene la proprietà caratteristica che hanno le strutture ottimali, vale a dire che i loro singoli ele-

menti devono tutti essere sottoposti allo stesso livello di sforzo. Questa tendenza all'equidistribuzione degli sforzi non si trova solo nelle strutture costruite dagli uomini ma soprattutto in quelle naturali, come le piante e le ossa dei vertebrati, al punto che essa è stata scherzosamente chiamata il «principio della democrazia strutturale.»

Il caso dell'arco a tre cerniere caricato verticalmente ci dà un'indicazione importante su come distribuire gli spessori in una struttura ottimale, tuttavia nulla ci dice della forma di tale struttura perchè noi abbiamo bloccato in partenza la posizione delle tre cerniere. Per formulare nel modo più semplice possibile una problema di ottimizzazione anche rispetto alla forma, consideriamo ancora un arco a tre cerniere, ma, questa volta, disposto con l'asse di simmetria orizzontale (Fig. 2). Noi sappiamo, come nel caso precedente, che l'altezza  $h$

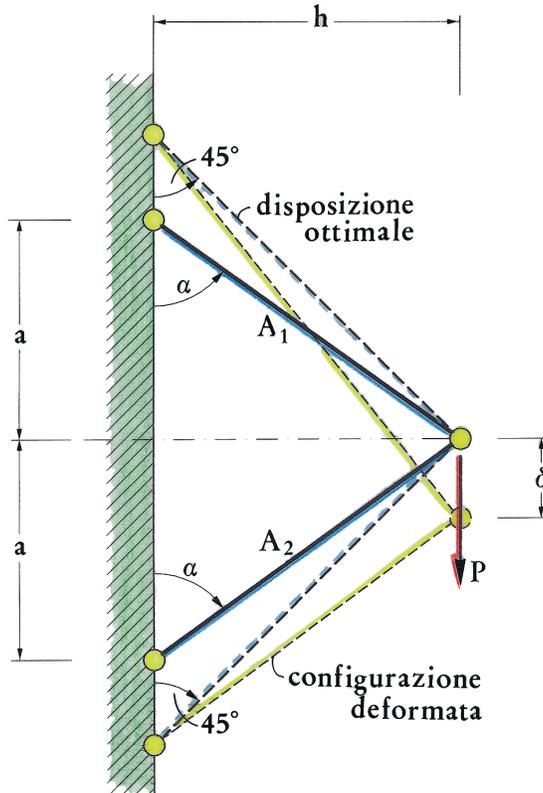


Fig. 2. - Lo spostamento verticale  $\delta$  è minimo quando le sezioni sono uguali e le barrette si incrociano a  $90^\circ$  al vertice.

è fissa, come pure il volume totale di materiale espresso dalla somma  $l_1 A_1 + l_2 A_2$ ; viceversa noi possiamo variare la distanza fra le due cerniere aderenti alla parete rigida, e quindi le lunghezze  $l_1, l_2$ , che divengono ulteriori variabili indipendenti insieme ad  $A_1, A_2$ .

Se ora andiamo a calcolare lo spostamento verticale  $\delta$  e lo rendiamo minimo rispetto alle quattro variabili troviamo il risultato che la disposizione ottimale delle due aste è quella per cui le sezioni sono uguali ( $A_1 = A_2$ ) ed inoltre le aste sono inclinate di  $45^\circ$  rispetto alla parete verticale. Anche qui, seppure in un esempio elementare, troviamo un secondo principio «pseudometafisico» a cui devono sottostare le membrature di una struttura ottimale. Esso suona approssimativamente così: «gli elementi devono incrociarsi ad angolo retto.» Una dimostrazione più generale di questo risultato è stata data da Michell [14] nel 1904, il quale, studiando i reticoli di barrette, arriva alla conclusione che i singoli elementi si devono disporre secondo due famiglie di curve ortogonali. Ma il teorema di Michell era già stato anticipato dai biologi, i quali, esaminando i tessuti viventi come le tele dei ragni, le fibre delle piante, le radici degli alberi, avevano osservato questa ricorrenza sistematica degli incroci ortogonali. In un celebre libro, D'Arcy Thompson [6], racconta come, molti anni prima di Michell, gli zoologi avessero osservato che le trabecole ossee tendono a disporsi secondo le linee di minimo sforzo, che sono ortogonali.

### 3. – Applicazioni ai sistemi continui.

Lo studio dei sistemi discreti, come gli insiemi delle barrette, pur fornendo delle indicazioni interessanti sulla forma delle strutture ottimali, non fa uso del calcolo delle variazioni, ma semplicemente del calcolo differenziale ordinario. La situazione è invece differente quando si studiano i sistemi continui. Un caso tipico, sebbene semplice da trattare, è quello di un pilastro verticale di altezza assegnata, soggetto ad una forza  $P$  in sommità ed al peso proprio del materiale (Fig. 3). Supponiamo ancora che quest'ultimo sia elastico e che il volume totale sia assegnato. Viceversa abbiamo la libertà di far variare la sezione trasversale  $A(x)$  in modo tale che lo spostamento verticale  $\delta$  della sezione in sommità sia minimo. È chiaro che una sezione costante lungo tutto

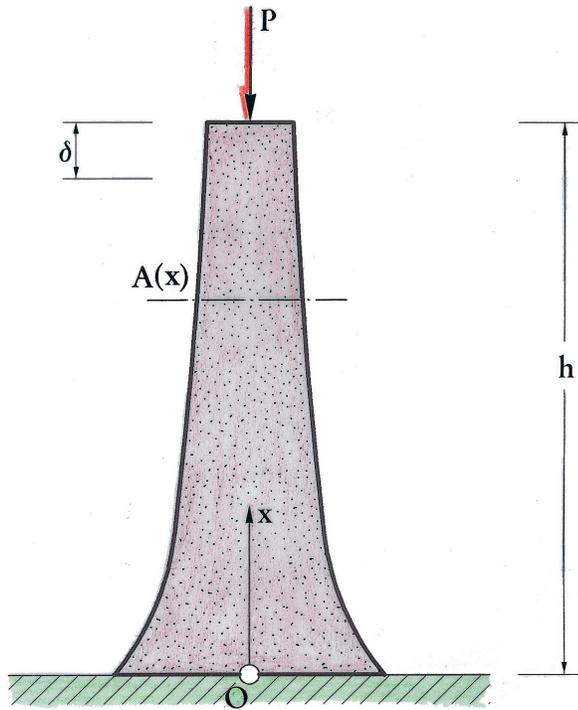


Fig. 3. – La forma migliore di un pilastro è quella tale che la sezione  $A(x)$  vari con legge esponenziale.

l'asse non può essere quella ottimale perchè, a causa del peso, le parti vicine alla base sono più cimentate di quelle prossime al vertice, e quindi conviene dilatare un po' la sezione nella parte inferiore. Comunque, anche ignorando ogni dettame intuitivo, possiamo procedere per via sistematica calcolando lo spostamento  $\delta$  mediante la teoria dell'elasticità. Questo spostamento risulta essere un funzionale di  $A(x)$ , che è a sua volta vincolato dalla condizione che il volume, cioè l'integrale di  $A(x)$  sull'intervallo  $(0, h)$ , sia costante. A questo punto possiamo scrivere l'equazione di Eulero del problema e trovare la funzione  $A(x)$ . Il risultato è che  $A(x)$  varia con legge esponenziale decrescente dalla base al vertice. Ma un esame più attento ci informa anche che lo sforzo di compressione nel pilastro corrispondente all' $A(x)$  trovato è costante, confermando così il principio di democrazia. Questo problema è stato trattato di recente da Keller e Verma [10], ma si trova anche in libri più an-

tichi (v. Szabó [17]), e, soprattutto, la soluzione era nota ai costruttori dei ponti ferroviari dell'ottocento i quali sagomavano le pile secondo profili molto vicini a quella teorica.

Il sistema delle due barrette disposte a mensola, illustrato nella Fig. 2, ha come equivalente continuo la trave a mensola caricata trasversalmente in corrispondenza dell'estremo libero, rappresentata nella Fig. 4. Qui, per definire meglio il problema, supponiamo che la sezione della trave sia rettangolare di spessore costante, diciamo uguale a 1, e altezza variabile  $h(x)$ . Siccome il volume totale è assegnato, abbiamo il vincolo che l'integrale fra 0 e  $l$  di  $h(x)$  è uguale ad una costante. Supponiamo che la trave sia elastica, l'estremità 0 subirà uno spostamento verticale  $\delta$ . Adesso ci chiediamo come distribuire  $h(x)$  in modo da rendere minimo  $\delta$ . Questo è, storicamente parlando, il primo problema formulato nella meccanica delle strutture perchè è proposto e risolto da Galilei nei suoi *Discorsi* (1638). Galilei, a dire il vero, non si pone la questione di minimizzare lo spostamento  $\delta$  perchè riguarda la trave come rigida, ma si chiede quale esserne la forma affinchè tutte le sue sezioni siano equiresistenti. Tuttavia, messo in termini di calcolo delle variazioni, il risultato conferma la conclusione galileiana: il profilo ottimo è una parabola con il vertice situato in corrispondenza dell'estremo destro. Inoltre, se si calcolano gli sforzi indotti dal carico  $P$ , troviamo che quelli sul lembo superiore ed inferiore, pur di segno opposto, sono uguali. Dunque il principio di democrazia è ancora vero, ma ristretto alle fibre esterne del profilo,

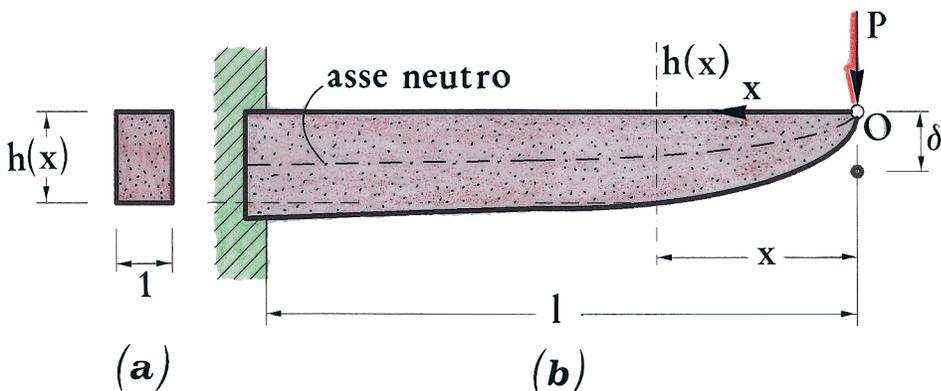


Fig. 4. – In (a) è rappresentata la sezione trasversale ed in (b) il profilo longitudinale che è un arco di parabola.

mentre quelle interne sono meno sollecitate ed una, quella media, addirittura scarica (Fig. 4). Il principio di equidistribuzione degli sforzi, enunciato in generale, è adesso limitato a certe parti della struttura (con soddisfazione di Platone, strenuo sostenitore dello stato diviso in classi).

Esistono innumerevoli varianti sulla trave di minima deflessione a parità di volume, ma due almeno, per la loro importanza pratica, son degne di essere descritte. Se invece di una mensola, abbiamo una trave appoggiata, di lunghezza  $l$  caricata nel centro da una forza  $P$ , la distribuzione ottimale dell'altezza  $h(x)$  è rappresentata da due archi simmetrici di parabole con vertici negli estremi  $x = \pm l/2$  (Fig. 5(a)). Se, viceversa, la trave è incastrata a questi estremi, l'altezza  $h(x)$ , pur obbedendo alla legge parabolica, si annulla nei punti  $x = \pm l/4$  (Fig. 5(b)). Queste soluzioni sembrano bizzarre, ma riproducono quasi esattamente le forme dei corpi di certi insetti ed i profili dei ponti di ferro costruiti nell'ottocento.

Le soluzioni relative alle travi inflesse non sono poi sorprendenti

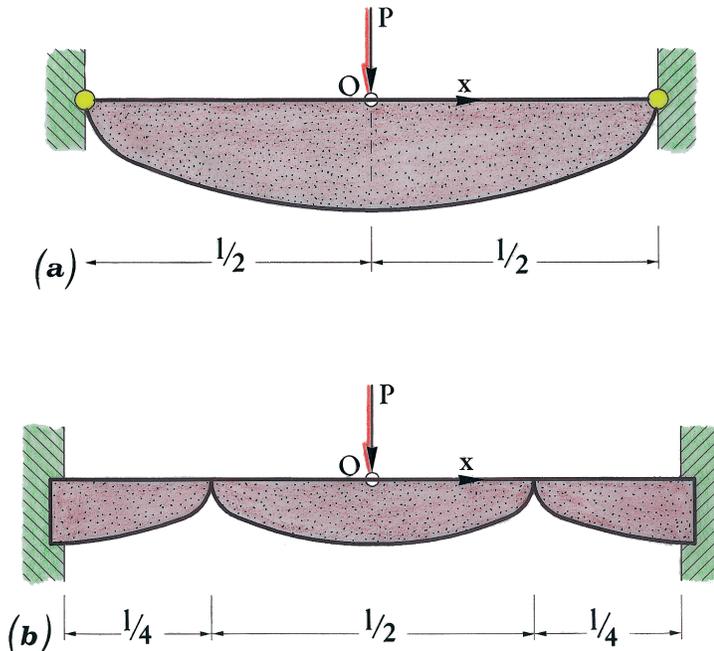


Fig. 5. – La trave appoggiata ottima è parabolica; quella incastrata è costituita da tre lobi di parabola.

perchè rispondono al criterio intuitivo di addensare il materiale dove c'è maggior bisogno. Ma non è sempre così, perchè può accadere che certe forme ottimali di travi previste dalla teoria siano in contrasto con ciò che uno si aspetta. Un esempio tipico è costituito dalla forma della trave snella, compressa secondo l'asse, che si instabilizza lateralmente quando il carico assiale raggiunge un certo valore critico (Fig. 6). Questo problema è stato posto da Lagrange nel 1770 nei seguenti termini: supponendo che la trave sia elastica ed il suo volume costante, come far variare la sezione trasversale  $A(x)$  affinché il carico instabilizzante  $P_{cr}$  sia il massimo possibile? La risposta

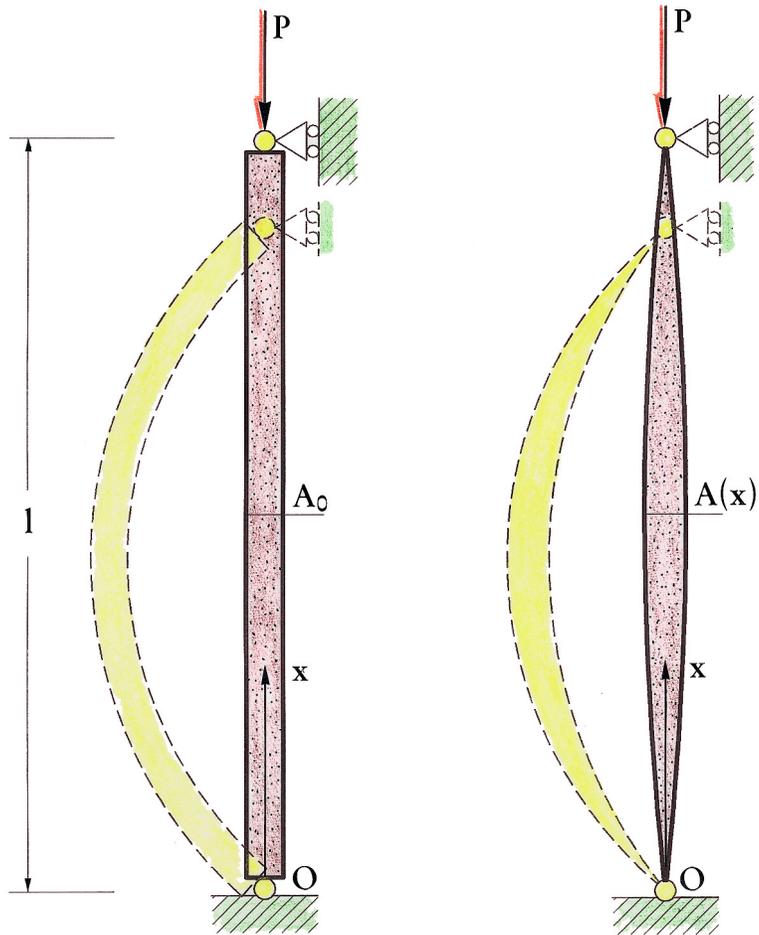


Fig. 6. – L'asta rastremata di sezione triangolare equilatera è quella ottima.

di Lagrange è che la trave deve essere un cilindro circolare di sezione uniforme  $A_0$ , come è rappresentato nella Fig. 6(a). Ma la soluzione è palesemente erronea perchè una trave rastremata come quella della Fig. 6(b) si dimostra nettamente più efficiente. Anzi, se si formula il problema variazionale e si risolve la conseguente equazione di Eulero, si trova che  $A(x)$  varia secondo una ben definita funzione trascendente (Szabó [17]). Ma la storia non finisce qui. I risultati precedenti partono dalla congettura plausibile che la trave debba avere sezione circolare, dato che può sbandare da qualsiasi parte. Ma invece non è così. Nel 1960, Keller [11] ha dimostrato che una sezione avente la forma di un triangolo equilatero è ancora più efficiente agli effetti dell'instabilità laterale. Ancora in natura, e precisamente nella forma delle vertebre dei merluzzi, troviamo una conferma della soluzione variazionale (D'Arcy Thompson [6]).

In tutti questi casi noi abbiamo trovato la soluzione applicando l'equazione di Eulero, ma recentemente, nello studio dei laminati, si sono incontrati problemi che sfuggono alla trattazione classica (v. Cherkav [4]). Supponiamo di dover progettare una trave lunga  $l$ , semplicemente appoggiata agli estremi, accostando elementi elastici di due diverse rigidzze  $d_1$  e  $d_2$  (Fig. 7), sapendo che essa deve sopportare un certo carico  $f(x)$ . Noi ci proponiamo di disporre gli elementi di rigidzze  $d_1$  e  $d_2$  lungo la trave in modo da approssimare nel modo migliore, nel senso dei minimi quadrati, la deflessione di una trave omogenea di rigidzza costante  $d^* = \frac{d_1 + d_2}{2}$ . Per fare ciò mescoliamo le due rigidzze in modo tale che in ciascun intervallo  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll l$ ) esse siano presenti nelle frazioni  $m_1$  e  $m_2$  con  $m_2 = 1 - m_1$ , costituendo così una trave lamellata come quella disegnata nella Fig. 7(b). A questo punto ci domandiamo come dobbiamo scegliere  $\varepsilon$  e  $m_1$  in modo da avvicinarci il più possibile alla deflessione della trave omogenea della Fig. 7(a). Ebbene il risultato è il seguente. L'approssimazione migliora con il crescere delle oscillazioni della rigidzza sicchè, formalmente, conviene fare tendere  $\varepsilon$  a zero. Inoltre, contrariamente all'aspettativa che al limite si debba avere equiripartizione

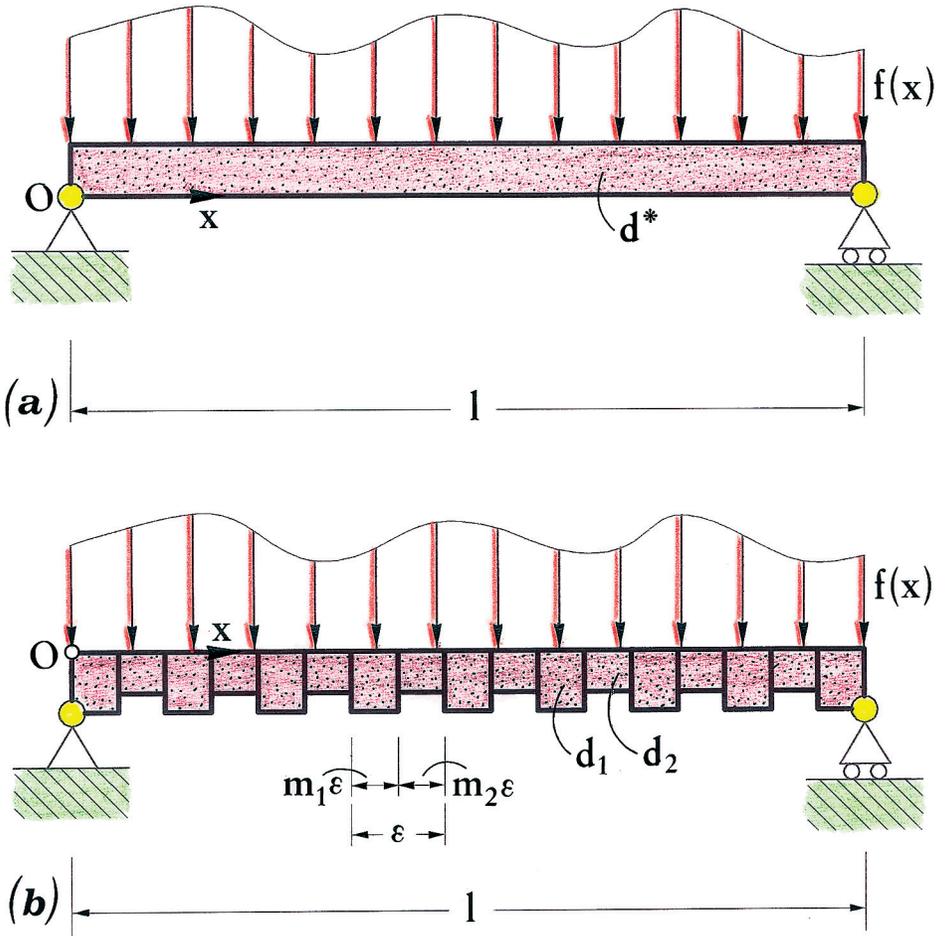


Fig. 7. - Nella trave (b) ciascuna cella di lunghezza  $\varepsilon$  contiene due rigidità nelle proporzioni  $m_1$  e  $m_2 = 1 - m_1$ .

delle rigidità, cioè  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ , si trova invece che  $m_1$  e  $m_2$  devono stare in un ben definito rapporto diverso da uno.

Possiamo obiettare che questa è una soluzione matematica priva di interesse pratico, ma le cellule di certi materiali naturali come il legno, composte di cellulosa e lignina, tendono proprio ad assumere la struttura fittamente periodica (v. Vincent [19]).

#### 4. - Estensioni a strutture complesse.

I problemi relativi alle travi non rappresentano tuttavia il caso più generale di ottimizzazione strutturale, perchè essi restringono la questione alla determinazione di una funzione di una variabile esprimente l'area della sezione trasversale. La situazione è completamente diversa nei corpi stratiformi come le lastre e le piastre, che sono corpi bidimensionali caricati rispettivamente nel proprio piano o trasversalmente ad esso. Qui le cose sono molto più complicate perchè le equazioni di Eulero, ammesso che si possano applicare con successo, sono equazioni alle derivate parziali, e, soprattutto, non conosciamo in partenza la forma della regione che, a parità di area, risponde ai requisiti richiesti di ottimalità. Tanto per mettere la questione in termini definiti, supponiamo di dover trasmettere un carico uniforme  $p_0$  applicato ad un segmento  $BB'$  (Fig. 8) su una base rigida  $AA'$  attraverso una lastra elastica i cui vertici sono situati in  $ABB'A'$  e la cui area è assegnata. La figura è simmetrica rispetto all'asse tratteggiato quindi, se la lastra è elastica, la base sommitale subirà uno spostamento verticale pure simmetrico rispetto all'asse. Adesso ci chiediamo come scegliere le curve laterali

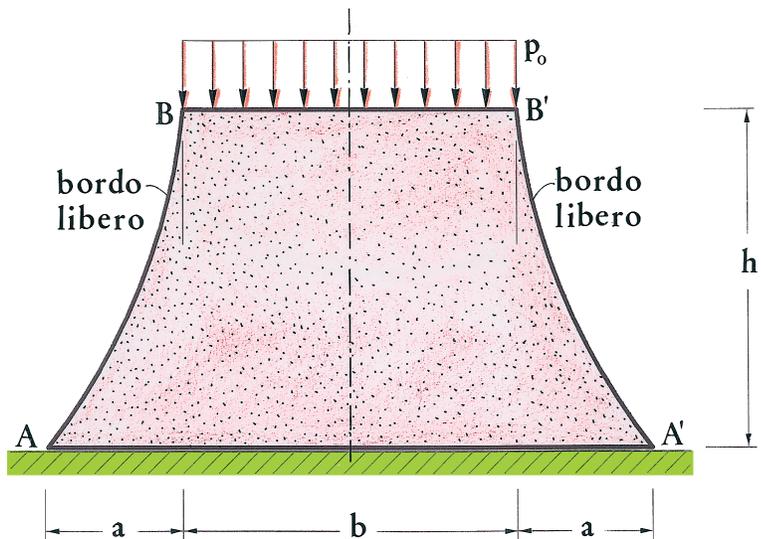


Fig. 8. - La lastra piana ottimale è lateralmente sagomata con due curve esponenziali.

della lastra affinché il lavoro esplicito dalle forze  $p_0$  sia il minimo possibile a parità di area. Questo problema è stato trattato da Neuber [16] ed il risultato è che le due curve laterali devono avere forma esponenziale e che, inoltre, le tensioni parallele al bordo devono essere costanti in ottemperanza al principio di democrazia.

È interessante osservare che la soluzione precedente si applica anche al cosiddetto problema del «balcone,» cioè alla determinazione della forma ottimale di una piastra sottile resistente a flessione che deve trasmettere delle coppie da un bordo all'altro (Fig. 9). Anche in questo caso troviamo che il lavoro delle coppie esterne  $M_0$  è minimo quando i lati curvilinei sono due curve esponenziali, e riscontriamo pure che lungo i bordi laterali il momento flettente è costante.

Sempre nell'ambito dei corpi sottili, un altro problema, per così dire complementare, è quello di trovare la forma migliore da assegnare ad un foro, praticato per qualche motivo tecnologico in una lastra piana elastica, affinché il disturbo provocato dalla sua presenza, misurato in termini di lavoro delle forze esterne sia minimo. Anche

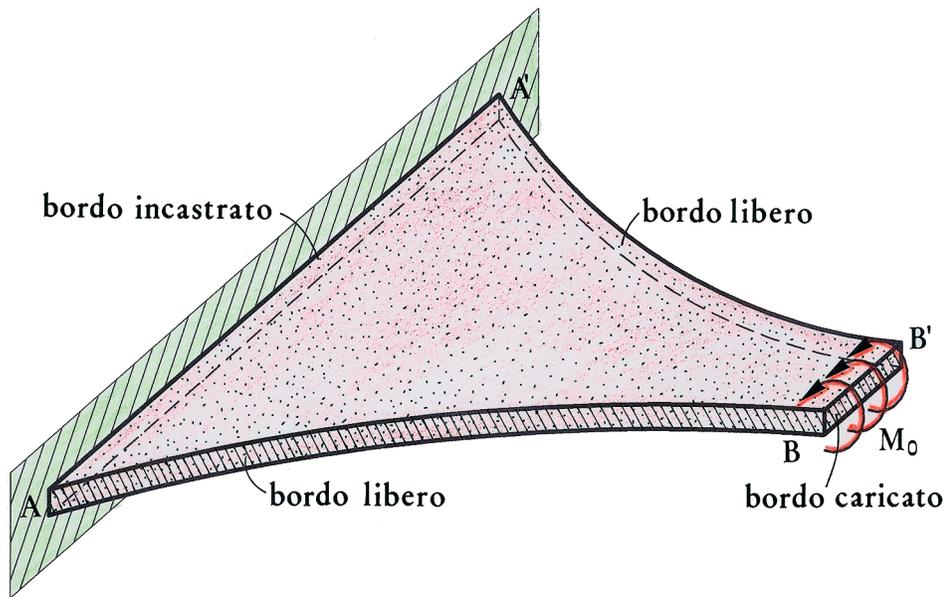


Fig. 9. – La piastra inflessa di massima rigidezza a parità di area ha il profilo costituito da due curve esponenziali.

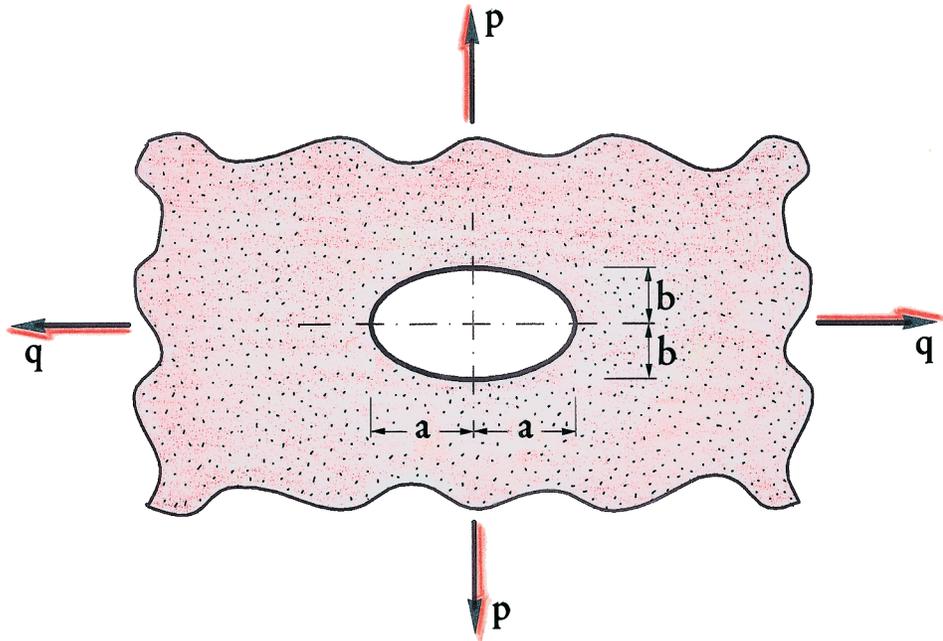


Fig. 10. – Il foro iso resistente è ellittico.

qui non possiamo rispondere alla questione in termini generali, ma certe soluzioni particolari ci illuminano. Per esempio, se la lastra è indefinita ed è tesa secondo due direzioni ortogonali da tensioni costanti diverse, diciamo  $p$  e  $q$  (Fig. 10), il foro ottimo è un'ellisse di semiassi  $a$ ,  $b$  tali che l'asse maggiore sia parallelo alla direzione del carico maggiore, che è  $q$  nel caso specifico. Questi fori hanno la proprietà che gli sforzi lungo il contorno sono costanti e sono detti fori «armonici» (v. Bjorkman e Richards [2]). Essi sono stati impiegati artigianalmente dai costruttori di macchine della fine dell'ottocento, ma, forse, già la natura, attraverso millenni di affinamento, aveva deciso la soluzione buona nello scegliere la forma delle occhiaie degli animali, di cui due esempi sono rappresentati nella Fig. 11. L'esempio (a) è descritto da D'Arcy Thompson [6] in riguardo alla *ovis poli* (così chiamata in onore di Marco Polo), quello (b) lo conosciamo tutti, ma, in entrambi i casi, non ne sappiamo il perchè. Probabilmente

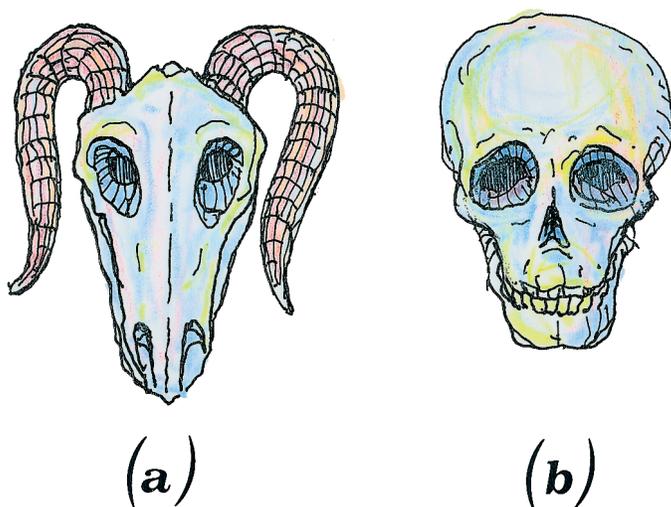


Fig. 11. – Due esempi di fori forse ottimi, ma non lo sappiamo ancora.

la forma oblunga è il risultato di un compromesso fra esigenze statiche e funzionali.

Talvolta conviene alleggerire una struttura togliendo il materiale dove esso non contribuisce molto al sostegno dei carichi esterni, ma, per evitare di dover risolvere problemi troppo complicati, decidiamo di effettuare l'alleggerimento secondo superfici semplici. Un esempio molto istruttivo è quello della piastra quadrata descritto da Eschenauer e Olhoff [7]. Supponiamo di dover scarnificare una piastra quadrata caricata da una forza concentrata nel suo centro inserendo quattro fori circolari (Fig. 12). Qui le condizioni al contorno giocano un ruolo determinante. Se la piastra è semplicemente appoggiata lungo i quattro lati conviene disporre i quattro fori nei punti medi dei lati. In una piastra incastata è meglio invece porli in corrispondenza dei vertici.

Talvolta è invece necessario irrigidire una piastra disponendo di rinforzi elastici di spessore costante e lunghezza assegnata lungo il bordo. Supponiamo, per fissare le idee, che la piastra sia quadrata di lato  $a$ , ma con due lati opposti appoggiati e due liberi (Fig. 13). Essa sia soggetta ad una forza verticale  $P$ , applicata nel centro. Supponiamo ora che il materiale di rinforzo sia una bacchetta di lunghezza  $t$

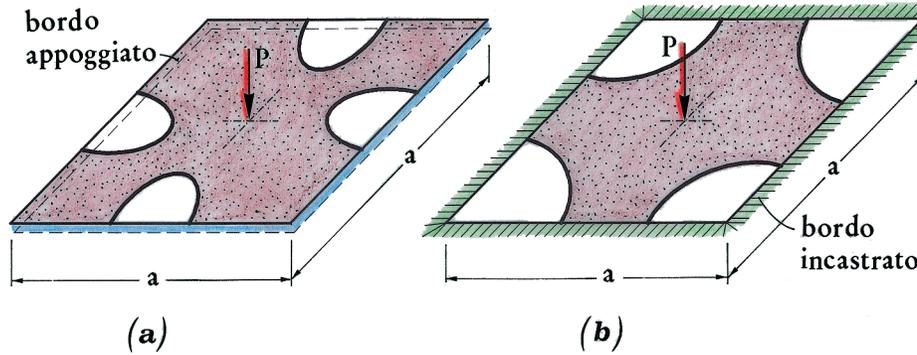


Fig. 12. - Nella piastra appoggiata i fori vanno collocati al centro di ciascun lato, in quella incastrata conviene porli ai vertici.

tale  $a$  che noi possiamo incollare ad arbitrio lungo qualche parte del bordo, eventualmente frazionando il materiale in pezzi. Noi vogliamo rendere minimo il lavoro della forza  $P$ , ma come disporre in rinforzo? Qui l'intuizione ci aiuta benissimo: la posizione ottima del rinforzo è costituita da due segmenti di rinforzo, ciascuno lungo  $a/2$ , collocati nelle parti mediane dei due lati liberi. E infatti gli ingegneri, quando devono rinforzare l'impalcato di un ponte con degli irrigidimenti periferici, usano questo accorgimento. Viceversa, se co-

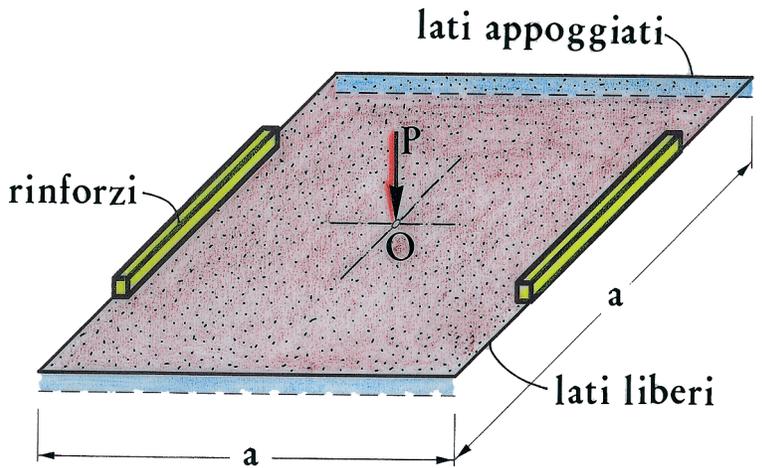


Fig. 13. - Il rinforzo laterale ottimo è costituito da due segmenti di lunghezze  $a/2$ .

chiamo di porre il problema in termini variazionali, la cosa è molto più difficile, persino nell'esempio della Fig. 13. Le difficoltà sono essenzialmente due. La prima è che, adesso, il funzionale da rendere minimo (il lavoro elastico della forza  $P$ ) è costituito da due parti, una dovuta all'elasticità della piastra, che è un integrale di superficie, ed una tenente conto dell'elasticità del rinforzo, che è un integrale di linea. La seconda difficoltà è che non sappiamo in partenza se le successioni minimizzate richiedano uno spezzamento sempre più fine del rinforzo al punto che non lo si riesce a caratterizzare matematicamente. Questi problemi sono stati studiati, ma i risultati ottenuti finora sono ristretti agli operatori del secondo ordine, mentre l'equazione della piastra sottile è di quart'ordine (v. Buttazzo [3]).

Tuttavia il metodo del rinforzo non è stato limitato alle parti di bordo di una struttura bidimensionale, ma ci si è posto il problema di inserire i rinforzi interni come i cordoni di saldatura. Il caso più istruttivo è quello di una lastra sottile infinita munita di un rinforzo localizzato lungo un intervallo di lunghezza  $l$  situato lungo una direzione fissa, e facciamo coincidere con l'asse  $x$  (Fig. 14). In un primo momento supponiamo un rinforzo di sezione trasversale costante caricato in  $x = -l/2$  da una forza assiale  $P$  nella direzione delle  $x$  negative. La determinazione degli sforzi longitudinali mutui fra l'irrigiditore e la lastra sottile è un problema molto difficile della teoria dell'elasticità per

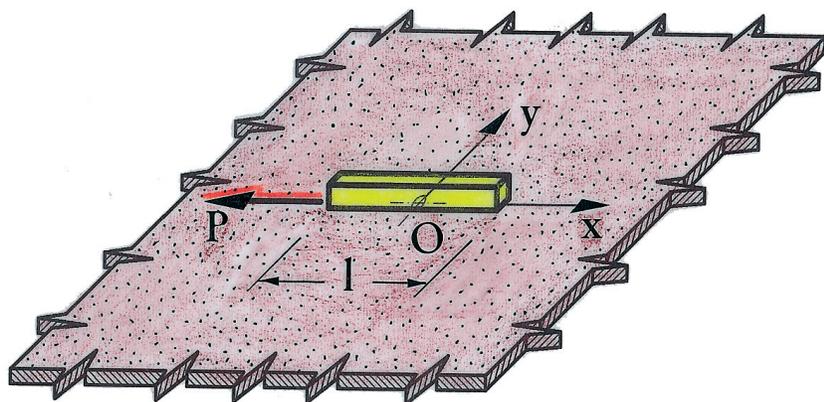


Fig. 14. - Il problema di un irrigiditore elastico saldato ad una lastra piana infinita.

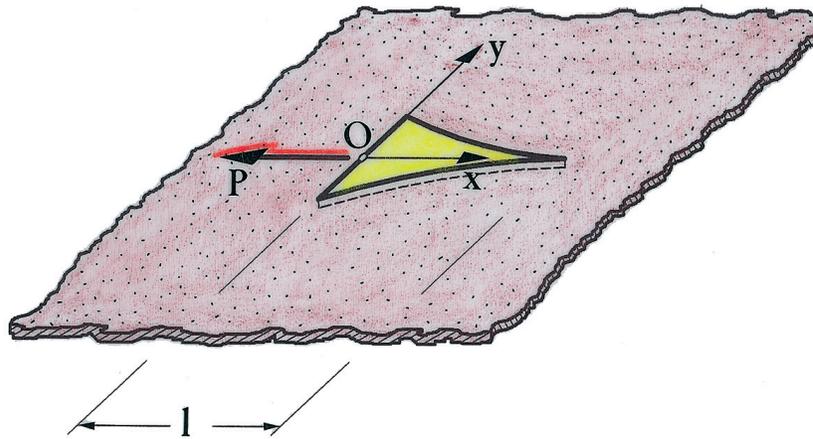


Fig. 15. - L'irrigiditore ottimo è una specie di cuneo rastremato.

esige la soluzione di un'equazione integrodifferenziale (v. Grigolyuk e Tolkachev [9]), che si sa risolvere solo in forma approssimata. Tuttavia, anche le soluzioni approssimate ci informano che alle parti estreme, in  $x = \pm l/2$ , sono le più cimentate, perchè, a causa della rottura, gli sforzi tangenziali sono ivi infiniti. Questo spiega perchè i cordoni di saldatura tendono a rompersi sempre in corrispondenza degli estremi. Viceversa la tensione assiale nell'irrigiditore varia lungo l'asse da un massimo nella sezione dove è applicata la forza fino ad annullarsi nell'estremo opposto. Allora, se vogliamo economizzare il materiale, non ci conviene usare un irrigiditore con sezione trasversale costante ma uno a sezione variabile. Se poniamo il problema in termini di minimo del lavoro compiuto dalla forza  $P$  troviamo che il profilo ottimo è una specie di cuneo con i lati arrotondati (Fig. 15). La forma analitica di questo profilo si può determinare esplicitamente (v. Grigolyuk e Tolkachev [9]), e gli sforzi assiali sono costanti dappertutto. La parte superiore di molti alberi d'alto fusto ha quasi esattamente questa forma rastremata in profondità (v. Mattheck [13]); ma anche il fusto di un albero, per evitare di essere strappato dal terreno, tende a essere rastremato (Fig. 16).

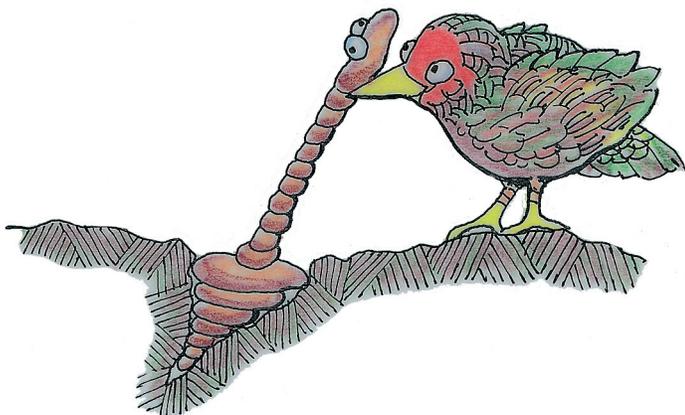


Fig. 16. - La difesa del lombrico.

## 5. - Ottimizzazione microscopica.

Fin qui abbiamo descritto dei procedimenti di ottimizzazione che operano sulla forma macroscopica di una struttura al fine di aumentarne la rigidità a parità di volume, oppure di eliminare il materiale laddove esso è poco cementato. Esiste tuttavia un altro tipo di ottimizzazione, detta microscopica, che si può descrivere così. Noi abbiamo a disposizione due materiali elastici  $S_1$  e  $S_2$ , che possiamo miscelare nelle proporzioni  $m_1$  e  $1 - m_1$ , variabili da punto a punto. Tuttavia il materiale  $S_1$ , più rigido, è anche più costoso, mentre il più soffice, costa meno. Noi vogliamo rendere una struttura la più rigida possibile, ma non vogliamo neppure spendere troppo. Usando solo il materiale  $S_1$  perchè, in certi punti, esso non è necessario. In termini variazionali, il problema si traduce nel rendere minimo un funzionale costituito dalla somma di due parti, il lavoro dei carichi esterni più il costo. Evidentemente questi due termini sono conflittuanti, sicchè ci possiamo aspettare che esista una distribuzione di sforzi interni e di frazioni  $m_1$ ,  $1 - m_1$ , tali da individuare il minimo del funzionale stesso. Qui, tuttavia, nasce una grossa difficoltà perchè il funzionale così costruito non è di tipo classico e le soluzioni minimizzanti convergono alla soluzione solo in una forma speciale detta G-convergenza. Su questo argomento c'è una vastissima

letteratura che si può trovare citata, per esempio, in un recente lavoro di Cherkhaev [4].

Tuttavia, accanto a questa trattazione classica, il problema di mescolamento è stato pure affrontato con metodi numerici, spesso molto eleganti, ma spesso poco istruttivi per illustrare la forma delle soluzioni ottimali. Un metodo molto semplice è quello delle «celle bucate» (Bendsøe [1]). Esso consiste nel suddividere una struttura, per esempio la lastra a mensola disegnata nella Fig. 17, in tante celle elementari di lato unitario, dove l'unità di misura è molto piccola rispetto alle dimensioni  $l$ ,  $h$  della lastra. Ciascuna cella, per esempio quella di vertici 1,2,3,4, costituente il reticolo, è una specie di telaio ottenuto rimuovendo un rettangolo interno di lati  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  (Fig. 1). Iniziamo partendo fissando le lunghezze di vuoto  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  in ciascuna cella. La geometria iniziale della struttura è ben definita, quindi possiamo terminare il lavoro di una forza esterna  $P$ , applicata, per esempio, in  $D$ . La soluzione ci avverte che certe cellette sono molto caricate mentre altre sono praticamente inerti. Allora togliamo materiale da

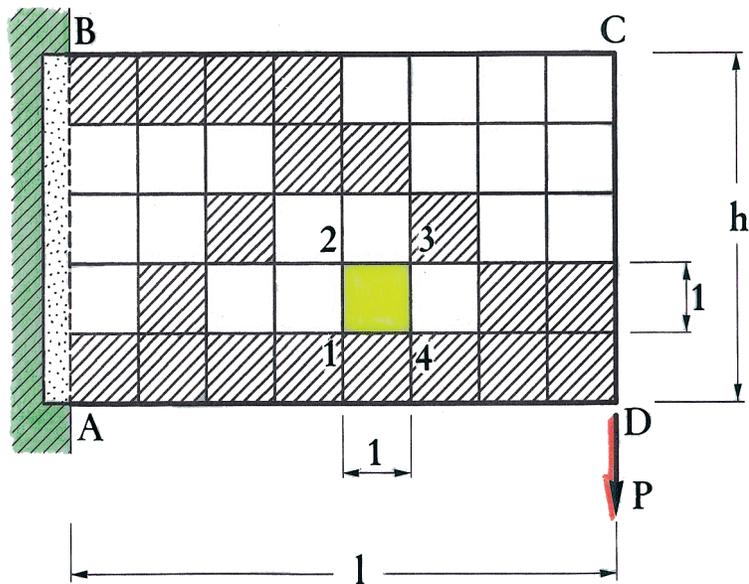


Fig. 17. – La lastra è suddivisa in celle quadrate di cui solo quelle scure contribuiscono al sostegno del carico  $P$ .

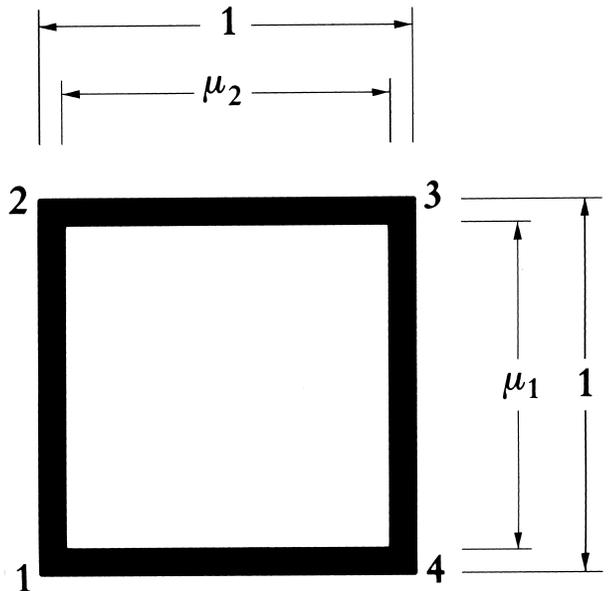


Fig. 18. – Ciascuna cella è formata addensando il materiale resistente lungo il bordo, mentre il centro è vuoto.

st'ultime e rimpolpiamo le prime, sperando di diminuire il lavoro. Se ciò avviene, ripetiamo il procedimento tante volte finchè i valori del lavoro non differiscano sensibilmente da un'iterazione a quella successiva; a questo punto, ci arrestiamo e dichiariamo come ossatura permanente la regione dove si addensano i quadratini più neri. Nel caso della mensola di Fig. 17 troviamo che le celle che collaborano di più al sostegno del carico tendono a configurare una specie di traliccio con braccia coincidenti più o meno con l'estradosso e l'intradosso, più un puntone obliquo interno. Si può obiettare che il metodo è essenzialmente euristico e privo di una giustificazione teorica precisa. Tuttavia in molti casi particolari dá risultati convincenti (v. Eschenauer e [7]) perchè si riesce a determinare quasi esattamente il profilo di ossatura portante immersa in un corpo esteso. Ed, in base al principio pseudometafisico che la natura risolve i problemi molti millenni prima della matematica, nella forma del becco di alcuni rapaci (Fig. 19) troviamo una sorprendente conferma della soluzione numerica consistente con il metodo dei quadratini.

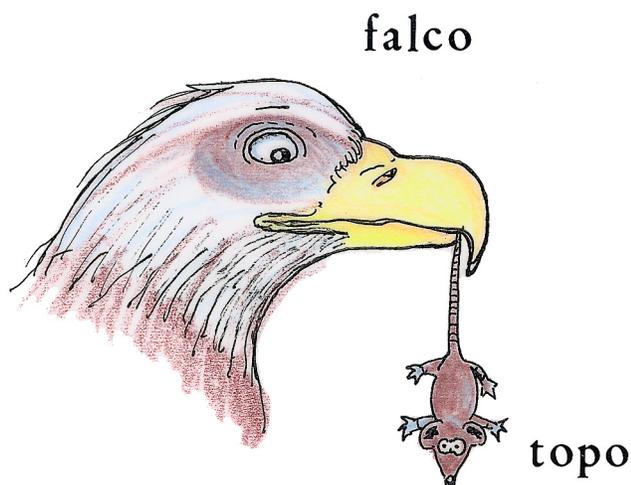


Fig. 19. – Il becco del falco pellegrino americano (da Collier's [5]) preda.

## 6. – Questioni pratiche.

Ma adesso ritorniamo ad altre questioni importanti della meccanica delle strutture che possiamo formulare in termini di calcoli delle variazioni, sebbene la loro soluzione sia ancora parziale. Il problema di determinare la forma migliore di un corpo elastico quando è soggetto a forze dinamiche intense indotte da urti violenti o da vibrazioni. Qui ci troviamo di fronte alla difficoltà ulteriore che le equazioni di campo sono di tipo iperbolico e non ellittico, come nel caso elastostatico. Con ciò il funzionale da rendere minimo dipende anche dall'energia cinetica oltre che quella elastica, e quindi alcune proprietà essenziali che lo rendono trattabile nel caso statico. Tuttavia i problemi di ottimizzazione dinamica sono molto vari e avvincenti. Uno è, per esempio, quello di rinforzare un edificio costruito in zona sismica (Fig. 20). Noi sappiamo dalle osservazioni che le scosse hanno ivi una certa frequenza ed una certa intensità, e ci chiediamo come disporre dei rinforzi in modo tale da rendere la struttura sufficientemente resistente allo stato di sforzo indotto dal sisma ma, nello stesso tempo, non troppo rigida onde

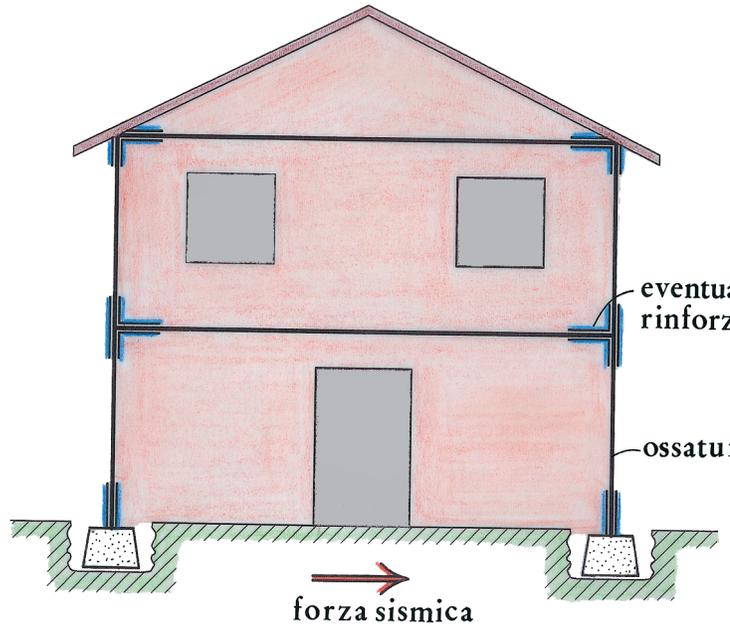


Fig. 20. – Come rinforzare una casa?

risonanza. Si pone dunque ancora una volta la necessità di bilanciare fra due esigenze conflittuali giocando con la quantità di materiale di rinforzo e la sua collocazione.

Un'altra questione di ottimizzazione dinamica è il dimensionamento delle cinture di sicurezza nell'abitacolo di un'automobile (Fig. 21). Se queste sono troppo rigide, il contraccolpo sul corpo in caso di scontro può essere letale, ma, se sono troppo elastiche, non servono perché il torace del guidatore si spiaccica contro il volante. Qual'è la risposta della matematica? Essa non è ovvia perché bisogna tenere conto di fattori fisiologici difficilmente quantificabili (Fig. 20 ora).

Ma ci sono ancora nuovi problemi in cui intervengono anche fattori non meccanici. Supponiamo di dover fabbricare un tessuto costituito da due strati superficiali separati da tanti filamenti trasversali abbastanza fitti e rigidi da mantenere mediamente costante lo spessore  $h$  dell'intercapedine (Fig. 22). Il tessuto deve avere

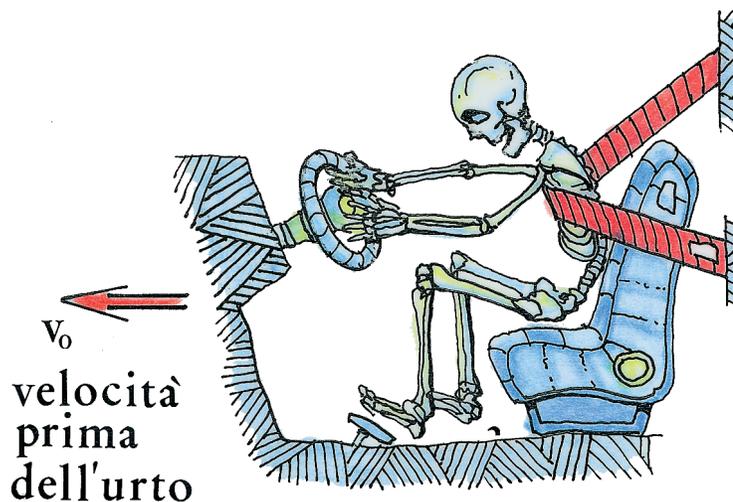


Fig. 21. – Come devono essere fatte le cinture di sicurezza?

zione di isolatore termico tale cioè da mantenere la più alta temperatura interna dello strato inferiore anche quando la temperatura è terribilmente bassa. Ma come disporli affinché siano sufficientemente rigidi e, nello stesso tempo, non rendano eccessivo il peso unitario del tessuto? Anche gli sforzi dei tecnologi, forse ignari di matematica, hanno prodotti tessuti eccellenti, tali da far avanzare tante attività umane, come, per esempio, la scalata delle montagne. È molto probabile che, con l'uso di questi indumenti, Irvine e Mallory avrebbero raggiunto

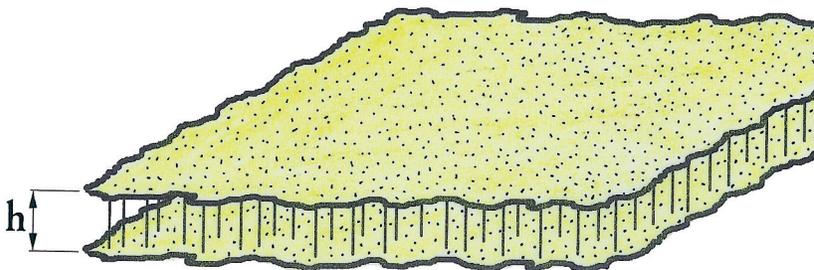


Fig. 22. – Un tessuto termicamente isolante costituito da due strati estrinsecamente trasversali.

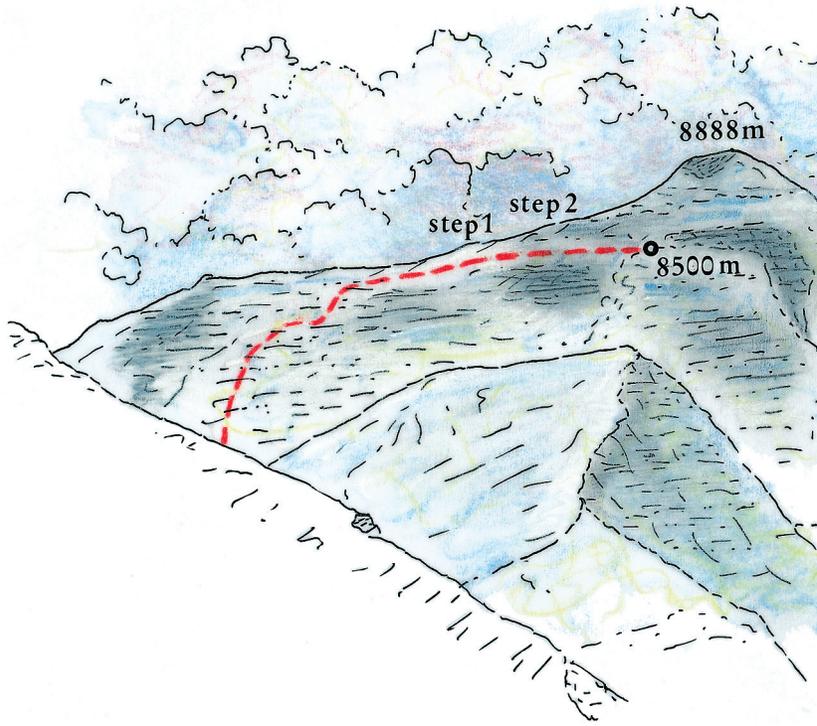


Fig. 23. – Le scalate in condizioni estreme hanno successo se, soprattutto, si evitano le fendite dai congelamenti.

dell'Everest in occasione del loro eroico sfortunato tentativo del maggio 1924 (Fig. 23).

E ci sono, per concludere, altre applicazioni promettenti della teoria dell'ottimizzazione strutturale. Da qualche decennio i matematici si sono interessati al problema delle protezioni: vale a dire di come sistemare le viti nei sostegni temporanei, di una frattura, oppure di sagomare un collo di femore d'acciaio. Qui la situazione è ancora descrivibile, ma supponiamo, per esempio, di dover sostituire un tratto d'aorta con uno spezzone di tubo. Il tubo sostitutivo deve essere costituito da un materiale che abbia proprietà meccaniche il più vicine possibile al tessuto originale, inoltre bisogna che nei punti di collegamento non ci s...

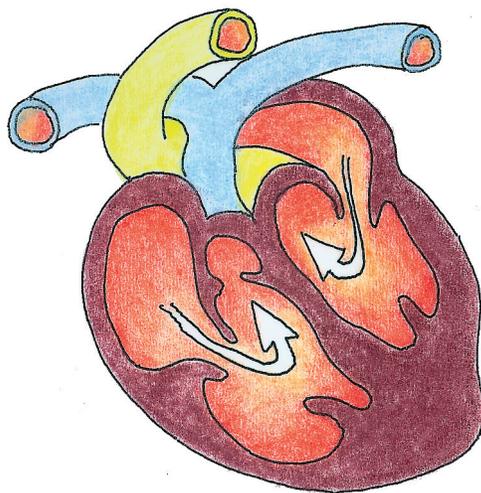


Fig. 24. – Come sostituire un pezzo d'aorta o d'arteria polmonare?

siva concentrazione di sforzi, ed infine che il nuovo materiale sia biocompatibile onde evitare il rigetto. Sicuramente assistiamo nei prossimi decenni a soluzioni molto brillanti a questi affascinanti problemi.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] M. P. BENDSØE, *Optimal shape design as a material distribution problem*, Struct. Optim., Vol. 1 (1989), 193-202 (cf. anche Bendsøe, M.P.: *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*, Springer (1995)).
- [2] G. S. BJORKMAN JR. - R. RICHARDS JR., *Harmonic holes for non-stress fields*, J. Appl. Mech., Vol. 46 (3) (1979), 573-576.
- [3] G. BUTTAZZO, *Thin insulating layers: the optimization point of view*, Proc. of Mat. Inst. in Cont. Mech. and Rel. Math. Problems (Ed. by G. Buttazzo), 19. Oxford: Un. Press (1988).
- [4] A. CHERKAEV, *Variational Methods for Structural Optimization*, New York: Springer (2000).
- [5] COLLIER'S ENCYCL., *Birds*, ed. H.I. Fisher, New York: Crowell-Co.
- [6] W. D'ARCY THOMPSON, *On Growth and Form*, Cambridge: Un. P.

- [7] H. A. ESCHENAUER - N. OLHOFF, *Topology optimization of structures: A review*, Appl. Mech. Rev., Vol. **54**, n. 4 (2001), 33-43.
- [8] J. E. GORDON, *Structures or Why Things Do Not Fall Down*, Longman (1978).
- [9] E. GRIGOLYUK - V. TOLKACHEV, *Contact Problems in the Theory of Plates and Shells*, Moskow: Mir (1987).
- [10] J. B. KELLER - G. R. VERMA, *Hanging rope of minimum elongation*, Appl. Mech. Rev., Vol. **26** (1984), 569-571.
- [11] J. B. KELLER, *The shape of the strongest column*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. **5** (1968), 275-285 (cf. anche Truesdell, C.A.: *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788*, Orell Füssli (1960)).
- [12] C. LANZOS, *Variational Principles of Mechanics*, Toronto: Un. P. (1969).
- [13] C. MATTHECK, *Design in Nature. Learning from Trees*, Berlin-Heidelberg: Springer (1998).
- [14] A. G. MICHELL, *The Limits of Economy of Material*, Phil. Mag. Ser. 4, Vol. **8** (1904), 589-597 (cf. anche Banichuk, N.V.: *Introduction to Optimal Structures*, Springer (1990)).
- [15] M. MIRANDA, *Recenti progressi nel Calcolo delle Variazioni*, Boll. U.M.I., Vol. **17-A** (1980), 209-225.
- [16] H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Berlin-Heidelberg: Springer (1963).
- [17] I. SZABÓ, *Einführung in die Technische Mechanik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer (1963).
- [18] I. SZABÓ, *Geschichte der mechanischen Prinzipien*, Basel: Birkhäuser (1963).
- [19] J. VINCENT, *Stealing ideas from nature*, R.S.A. Journal, Vol. **1** (1997), 36-43.

Piero Villaggio, Dipartimento di Ingegneria Strutturale  
Università di Pisa, I-56126 Pisa