

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

MARIA DEDÒ

## Mostre di matematica: divulgazione e rinnovamento didattico

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura (2004), n.1, p. 77–99.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2004\\_8\\_7A\\_1\\_77\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_1_77_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Mostre di matematica: divulgazione e rinnovamento didattico.

M. DEDÒ

### Introduzione.

Questo articolo nasce dall'osservazione, in corso ormai da tre anni, delle reazioni del pubblico alla mostra *Simmetria, giochi di specchi*, e da un'analisi delle diverse esperienze didattiche che sono state proposte e si sono realizzate a latere della mostra stessa.

Questa, dopo alcune preliminari uscite pubbliche dal 1997 al 1999 in occasione delle Settimane della Cultura Scientifica, è stata inaugurata nella sua forma attuale nel maggio del 2000, ed è da allora aperta al pubblico (e in particolare alle visite delle classi scolastiche) per almeno due giorni alla settimana.

La sua ubicazione (nei locali del Dipartimento di Matematica *F. Enriques* dell'Università degli Studi di Milano) ci rende possibile sia un continuo monitoraggio delle reazioni del pubblico, sia l'utilizzazione della mostra per attività didattiche di vario tipo, in particolare per quelle attività di prima formazione e formazione in itinere degli insegnanti che sono di competenza istituzionale del Dipartimento (attraverso la collaborazione con la Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario e con il Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria).

In questi tre anni la mostra, nel suo allestimento di Milano<sup>(1)</sup>, è stata visitata da circa 20.000 persone; in particolare, da più di 600

<sup>(1)</sup> La mostra ha anche una versione itinerante, che ha già avuto vari allestimenti (Piacenza, Pontassieve, Madrid, Pisa, Ivrea, Torino, Aosta, Bergamo); si calcola un numero anche più alto di visitatori per questi allestimenti, in particolare per quello di Madrid che da solo ha realizzato più di 100.000 visitatori. In quanto segue, però, si farà riferimento perlopiù soltanto all'allestimento milanese, perché naturalmente è l'unico che ci ha permesso un monitoraggio continuo e diretto.

classi scolastiche, abbastanza equamente ripartite tra classi di scuola elementare, di scuola media e di scuola superiore.

Ci pare quindi che sia giunto il momento in cui possiamo estrapolare da tutte queste osservazioni qualche considerazione di carattere generale, forti del fatto che queste sono ora avvalorate da una base sperimentale di respiro abbastanza largo.

Gli obiettivi della mostra erano (e sono) in primo luogo diretti alla divulgazione della matematica, sganciati cioè da un automatico travaso all'ambito della didattica in generale e dell'insegnamento scolastico in particolare. Tuttavia, ovviamente, la massima parte dei visitatori della mostra sono stati studenti, di scuole di diverso ordine e grado, e i loro insegnanti.

Ma non si tratta soltanto di una questione numerica. L'osservazione delle reazioni del pubblico, e il contrasto tra queste reazioni e certi atteggiamenti (di indifferenza, di passività) che da più parti vengono lamentati come una delle cause della scarsa efficacia dell'insegnamento della matematica, ci ha posto in modo naturale delle domande, le cui risposte abbiamo voluto testare in tutta una serie di esperimenti didattici che hanno ruotato intorno alla mostra in questi anni: sia esperimenti gestiti da noi in prima persona e diretti essenzialmente agli insegnanti in formazione (laboratori pedagogico-didattici per la Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario e per il Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria; ma anche corsi di aggiornamento per insegnanti in servizio), sia esperimenti in classi scolastiche, gestiti da insegnanti che dopo una visita alla mostra hanno voluto, mantenendosi in contatto con noi, utilizzare alcuni spunti per un successivo lavoro in classe<sup>(2)</sup>. Vorremmo quindi qui tirare le fila di questa esperienza e proporre alla discussione gli elementi che ci sembrano più significativi.

È chiaro che il lavoro didattico di tutti i giorni non è sostituibile con una visita a una mostra, e non vogliamo certo proporre una mostra (né una mostra in generale, né questa in particolare) come fosse una «bachetta magica» col potere di risolvere tutti i problemi legati all'insegna-

<sup>(2)</sup> Alcune di queste esperienze sono state poi inserite nel sito della mostra: vedi <http://specchi.mat.unimi.it>.

mento e all'apprendimento della matematica. Piuttosto, quello che la nostra osservazione ha messo in luce è che lo spirito sottostante a un'esperienza come questa propone in realtà un atteggiamento e un metodo di lavoro che riteniamo utile e anzi necessario anche in un contesto scolastico e non solo in un contesto divulgativo.

Ci proponiamo quindi di dare una risposta in positivo all'interrogativo contenuto nel titolo di un articolo uscito recentemente sulle pagine di questo Bollettino (vedi [DS]); non vogliamo però proporre un articolo sulla mostra (anche se abbondano gli esempi e i riferimenti a questa particolare esperienza), ma piuttosto un articolo focalizzato sui problemi connessi all'insegnamento della matematica, che si richiama fortemente alle tesi già espresse in [D] e che vuole appoggiarsi all'esempio di questa esperienza per dare concretezza a queste tesi e per trarne delle indicazioni operative.



Fig. 1. – Dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi*, per gentile concessione.

## 1. – L'apprendimento attivo.

Un fatto che a lungo andare si è notato in modo molto esplicito nelle reazioni alla mostra da parte delle diverse categorie di pubblico è che queste passano immancabilmente attraverso quattro stadi successivi: possono cambiare i tempi di questi passaggi, può in alcuni casi non avvenire il passaggio da uno di questi stadi a quello successivo, cambiano sicuramente le modalità di estrinsecazione di questi passaggi (le reazioni a una «scoperta» da parte di un bambino di sette anni non sono certo le stesse di quelle di un adulto!), ma è abbastanza impressionante come la tipologia di questi stadi sia analoga per tutte le categorie di visitatori, dai bambini di scuola elementare agli studenti di scuola secondaria o anche universitari, agli insegnanti, agli adulti di qualsiasi tipo di formazione.

I quattro stadi a cui ci riferiamo sono:

- 1) una prima reazione improntata essenzialmente alla meraviglia;
- 2) uno stadio in cui il visitatore vuole mettersi in gioco in prima persona, provare direttamente a «fare» delle cose, e non limitarsi a osservare cose fatte da altri;
- 3) uno stadio di ricerca di consapevolezza critica, in cui la persona si pone delle domande, si chiede il «perché?» di certi fenomeni che ha osservato;
- 4) infine, lo stadio in cui si cerca una risposta a queste domande <sup>(3)</sup>.

Naturalmente le domande che si pone un bambino di seconda elementare sono molto diverse da quelle che si pone uno studente universitario davanti agli stessi oggetti, ma questa successione di stadi è del tutto analoga.

È chiaro che, dal punto di vista della ricerca di una gestione ottimale delle potenzialità dello strumento-mostra, il problema

<sup>(3)</sup> E la ripartizione in stadi osservata in questo contesto trova riscontro nelle moderne teorie pedagogiche che vedono la distinzione tra una fase legata al sorgere degli interessi e delle motivazioni, una fase legata al «fare attivo» che produce conoscenze locali o episodiche, e infine una progressiva ricerca di sistematicità nell'acquisizione della conoscenza.

sta nella fluidità dei passaggi tra questi diversi stadi: e, da questo punto di vista, quello che si è osservato senza possibilità di dubbi, in TUTTE le categorie di pubblico, è come sia facile e naturale il passaggio dal secondo al terzo stadio e dal terzo al quarto (purché naturalmente si rispettino i tempi di ciascuno; e questo è un punto fondamentale che verrà ripreso più volte anche in seguito): nel momento in cui una persona si mette direttamente in gioco, si lascia coinvolgere, e prova a «fare» delle cose in prima persona, risulta poi quasi automatico, dopo un lasso di tempo più o meno breve (che — questo sì — dipende dal soggetto) che si ponga delle domande e cerchi una maggiore consapevolezza rispetto a quello che sta facendo; e, infine, che cerchi (da sé o con l'aiuto di altri) delle risposte a queste domande.

Viceversa, il passaggio più critico, il passaggio che non è automatico, il passaggio che va curato, il passaggio che può a volte non avvenire, è quello dal primo al secondo stadio, da una fase di stupore, improntata essenzialmente a un «guardare», a una fase improntata al «fare».

Dal punto di vista delle mostre, questo è un punto cruciale, se si vuole che l'esperienza della visita a una mostra non si fermi al livello dello stupore per i fenomeni osservati e di un generico «che bello!». L'interattività gioca quindi un ruolo fondamentale, e sottolineiamo come in questo caso stiamo parlando di una interattività «forte»: non si tratta cioè soltanto di schiacciare un bottone, o un tasto di computer, e osservare una animazione già predisposta da altri, ma il visitatore deve qui interagire liberamente con gli oggetti a disposizione, mettendo in campo tutti gli strumenti che già possiede, compresa la sua fantasia.

Naturalmente si potrebbe anche pensare di forzare i tempi, «saltare» i due stadi intermedi e andare subito al dunque: prevedere cioè una sorta di «visita guidata», che (calibrando il linguaggio a seconda del tipo di interlocutore) vada subito al quarto stadio, a fornire le risposte. E questa è, troppo spesso, la strada che si sceglie nella scuola (dove magari si salta anche il primo stadio), forzati da una (malintesa, a mio avviso) necessità di rispettare certi tempi e «finire il programma». Nella mostra *Simmetria, giochi di specchi* non è

stata fatta questa scelta, e le guide presenti hanno indicazione di non fare — in linea di massima <sup>(4)</sup> — una visita guidata, ma piuttosto di accompagnare il visitatore e incoraggiarlo nei due passaggi intermedi, e fornire spiegazioni solo alle domande formulate dal visitatore stesso (sia pure opportunamente sollecitate).

La convinzione che sta alla base di questa scelta (e che per l'appunto si applica non solo al contesto di una mostra, ma anche a un contesto di tipo scolastico) è che qualunque forma di apprendimento/insegnamento è vana, o quanto meno effimera, se non raggiunge l'obiettivo di provocare la partecipazione attiva di chi apprende: insomma, serve a poco fornire le risposte se non si è riusciti prima a provocare le domande. E magari si può utilizzare a questo scopo la fase dello stupore e della meraviglia, che possono anche «spiazzare» l'interlocutore mettendo in crisi degli schemi acquisiti <sup>(5)</sup>; ma, affinché questo conduca poi a porsi delle domande, occorre comunque che si passi attraverso un momento in cui, in un modo o nell'altro, la persona arrivi a sentirsi direttamente coinvolta.

Tanto per citare un esempio, accade (abbastanza frequentemente) che un visitatore si incuriosisca sui cartelloni che contengono gli schemi dei fregi e dei mosaici e che chieda spiegazioni sui motivi per cui i tipi di fregi sono solo 7 e i tipi di mosaici 17; in tal caso certo non si può, vista la sede, dare una «dimostrazione» di questo risultato, ma è ben possibile dare una serie di giustificazioni che lo rendano «ragionevole». Sarebbe ben diverso, però, dare le stesse giustificazioni nell'ambito di una visita guidata, a chiunque, e in particolare anche a chi non le aveva chieste e non si era (o non si era ancora) po-

<sup>(4)</sup> Le «eccezioni» a questa «regola» riguardano essenzialmente gli studenti degli ultimi anni della scuola superiore, fascia di età in cui è più alto il rischio che il messaggio della mostra venga sottovalutato, e gli oggetti presenti vengano interpretati come generici «giochini»: in questi casi è opportuna una preliminare «visita guidata», che miri essenzialmente solo a far intravedere tutto il peso della matematica sottostante, ma lasci poi tempo e spazio per i due stadi intermedi menzionati, ed è opportuno ritornare al momento delle spiegazioni solo quando ciascuno abbia fatto anche esperienza personale diretta dei fenomeni coinvolti.

<sup>(5)</sup> E l'utilità di questo fenomeno di «spiazzamento» al fine di rinsaldare le proprie conoscenze è stata ampiamente studiata dal punto di vista cognitivo (vedi [W], dove si trovano un gran numero di esempi di carattere matematico).

sto questo problema. Si può fare, certo, ma resterebbe — a mio avviso — completamente inutile: la persona si troverebbe nelle condizioni di «subire» queste spiegazioni — e molto probabilmente le dimenticherebbe dieci minuti dopo.

Esattamente come è completamente inutile insegnare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado (tanto per fare un esempio qualsiasi, ma lo stesso discorso si applica a qualunque altro argomento) a chi non si è ancora posto il problema di cosa significhi risolvere un'equazione, e non senta l'esigenza del fatto che potrebbe fargli comodo una tale formula: senza questa esigenza la persona subirà la formula, e possiamo solo sperare che se la dimentichi al più presto, perché altrimenti la userà a sproposito e senza alcuna consapevolezza dello strumento che sta usando.

Mi piace qui citare l'esempio recente di un amico, reduce da una visita all'Alhambra, che, dopo che gli era successo di fronte ai mosaici di cercare disperatamente di riconoscere i vari gruppi, quando è tornato mi ha posto una serie di domande sulle strategie per questo riconoscimento; in realtà però aveva già incontrato in precedenza queste strategie, e, nel momento in cui se ne è reso conto, è uscito con l'affermazione: «... *quello che mi è successo è molto istruttivo sul piano didattico: si gode delle risposte infinitamente di più se prima ci si è scontrati autonomamente con le domande*».

Per tornare al discorso dei quattro stadi, occorre quindi essere in grado di favorire il passaggio dal primo al secondo stadio, che come abbiamo detto è l'unico non automatico. Come si può fare? Per quanto riguarda la nostra osservazione nell'ambito della mostra *Simmetria, giochi di specchi*, anche questo passaggio risulta quasi automatico con le fasce di età più bassa (i bambini di scuola elementare, e la quasi totalità dei ragazzi di scuola media <sup>(6)</sup>), mentre è più delicato con i ragazzi

<sup>(6)</sup> Ivi compresi i casi di ragazzi «difficili», con problemi comportamentali o con handicap fisici notevoli. Questa osservazione richiederebbe naturalmente una analisi *ad hoc* più approfondita, che in questa sede esula dai nostri obiettivi: ci limitiamo qui a registrare il fatto che non è stato infrequente il caso di insegnanti che ci hanno segnalato con vivo stupore il comportamento attivo, interessato e partecipe di ragazzi che avevano sempre avuto in tutto il loro iter scolastico un atteggiamento non solo totalmente passivo, ma addirittura al limite dell'autistico.

più grandi e con gli adulti, con i quali scatta spesso una forma di paura a mettersi in gioco in prima persona. In effetti, nell'ambito della mostra, è stata posta una grande attenzione agli elementi che potessero favorire questo passaggio, anche fra le categorie più «restie»; e, nella maggioranza dei casi, il passaggio riesce, anche se — come abbiamo avuto ampiamente modo di constatare — può avvenire in modi (e tempi!) molto diversi da una persona all'altra.

Uno degli elementi che possono aiutare in questa direzione è sicuramente fornito dalla ampiezza e vastità del tema (la simmetria), e dalle sue ramificazioni in tante discipline e/o aspetti della vita quotidiana, ben al di là della matematica: c'è quindi chi entra in risonanza per i suoi interessi di tipo artistico (e i cartelloni della mostra possono facilitare questo approccio), chi invece perché un problema proposto gli ha ricordato un suo proprio modo di affrontare un problema specifico della sua professione (dal piastrellista alla sarta!), chi cerca e trova un nesso fra gli argomenti proposti e altre cose che fanno parte — direttamente o indirettamente — del suo personale vissuto, chi semplicemente si incuriosisce di fronte alla «sfida» di qualcuno fra i problemi proposti.

Un altro elemento che favorisce il delicato passaggio dal primo al secondo stadio (dal «guardare» al «fare») è l'estrema libertà lasciata a questo livello: nella fase del «fare» il nostro scopo è che il visitatore passi poi al terzo stadio e arrivi a formulare delle domande, e quindi l'unica cosa davvero importante è che osservi. Non c'è un «fare giusto» o un «fare sbagliato»: c'è semmai un «fare» acritico e fine a se stesso (ma è raro, ed è compito delle guide evitarlo) e un «fare» che porta a una ricerca di consapevolezza su ciò che si sta facendo. Per fare un esempio concreto che si richiama agli oggetti della mostra, quando un visitatore mette nel caleidoscopio relativo al cubo <sup>(7)</sup> il mattoncino che permette di ricostruire l'immagine virtuale di un certo poliedro (nell'immagine in figura, una stella octangola), e lo mette in modo «sbaglia-

<sup>(7)</sup> Nella mostra sono presenti tre caleidoscopi, costituiti da tre specchi ciascuno, nei quali si possono ricostruire alcuni poliedri; a disposizione del visitatore ci sono i «mattoncini» che servono per ricostruire i poliedri che si trovano disegnati in un cartellone posto in corrispondenza del caleidoscopio stesso.

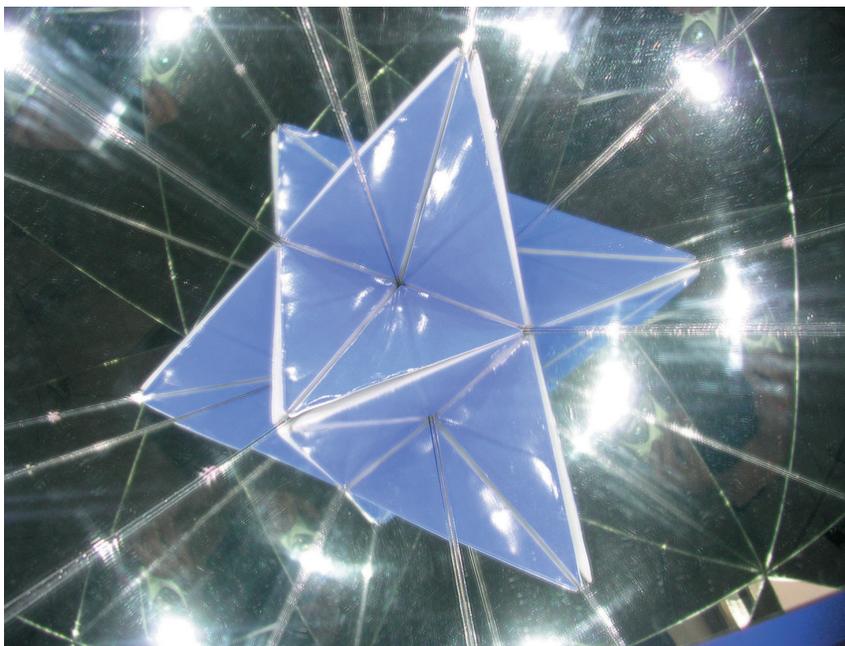


Fig. 2. - Dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi*, per gentile concessione.

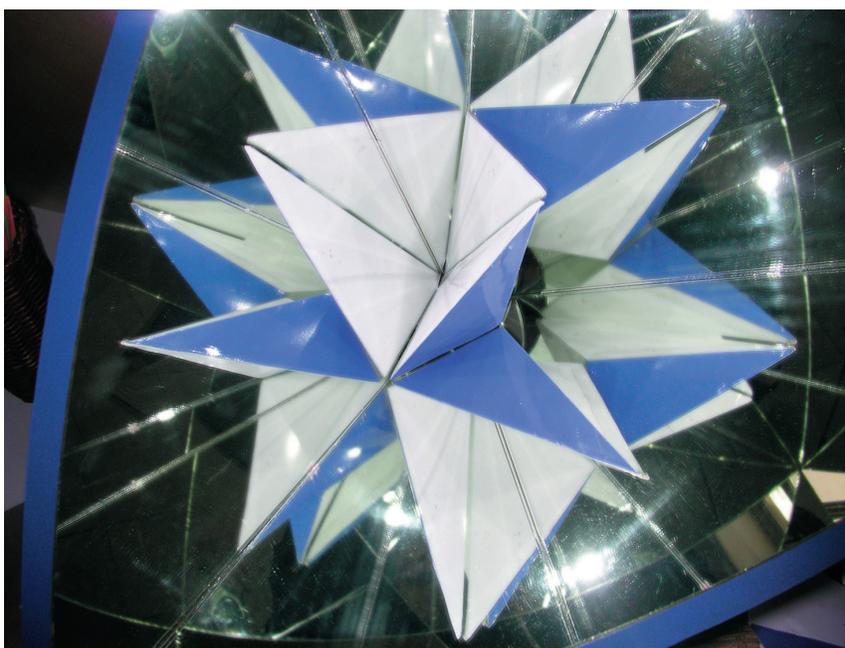


Fig. 3. - Dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi*, per gentile concessione.

to», quello che vede non sarà la stella octangula, ma sarà comunque un oggetto che ha la stessa simmetria del cubo: e quindi intanto è un oggetto «bello» da vedere (e il tentativo non è frustrante), e poi è un oggetto che, avendo la stessa simmetria di un cubo, va bene, tanto quanto l'altro poliedro «previsto», allo scopo (che è quello a cui miriamo) di far comprendere il tipo di simmetria di una figura tridimensionale e di far notare per esempio che cosa ci sia di diverso rispetto a figure che si ottengono negli altri caleidoscopi.

Questo senso di «libertà» sembra essere particolarmente prezioso per quel tipo di pubblico (assai comune) che soffre di prevenzioni e paure rispetto alla matematica, e che spesso si sblocca proprio quando si rende conto che — in questa fase — non ci sono compiti che prevedano una «risposta giusta» o una «risposta sbagliata», ma la richiesta è semplicemente quella di osservare l'effetto delle proprie azioni.

Viceversa, questa «libertà» sembra essere più difficile da gestire per i visitatori più consapevoli, e con più elementi di conoscenza pregressi: i ragazzi più «bravi» in matematica degli ultimi anni di liceo, gli studenti universitari (di matematica), gli insegnanti. Questi a volte si paralizzano, e pretendono di non «fare» nulla finché non abbiano prima completa contezza del fenomeno e non siano in grado di prevedere quel che accade, il che non sempre è l'atteggiamento più adatto. In realtà poi, se la persona si sblocca, il fenomeno che si constata è l'acquisizione di una maggiore scioltezza nella comunicazione e nella descrizione dei fenomeni coinvolti e, anche, una maggiore consapevolezza nell'uso dei concetti matematici sottostanti: un concetto astratto è più saldamente acquisito, quando si riconosce e si domina la sua presenza in situazioni concrete.

In conclusione, la «filosofia» sottostante alla mostra è che ogni apprendimento debba essere un apprendimento attivo: come abbiamo trovato scritto da un bambino su uno dei quaderni che lasciamo in mostra per le firme «*creare simmetrie è molto più divertente che ricopiarle a scuola sul quaderno*» e possiamo aggiungere che è anche molto più istruttivo.

Questo è un fatto certamente non nuovo, e anche ormai universalmente riconosciuto e accettato dalla grande maggioranza delle teo-

rie pedagogiche <sup>(8)</sup>. Ciò che però a mio avviso viene talvolta trascurato è che questa affermazione (se non si vuole che resti una frase vuota e fine a se stessa) comporta come naturale conseguenza la necessità di una maggiore e migliore attenzione ai contenuti di ciò che si insegna.

È quasi tautologico osservare che si può forzare qualcuno a un apprendimento passivo, ma viceversa non si può forzare nessuno a «apprendere attivamente»: è quindi necessario investire tempo ed energie nella creazione di contesti che «facciano venire voglia di» apprendere attivamente; e, se questo sforzo non viene fatto, l'apprendimento attivo resta una dichiarazione di intenti vuota di significato.

Ora, al fine di cercare e creare i contesti più adatti (più adatti perché ricchi e stimolanti, più adatti perché portano poi come conseguenza anche l'acquisizione di certe capacità che si valutano irrinunciabili), occorre inevitabilmente entrare nel merito dei contenuti, ed entrarci in maniera profonda. E, incidentalmente, può essere forse anche questa una via attraverso la quale superare quel pericoloso distacco tra i matematici e i cultori di didattica della matematica di cui parla Villani in [V].

È abbastanza ridicolo parlare di apprendimento attivo e poi non fare degli esempi, in positivo, di come si possa realizzare questo apprendimento attivo. Non possiamo realisticamente pensare che sia possibile creare un contesto in cui si suscitino la voglia di apprendere se tutto quello che sappiamo proporre sono cinquanta esercizi, tutti finalizzati esplicitamente all'acquisizione di una certa micro-capacità, e quindi tutti dello stesso tipo; ed è intrinsecamente contraddittorio sostenere la tesi dell'apprendimento attivo e contemporaneamente non entrare nel merito di (o avallare) testi scolastici che pongono esclusivamente interminabili esercizi meccanici di calcolo

<sup>(8)</sup> Basti qui richiamare la riscoperta, anche nella formazione universitaria, dell'apprendimento attivo attraverso pratiche laboratoriali. Un testo significativo che fonda l'importanza del laboratorio, sia per sollecitare i processi di apprendimento dei bambini, sia per la formazione di adulti insegnanti è [DB]; la teoria dell'attività ha un suo fondamento forte anche in Vygotskij (vedi [Vy]); e, per fare qualche esempio sul piano più strettamente matematico, nei lavori di Freudenthal (vedi, per esempio, [F]) e in quelli di Polya (vedi, per esempio, [P]).

(dalle espressioni con le frazioni ai calcoli di aree e volumi,...)<sup>(9)</sup>, o «quiz» che puntano a verificare l'apprendimento mnemonico e meccanico di proprietà e «definizioni» (a volte anche sbagliate!).

## 2. – I contenuti.

Si è già osservato che uno dei motivi che a nostro parere ha causato le reazioni positive alla mostra è la ricchezza e la profondità del tema, sia al di fuori della matematica (e questo come si è detto può essere un elemento prezioso per abbattere quel muro di diffidenza che molte persone hanno nei confronti della nostra disciplina), sia anche all'interno della matematica stessa: ed è su quest'ultimo punto che vorremmo fare qui qualche considerazione.

La profondità del tema è ciò che permette che gli stessi oggetti e gli stessi fenomeni possano essere usati per illustrare concetti matematici diversi, a diversi livelli di astrazione: si va da una semplice osservazione di forme, di somiglianze e diversità, di analogie e differenze, a questioni via via più complesse come la visualizzazione delle trasformazioni piane, la relazione fra il numero di immagini che si formano tra due specchi incidenti e l'angolo fra gli stessi, ...; e poi ancora la struttura di gruppo, il confronto fra geometria euclidea e geometria sferica, i sottogruppi discreti di isometrie piane,... E non sono oggetti diversi, ciascuno dei quali illustra uno di questi concetti, ed è quindi adatto solo a una certa fascia di età e/o di cultura matematica, ma è lo stesso oggetto che si presta a illustrare l'uno o l'altro di questi temi: sta solo all'intelligenza della guida il fatto (e non è poco!) di cogliere qual è il livello di astrazione a cui il suo interlocutore si sta ponendo, e interagire rispetto a quel livello (o a un livello giusto un pochino più alto)<sup>(10)</sup>. È quindi il visitatore a decidere, con

<sup>(9)</sup> E questi esercizi sono anche abbastanza anacronistici in un momento in cui è chiaro che non servono — contrariamente a ciò che poteva essere vero settanta anni fa — persone che sappiano «fare i conti», ma persone che abbiano affinato la capacità di controllare un calcolo e di seguirne il filo, e di dare un senso a ciò che il calcolo può fare.

<sup>(10)</sup> E anche questa osservazione, che nasce dal riscontro quotidiano di ciò che accade in mostra, ben trova riscontro in pedagogia, nel criterio della «zona di sviluppo prossimale» di Vygotskij (vedi [Vy]).

il suo comportamento e con le sue domande, qual è il livello a cui si pone, e a rendere possibile che in questo modo siano rispettati i tempi di apprendimento che sono gioco forza diversi da persona a persona: lo sono già anche all'interno di un gruppo sostanzialmente omogeneo per preparazione e fascia di età come può essere una classe scolastica, figuriamoci quanto lo possono essere per il pubblico di una mostra, che comprende visitatori di ogni tipo!

Una cosa che abbiamo osservato, all'inizio con un certo stupore e poi con continue conferme, è che non esiste un «livello minimo» di età per certi problemi<sup>(1)</sup>: può capitare che bambini di scuola elementare — e anche molto piccoli — risolvano in maniera molto naturale problemi che valutavamo abbastanza difficili, e che sapevamo mettere in crisi anche il pubblico di una certa età e maturazione matematica: «*sono laureando in matematica, ma i bambini sono più bravi di me*» è una frase trovata su uno dei libri per le firme, scritta da una persona che peraltro non se ne è risentita, ma ha apprezzato l'esperienza, dato che aggiunge anche i «*complimenti per l'idea*».

Naturalmente questo accade solo per una percentuale relativamente piccola di bambini (e la «libertà» che lasciamo nel gestire la visita alla mostra non ci permette di dire se non accade con gli altri perché non sono in grado di risolvere quel problema o semplicemente perché non lo hanno trovato interessante e hanno volto la loro attenzione a qualcosa'altro); non così piccola, però, da essere ritenuta trascurabile: e sarebbe un vero peccato, per questi bambini, togliere loro l'opportunità di confrontare le loro intelligenze in crescita con dei problemi interessanti, solo perché ritenuti a priori «troppo difficili». Naturalmente ciò non deve avvenire a scapito di altri: ma la varietà dei livelli di lettura riesce appunto a ottenere questo risultato; anzi, viceversa, episodi di questo genere possono risultare assai stimolanti non solo per il singolo bambino, ma per l'intero gruppo di cui fa parte, se sono gestiti in modo opportuno e in un contesto che si presta a questo scopo.

Analogamente, la varietà dei livelli di lettura riesce, a volte, a ottenere il risultato che ragazzi e insegnanti possano confrontarsi in-

<sup>(1)</sup> Anche questo pregiudizio dell'età minima è negato dall'attuale psicologia dell'insegnamento.

sieme sullo stesso problema; in realtà non è mai esattamente «lo stesso» problema: anche se apparentemente lo può essere, chi ha un grado di maturazione maggiore si pone poi automaticamente un problema più complesso (come funziona in generale?, cosa «c'è sotto»?); Questo non è un obiettivo facile da raggiungere, perché si tratta di rompere degli schemi radicati (ad esempio il fatto che l'insegnante debba, sempre e comunque, conoscere la «risposta esatta» ad ogni domanda ...); occorre quindi coinvolgere gli insegnanti in questo processo, sottolineando il fatto che il loro approccio agli oggetti e ai problemi proposti va a influenzare l'approccio stesso dei ragazzi, e che il loro «non conoscere a priori la risposta esatta» può costituire un'occasione estremamente positiva per legittimare in modo autentico quel processo di ricerca comune tra studente e insegnante che, quando accade, ha delle conseguenze estremamente positive (e che non può accadere quando è solo gestito come una finzione, perché l'insegnante conosce in partenza le risposte).

Peraltro, come ha ampiamente argomentato Cuoco in un articolo uscito recentemente su questo Bollettino (vedi [C]), è fondamentale che il processo di formazione degli insegnanti (e, aggiungerei, il processo del loro continuo aggiornamento) preveda anche delle effettive esperienze di «ricerca»; dove, come dice Polya in [P], avere delle esperienze di ricerca non significa nient'altro che avere delle opportunità di «lavoro creativo al livello appropriato».

Tornando al tema della profondità dei contenuti, è proprio questa libertà di chiavi di lettura diverse — che offre a ognuno (insegnanti compresi) la possibilità di fare esperienza al proprio livello di maturazione — che non sarebbe possibile con un tema più superficiale e/o più circoscritto.

Ed è sempre la profondità del tema che ha reso possibile, da parte di molti insegnanti (sia di scuole elementari, che di scuole medie e superiori <sup>(12)</sup>), partire da una visita alla mostra per un percorso di-

<sup>(12)</sup> E universitari: anche se esula dagli interessi di questo articolo, vale la pena citare il fatto che gli oggetti della mostra si sono prestati anche per lezioni ai corsi di geometria, algebra, topologia a studenti di tutti gli anni di corso (struttura di gruppo; analisi delle isometrie piane; presentazioni di gruppi con generatori e riflessioni; azioni di gruppi, orbite e domini fondamentali; gruppi dei fregi e gruppi dei mosaici; sottogruppi discreti di isometrie; orbifolds euclidee e ellittiche; gruppi di Coxeter, ...).

dattico che si agganciasse con qualcuno dei temi di cui si erano viste illustrazioni.

Su questo argomento vale la pena raccontare un episodio; avevamo notato che, mentre alcuni insegnanti avevano immediatamente una reazione positiva, cogliendo tutte le potenzialità della mostra anche per il loro lavoro successivo, altri avevano un atteggiamento diverso: anche se non mancavano di apprezzare la visita per i loro allievi, tuttavia non ne vedevano possibili ricadute: «*sì, è tanto bella, ma che cosa c'entra? Che cosa c'entra con il programma, con quello che devo fare in classe, con quello che c'è sul libro?*». A seguito di questi commenti, abbiamo preso un libro di scuola media (ma lo stesso «esercizio» si può fare con libri di scuola di livelli diversi) e abbiamo registrato su un foglio i titoli di capitoli o paragrafi che avevano un addentellato con i temi della mostra, e anche, più in dettaglio, singoli «fatti» o «esercizi» proposti nel libro che nella mostra trovavano una esplicita illustrazione, che si potevano «vedere» nella mostra. La lista è risultata assai lunga, e successivamente è stata usata in alcuni incontri con insegnanti (in laboratori per la scuola di specializzazione, ovvero in corsi di aggiornamento), come proposta di «cercare» direttamente nella mostra l'illustrazione di questi fatti. Ne è risultata una visita «anomala», ma assai costruttiva, e anche i più scettici sull'esistenza di questi addentellati hanno dovuto ricredersi.

E, naturalmente, è la profondità del tema che rende possibile questa varietà di agganci con fatti matematici diversi (e quindi, in particolare, con i «programmi» scolastici a ogni livello).

### **3. – L'immagine della matematica.**

Non c'è dubbio che l'immagine che hanno della matematica la maggior parte delle persone adulte (e spesso anche non adulte) è uno stereotipo cupo, grigio, opprimente e oppressivo: la matematica sono i calcoli; la matematica è quella cosa per cui le risposte sono giuste o sono sbagliate; la matematica è quella cosa per cui c'è una sola strada per arrivare alla risposta di un quesito, e se non si imbocca quella strada si è finiti; la matematica è quella cosa dove tutto è predeterminato meccanicamente e non esiste spazio per l'intui-

zione e per la fantasia; la matematica è quella cosa per cui non si possono comunicare a nessuno le proprie difficoltà e non si può cercare un aiuto.

Questi stereotipi sono comunissimi, e ovviamente sono molto dannosi, perché bloccano a priori una strada serena di apprendimento; non parliamo poi del danno che possono fare gli stessi stereotipi quando sono presenti anche fra chi insegna la matematica: e questo non è infrequente nella scuola dell'obbligo dove quasi tutti i docenti che insegnano matematica non hanno una formazione specifica in questa direzione.

Come si abbattano? Le vie che a volte si vedono percorse per raggiungere questo scopo sono essenzialmente di due tipi: la prima comporta un «indoramento della pillola», che passa attraverso presentazioni molto elaborate e molto curate sia dal punto di vista degli «effetti speciali», sia dal punto di vista del messaggio direi quasi «pubblicitario»; la seconda comporta un mascheramento della matematica presentandola esclusivamente attraverso la mediazione delle sue applicazioni ad altre discipline o ad altri contesti.

In realtà entrambe queste strade, anche se partono da una giusta esigenza, contengono a mio parere un equivoco; sembra quasi che si sia d'accordo sull'ipotesi di fondo e si cerchi solo un compromesso: *«sì, è vero che la matematica è brutta, ma io ve la faccio diventare (o sembrare) bella, perché ve la presento con giochini, fumetti e fuochi d'artificio»; «sì, lo so che non vi piace, però pensate al fatto che può essere utile per realizzare un CD, e certo voi sarete d'accordo sul fatto che i CD sono qualcosa di fondamentale».*

Viceversa, se siamo convinti che la matematica possa costituire una esperienza culturale bella e interessante di per sé, occorre dirlo senza mascherature, occorre presentarla per quel che è, e non c'è bisogno di «farla diventare» bella, se si pensa che bella lo sia; occorre, questo sì, cercare i temi che più si prestano a questa comunicazione; ed è utile certo anche ricercare gli elementi di effettivo contatto con altre discipline; ed è anche opportuno curare al meglio la forma della presentazione (le mattonelle della mostra sono rosse, gialle e blu, e non sono certo in diverse

tonalità di grigio!); ma non bisogna appiattare su questi elementi TUTTO il messaggio che si vuole trasmettere.

Se gli stereotipi di cui si diceva provengono da esperienze personali negative (come accade nella stragrande maggioranza dei casi), l'unica via per abatterli è quella di far compiere alla persona delle esperienze matematiche positive. Non basterà allora «raccontare» o mostrare che la matematica non è grigia ma è colorata, che contiene delle cose che sono molto «belle», che la fantasia è uno strumento prezioso per l'indagine matematica: bisogna che la persona lo provi, che lo esperimenti in prima persona, che sia messa in un contesto in cui le risulti naturale fare direttamente esperienza di matematica.

#### 4. – Gli insegnanti.

Tutti i discorsi precedenti assumono un particolare rilievo nel contesto della preparazione degli insegnanti. Vale quindi la pena spendere qualche parola in più su questo tema, e sulle esperienze che abbiamo condotto nell'arco di questi anni nei laboratori pedagogico-didattici per il corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria e per la Scuola di Specializzazione. In questo paragrafo, quindi, focalizzeremo il problema sulla formazione degli insegnanti nella fascia della scuola dell'obbligo.

Questo è un tema particolarmente delicato: gli interlocutori (studenti del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria, perlopiù provenienti da licei psico-pedagogici; allievi della Scuola di Specializzazione, perlopiù laureati in biologia o in scienze naturali) hanno sovente non solo una preparazione insufficiente sul piano dei contenuti, ma soprattutto un'immagine estremamente negativa e distorta della matematica, proveniente dalle loro pregresse esperienze.

Si trova su [LC] la denuncia (riportata a sua volta da un saggio di Lester e Garofalo del 1979) del fatto che la maggioranza dei bambini di III elementare presenta una serie di convinzioni a priori sulla matematica, che risultano poi paralizzanti rispetto alla loro capacità di porsi di fronte ai problemi. Ad esempio quasi tutti pensano che:

- la difficoltà di risolvere un problema dipende dalla grandezza dei dati coinvolti;
- tutti i problemi possono essere risolti con una o più «operazioni»;
- c'è un unico modo corretto per risolvere un problema;
- l'operazione di «controllare i risultati» è perlopiù superflua.

Mi pare che non ci si possa stupire del fatto che queste sono le convinzioni dei bambini se si riscontra che anche le categorie che indicavo prima (cioè i loro futuri insegnanti) hanno spesso esattamente le stesse convinzioni (con la differenza che l'età le ha rese più radicate) <sup>(13)</sup>.

Su questo dato pesantemente negativo si innesta un problema assai delicato, ossia il problema di decidere quali contenuti siano utili e opportuni per i corsi di matematica diretti a questi contesti: il problema non è banale, perché l'atteggiamento negativo di cui sopra porta sovente a un rifiuto a priori di qualunque contenuto non sia (o si pensa non possa essere) immediatamente e in quanto tale «spendibile» anche con i ragazzi della fascia di età che si troveranno di fronte nella loro futura professione.

Questo atteggiamento, che comporta un appiattimento dei contenuti da trasmettere ai futuri insegnanti esclusivamente sui contenuti che essi andranno a trasmettere ai loro futuri allievi, è un atteggiamento estremamente pericoloso: un insegnante che non sa una virgola in più rispetto alle cose che deve insegnare è un insegnante insicuro, che non domina la materia, che riproporrà lo stesso meccanismo passivo di insegnamento/apprendimento che ha a suo tempo subito, e che non potrà far altro che ritrasmettere ai suoi allievi le stesse convinzioni che hanno determinato il suo atteggiamento negativo nei confronti della matematica.

È sulla base di queste considerazioni che la mostra è stata usata nei laboratori: di nuovo la possibilità dei più livelli di lettura è stata

<sup>(13)</sup> E la correlazione tra le concezioni dei docenti e gli atteggiamenti dei loro allievi, peraltro abbastanza ovvia, è anche stata ampiamente discussa e provata: vedi [A].

qui preziosa, perché permetteva l'introduzione di argomenti più profondi (e quindi la trasmissione di contenuti non soltanto appiattiti sui contenuti del futuro insegnamento), ma contemporaneamente mostrava in modo concreto e tangibile come questi contenuti non fossero slegati dai livelli più immediati e diretti delle visite dei ragazzi, ma viceversa fossero preziosi per poterle gestire al meglio; e questa doppia lettura ha permesso in molte occasioni di superare l'ostilità a priori degli interlocutori.

Inoltre, per quel che riguarda la necessità di sfatare alcune convinzioni a priori, sono convinta che non sia possibile demolirle con una «lezione» in cui «si dimostri» che certe cose sono false: l'unica maniera è far sperimentare, sulla propria pelle, la falsità di certe ipotesi di partenza.

Tanto per citare un esempio (che si riferisce a un laboratorio per il corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria), si è provato questo esperimento: due gruppi di allievi avevano in mano una figura, abbastanza elaborata (di quelle che nella mostra usiamo per la ricerca di eventuali assi di simmetria di una figura piana<sup>(14)</sup>) e ciascun gruppo doveva descriverla all'altro, il quale poi doveva ricostruirla sulla base delle indicazioni ricevute. L'esperienza è stata molto costruttiva: sul piano dei contenuti, ha comportato la necessità di chiarire quali elementi in una figura sono fondamentali, e quali accessori; quali caratteristiche sono determinate da altre (e quindi inutili da dichiarare), e quali viceversa sono indispensabili per la realizzazione. Sul piano del metodo, gli allievi hanno potuto «toccare con mano» (il che è ben diverso dal sentirselo raccontare!) che non c'è una sola via per affrontare un problema: la stessa figura poteva essere descritta — correttamente — in più modi diversi, e questo non ha mancato di suscitare stupore e spiazzamento.

E nello stesso esperimento gli allievi hanno avuto anche modo di sperimentare direttamente un fatto fondamentale quale la necessità del rispetto dei tempi propri di ciascuno: che è un'altra questione

<sup>(14)</sup> Uno degli exhibit presenti nella mostra è costituito da uno specchio con una fessura sottostante: infilando un disegno sotto questa fessura, si può verificare se il disegno ha un asse di simmetria in corrispondenza dello specchio.

spesso trascurata nella scuola (e che difficilmente si impara attraverso semplici enunciazioni di principio, senza testarla su esempi vissuti in prima persona).

Quest'ultima questione è particolarmente delicata per quanto riguarda l'insegnamento della matematica, se si pensa — e io ne sono convinta — che l'introduzione di un concetto astratto o di una formalizzazione prima di quando la maturazione dell'allievo lo consenta, sia non solo un'operazione del tutto inutile, ma addirittura dannosa e controproducente (cfr. [D]). La mostra, e in particolare le considerazioni che già abbiamo fatto e non stiamo qui a ripetere sulla possibilità di chiavi di lettura diverse, ben si presta a far vivere in concreto esempi di questo tipo.

Una frase trovata su un elaborato finale di un'allieva della Scuola di Specializzazione (che dopo un laboratorio sulla mostra aveva condotto il tirocinio su questi temi) è ben adatta a illustrare lo spirito



Fig. 4. — Dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi*, per gentile concessione.

con cui si è cercato di condurre questi laboratori per futuri insegnanti: *«...durante il laboratorio mi sono sentita come vorrei si sentissero i miei alunni nell'affrontare un argomento nuovo (magari di matematica!) e cioè con l'entusiasmo e la curiosità per la scoperta di chi è coinvolto emozionalmente in ciò che sta affrontando».*

## 5. – Costruzione di un libero itinerario didattico.

Un fatto che balza all'occhio osservando una visita «normale» alla mostra è l'impressione di totale libertà, o quasi addirittura di «anarchia»; e proprio questo aspetto è anche spesso ciò che sconcerta e spiazza — in positivo e in negativo — il visitatore. Ma, a ben guardare, tutta questa libertà è in realtà abbastanza ferreamente predisposta: il visitatore si sente (ed è!) libero di usare gli oggetti che crede, nella maniera che crede, ma in realtà è stato semplicemente creato un contesto in cui si trova spontaneamente ad usarli esattamente come noi avevamo predisposto che venissero usati, dando risalto a quegli aspetti che li rendono, dal nostro punto di vista, significativi.

Come ci ha scritto una guida dell'allestimento pisano: *«...in realtà trovare il modo giusto di avvicinarsi alle persone, senza essere invasivi, ma cercando anche di invitarli a riflettere, non è affatto un compito facile ... al primo impatto, nonostante la preparazione iniziale che ci era stata fornita, ci sentivamo un pochino intimoriti e temevamo di non saper fronteggiare le situazioni. Dopo i primi giorni però, abbiamo scoperto che è la mostra a coinvolgere naturalmente le persone e a “parlare” con il visitatore ... sono i bambini stessi a chiederti attenzione, coinvolgerti e stupirti con le loro domande, la loro fantasia e la loro capacità di imparare subito ad interagire con gli oggetti esposti e gli adulti a incuriosirsi, chiedere spiegazioni e schede di approfondimento e porre domande a cui alle volte non è stato facile dare risposta ... alle volte dà anche davvero molta soddisfazione, ad esempio quando una persona che inizialmente sembrava perplessa o impaurita rimane prima affascinata, e poi sempre più incuriosita e coinvolta, ed è proprio la mostra così come è stata concepita che offre a noi la possibilità di assistere a scene come questa!»*

Ma in realtà la riuscita di esperimenti di questo genere non dipende solo dal lavoro «a monte», cioè dal predisporre un contesto sufficientemente ricco, che si presti a un uso degli oggetti su molteplici livelli, e che favorisca la genesi di problemi e domande. Questo è certo un aspetto, ma c'è un altro aspetto fondamentale che è per l'appunto il ruolo delle guide, che hanno un compito estremamente delicato, perché, come si è illustrato, compete loro in primo luogo ascoltare, e cercare di capire qual è il livello a cui l'interlocutore si pone, qual è la sua «zona di sviluppo prossimale» (vedi [Vy]), ossia il livello dove si colloca l'apprendimento, livello di cose che uno magari da solo ancora non riesce a fare, ma potrebbe essere in grado di fare con un opportuno aiuto; e, poi, essere in grado di interagire esattamente a QUEL livello.

Questo non è affatto un compito facile, ed è reso più difficile dalla varietà di livelli possibili, e dalla diversità dei tempi di passaggio da un livello a quell'altro: ma si tratta di una difficoltà rispetto alla quale non ci sono «scorciatoie» che ne permettano il superamento, ma occorre piuttosto concentrare le energie per risolvere al meglio il problema della scelta e della formazione delle persone preposte a questo tipo di mediazione.

E, a mio parere, del tutto analogo (pur con le ovvie distinzioni!) è il problema che si pone nell'insegnamento scolastico; anche un insegnante con la sua classe ha un compito di mediazione tra i ragazzi e la disciplina che insegna, e si tratta di un compito non banale e per il quale non esistono facili scorciatoie: ed è proprio rispetto a questo compito, difficile e delicato, che l'università può e deve interagire con gli insegnanti per fornire loro spunti e supporti adatti.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Nota Bene. La bibliografia comprende esclusivamente i libri e gli articoli citati nel testo.

- [A] A. ANTONIETTI - M. CANTOIA, *La mente che impara*, La Nuova Italia, 2001.  
 [C] A. CUOCO, *La matematica per l'insegnamento*, BUMI, sez.A, serie VIII, vol. V-A, dicembre 2002, pp. 473-490.

- [CL] O. CORNOLDI - D. LUCANGELI, *Metacognizione e matematica*, in Albanese, Doudin, Martin (a cura di), *Metacognizione e educazione*, Franco Angeli, 2000.
- [D] M. DEDÒ, *Più matematica per chi insegna matematica*, BUMI, sez.A, serie VIII, vol. IVA, agosto 2001, pp. 247-275.
- [DB] F. DE BARTOLOMEIS, *Sistema dei laboratori*, Feltrinelli, 1978.
- [DS] S. DI SIENO, *Mostre di matematica: soltanto una nuova moda o una strategia interessante?*, BUMI, sez. A, serie VIII, vol. V-A, dicembre 2002, pp. 491-514.
- [F] H. FREUDENTHAL, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, 1994.
- [P] G. POLYA, *La scoperta matematica*, Feltrinelli, 1971
- [V] V. VILLANI *Matematica, didattica della matematica, ricerche in didattica della matematica*, BUMI, sez. A, serie VIII, vol. V-A, aprile 2002, pp. 1-24.
- [Vy] B. L. S. VYGOTSKIJ, *Pensiero e linguaggio*, Giunti e Barbera, 1966.
- [W] M. WERTHEIMER, *Il pensiero produttivo*, Giunti e Barbera, 1966.

Maria Dedò, Dip. di Matematica «F. Enriques», Univ. di Milano,  
Via C. Saldini, 50 - 20133 Milano  
maria.dedo@mat.unimi.it  
<http://specchi.mat.unimi.it>