Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Carlo Toffalori, Stefano Leonesi, Sonia L'Innocente

Cinquanta anni di Teoria dei Modelli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.2, p. 347–381.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_2_347_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Agosto 2004, 347-381

Cinquanta anni di Teoria dei Modelli.

CARLO TOFFALORI - STEFANO LEONESI
SONIA L'INNOCENTE

1. – Introduzione.

La Teoria dei Modelli ha ormai raggiunto ufficialmente i 50 anni di età; ora, i tempi della scienza sono assai diversi da quelli della comune esistenza umana, e dunque una disciplina cinquantenne può ancora ritenersi giovane a pieno titolo, senza bisogno di lifting, ritocchi e contraffazioni. E pur tuttavia, cinquanta anni costituiscono un periodo abbastanza ampio per poter consentire bilanci, suggerire un resoconto e, forse, trarre conclusioni ed azzardare prospettive.

Così lo scopo di queste note è quello di illustrare la Teoria dei Modelli, le sue motivazioni, la sua evoluzione e, soprattutto, le sue applicazioni: le interazioni con altri rami della Matematica (Algebra, Analisi, Geometria Algebrica), ma anche alcuni recenti ed avvincenti collegamenti con l'Informatica Teorica.

Cercheremo di presentare questi argomenti con un linguaggio accessibile anche ai non addetti ai lavori e, in genere, a chi non ha familiarità con la Logica (della quale la Teoria dei Modelli è comunemente pensata un settore) ed anzi non ama i suoi dettagli, ritenendoli, come sosteneva Poincaré, più un impedimento che un vantaggio alla ricerca matematica: del resto uno dei nostri principali obiettivi è quello di dimostrare, o almeno insinuare, il contrario, e cioè che la Teoria dei Modelli può dire qualcosa di nuovo e di significativo in Matematica.

Il nostro stile sarà conseguentemente informale e colloquiale, e quindi fatalmente esposto a qualche imprecisione. Ne chiediamo scusa in anticipo. Del resto i lettori interessati a maggiori dettagli ed approfondimenti potranno trovare qualche utile riferimento nelle note bibliografiche poste al termine del lavoro. In particolare rimandiamo a [5] per maggiori notizie storiche e a [6] per approfondimenti in Teoria dei Modelli.

2. – Che cosa è la Teoria dei Modelli.

La prima domanda che è ragionevole porsi e doveroso trattare è, proprio, che cosa sia la Teoria dei Modelli. A questo proposito, ecco l'illustre parere formulato nel 1954 da uno dei suoi padri.

A. Tarski, 1954 [10]: «*Negli ultimi anni, un nuovo ramo della Metamatematica si è andato sviluppando. Si chiama Teoria dei Modelli e può essere considerato come una parte della semantica delle teorie formalizzate. I problemi studiati nella Teoria dei Modelli riguardano le mutue relazioni tra gli enunciati delle teorie formalizzate e i sistemi matematici in cui questi enunciati valgono*».

Dunque da un punto di vista classico, la Teoria dei Modelli si interessa di

strutture, formule, verità:

studiare quando una formula può essere soddisfatta in qualche ambiente («*modello*») matematico.

Ma, prima di approfondire questo discorso, osserviamo come la citazione di Tarski colloca la nascita «ufficiale» della Teoria dei Mo-

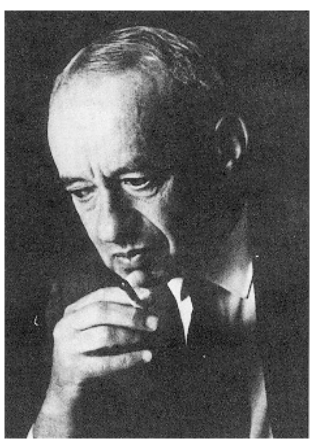

Fig. 1. – Alfred Tarski.

delli proprio negli anni '50. Si potrebbe obiettare che l'evoluzione scientifica rifugge naturalmente da troppo rigidi riferimenti anagrafici, e questo vale anche nell'ambito particolare della Teoria dei Modelli. Anzi si potrebbe sostenere con qualche fondamento che certi classici sviluppi della Matematica del passato anticipano gli interessi della Teoria dei Modelli. Ad esempio, lo studio di Gauss, Bolyai, Lobacevskij, Riemann ed altri, volto a ricercare prospettive assiomatiche «non-standard» (cioè non euclidee) per la Geometria e, soprattutto, ad individuare ambienti in cui le nuove visioni si applicano, può essere interpretato in questo senso senza eccessive forzature.

Lo stesso si può sostenere a proposito dell'idea di Hilbert e Dedekind di assiomatizzare singole strutture a meno di isomorfismi (e dunque individuare condizioni delle quali la struttura considerata è l'unico modello). Così, la struttura $(\boldsymbol{N}, s, 0)$ formata dai naturali, dall'elemento 0 e dalla funzione *successore* s (quella che trasforma ogni naturale nel numero che lo segue immediatamente, in altre parole l'addizione con 1) si caratterizza – a meno di isomorfismi – come l'unico modello del classico Principio di Induzione (e di altre semplici condizioni che affermano che la funzione s è iniettiva e che 0 non appartiene all'immagine di s): questo è quanto ci insegnano Peano e Dedekind. Allo stesso modo, il campo ordinato dei reali è caratterizzato (proprio grazie ad Hilbert) dalla sua completezza, dal fatto cioè che ogni insieme di reali superiormente, o inferiormente, limitato ha un estremo superiore, o un estremo inferiore: i famigerati *sup* e *inf*. Per altre strutture, tuttavia, classificazioni altrettanto calzanti ed incisive sembrano assai ostiche da ottenersi.

Altri spunti di Teoria dei Modelli si individuano facilmente nello sviluppo della Logica Matematica nella prima metà del XX secolo. Tra essi possiamo citare l'eliminazione dei quantificatori, sulla quale avremo modo di tornare in dettaglio nella seconda parte del nostro lavoro: contributi fondamentali all'argomento risalgono già agli anni '20, a Löwenheim, Skolem, Langford e Tarski. Ancora a proposito di Löwenheim e Skolem e della loro attività nei primi decenni del '900, avremo presto occasione di parlare diffusamente del loro celebre «teorema» (un classico risultato di Teoria dei Modelli).

Pare poi che la parola «modello» sia stata usata per la prima volta nel senso che ci interessa nel 1929 da Gödel, il quale tuttavia non si preoccupò di darne una definizione formale. È anzi interessante notare che, ancora nel 1952, Tarski continuava ad indicare la «nascente» Teoria dei Modelli come parte dell'Algebra Universale, anche se questa collocazione era motivata dalla sua preoccupazione di rivendicarne la natura prettamente matematica, svincolata da legami troppo stretti con logica e filosofia. Interessanti approfondimenti sull'argomento si possono trovare, come detto, in [5] oppure, più specificamente, in [11].

In conclusione, volendo semplificare il discorso, possiamo concordare che è proprio negli anni '50 che la Teoria dei Modelli muove i primi passi come scienza autonoma: dimostra i «suoi» teoremi, solleva i «suoi» problemi, propone le «sue» congetture.

Ciò premesso, torniamo a trattare il problema della natura della Teoria dei Modelli e della sua identità. Una domanda, certamente collegata a questo argomento ed altrettanto fondamentale, è: perché interessarsi alla Teoria dei Modelli? Quali sono le sue motivazioni? È scienza fine a se stessa, ristretta ai confini della sola logica, o può avere applicazioni e risonanze anche altrove? È difficile rispondere adesso ad un problema così delicato, possiamo comunque citare quel che Abraham Robinson, un altro padre della Teoria dei Modelli, aveva detto e scritto qualche anno prima di Tarski, in realtà a proposito di tutta la Logica ma certamente con particolare riferimento alla Teoria dei Modelli stessa.

A. Robinson, 1950-1951: *«La Logica Simbolica è capace di produrre strumenti utili per gli sviluppi della matematica moderna, più in particolare dell'Algebra e, sembrerebbe, della Geometria Algebrica. Questa è la realizzazione di un'ambizione espressa da Leibniz in una lettera ad Huygens già nel 1679»*.

A. Robinson ebbe modo di esporre questo convincimento in un intervento ad un convegno internazionale di Matematica nel 1950, e questo suo punto di vista è chiaramente illustrato e discusso nel suo fondamentale libro «On the metamathematics of Algebra» pubblicato l'anno dopo (si veda l'edizione italiana [7]).

Comunque, prima di approfondire, discutere e, possibilmente, corroborare questa affermazione, conviene fissare meglio il contesto

strutture/formule/verità.

Fig. 2. – Abraham Robinson.

1. **Struttura.** Si tratta di un concetto essenzialmente algebrico, almeno se intendiamo

algebra = studio astratto delle strutture,

secondo il punto di vista moderno, nato con Galois e sviluppato, tra gli altri, da Steinitz e Van den Waerden. In questo ambito, una *struttura* è intesa come un insieme non vuoto, dotato di operazioni, relazioni, elementi privilegiati. Tra le relazioni, includiamo ovviamente e implicitamente (senza bisogno di richiamarla caso per caso) l'uguaglianza tra elementi della struttura. La Logica può semmai intervenire introducendo il concetto di *linguaggio* ad accompagnare quello di struttura. Esso fissa i simboli necessari a comporre in astratto le proposizioni che interessano la struttura:

- un simbolo di operazione k-aria per ogni operazione k-aria che è definita all'interno della struttura;
- un simbolo di relazione k-aria per ogni relazione k-aria che è definita nella struttura;
- uno di costante per ogni elemento privilegiato (che è all'interno della struttura).

Così trattare il campo ordinato dei reali $(\boldsymbol{R}, +, \cdot, -, 0, 1, \leqslant)$ richiede 3 simboli di operazione (per $+, \cdot, -$), un simbolo di relazione binaria (per $\leqslant$), due costanti per 0, 1. Naturalmente ogni struttura determina un linguaggio, nel modo che abbiamo appena descritto. Ma lo stesso linguaggio può adattarsi anche ad altre strutture, spesso assai differenti da quella di partenza. Ad esempio

$$(\boldsymbol{N}, +, \leqslant, 0), \quad (\boldsymbol{R}, \cdot, \leqslant, \pi)$$

sono strutture dello stesso linguaggio (con un simbolo di operazione binaria, un simbolo di relazione binaria, un simbolo di costante). Ma le due strutture hanno ben poco da spartire algebricamente tra loro, al di là dei simboli comuni.

Vanno poi distinti (almeno da un punto di vista formale, o per pignoleria) i simboli del linguaggio e le corrispondenti interpretazioni in operazioni, relazioni, elementi all'interno di una data struttura. La situazione ricorda la differenza che c'è (o dovrebbe esserci) in teatro o al cinema tra la parte da recitare (Amleto) e l'attore che la recita (Laurence Olivier, Vittorio Gassman, o il vostro Amleto preferito). In realtà ci capiterà di identificare talora, per non appesantire la notazione, personaggio e attore, cioè simbolo e interpretazione: non prevediamo pericolo di confusione, basterà semmai controllare con diligenza, caso per caso, quale dei due è l'oggetto della nostra attenzione.

2. **Formule e verità.** Qui entriamo, ovviamente, nel regno della Logica. Si tratta di concordare come scrivere le proposizioni di un dato linguaggio (le «formule») e poi come verificarne la verità in una data struttura di quel linguaggio. Naturalmente le possibili opzioni a questo proposito sono molteplici, e c'è addirittura un'area della Teoria dei Modelli (chiamata *Teoria Astratta dei Modelli*) che si interessa di queste varie eventualità, confrontandole e misurandone vantaggi e difetti.

Ad esempio potremmo tentare, secondo l'idea di Hilbert sopra riferita, di usare una logica così potente da consentire di descrivere ogni struttura matematica con assiomi che la caratterizzano a meno di isomorfismo: ma, come abbiamo sottolineato, questo progetto è troppo ambizioso, e talora fallisce. Preferiremo allora un altro contesto, facendo subito la scelta dichiarata di muoverci nella

Logica del Primo Ordine.

In effetti c'è un Teorema di Lindström (da esaminare in maggior dettaglio più tardi) che afferma in un qualche senso che la Logica del Primo Ordine è – Leibnizianamente – la *«migliore delle logiche possibili»*.

Per richiamare le formule della Logica del Primo Ordine, evitiamo un approccio troppo generale ed astratto, e lavoriamo per semplicità in un contesto particolare, come quello dei numeri reali. Consideriamo dunque la struttura $(\boldsymbol{R}, +, \cdot, -, \leqslant, 0, 1)$. Abbiamo già introdotto il linguaggio corrispondente L; come anticipato, ne confondiamo i simboli con le operazioni, le relazioni e gli elementi che essi intendono rappresentare. Nella Logica del Primo Ordine, le formule si costruiscono nel seguente modo.

a) Al livello più semplice, adoperando le costanti 0, 1 ed simboli di operazione $+$, $\cdot$, $-$ possiamo ottenere dapprima $2 = 1 + 1$, $-1, \ldots$ e tutti gli interi, e poi, coinvolgendo sequenze arbitrariarmente lunghe $\vec{v}$ di variabili, polinomi $p(\vec{v})$, $q(\vec{v})$, ... a coefficienti interi. A questo punto i simboli di relazione presenti nel linguaggio, quello esplicito dell'ordine $\leqslant$ e quello implicito dell'uguaglianza $=$, possono costruire equazioni $p(\vec{v}) = q(\vec{v})$ o disequazioni $p(\vec{v}) \geqslant q(\vec{v})$ con $p(\vec{v})$ e $q(\vec{v})$, appunto, polinomi a coefficienti interi. Queste sono le formule più semplici che è consentito usare: sono chiamate *atomiche*. Anzi, siccome il linguaggio prevede l'operazione $-$ di opposto, non c'è nulla di male a supporre, addirittura, $q(\vec{v})$ nullo, salvo sostituire $p(\vec{v})$ al primo membro con la differenza $p(\vec{v}) - q(\vec{v})$.

b) Possiamo poi negare una formula, costruendo ad esempio da $p(\vec{v}) = 0$, $p(\vec{v}) \geqslant 0$ nuove disequazioni come $p(\vec{v}) \neq 0$, $p(\vec{v}) < 0$, oppure congiungere un numero finito di formule (formando così sistemi finiti di equazioni e disequazioni, quando le formule coinvolte sono atomiche), oppure disgiungerle. A proposito, i simboli usualmente adoperati per indicare negazione, congiunzione, disgiunzione sono $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Un uso successivo e ripetuto delle 3 procedure costruisce formule sempre nuove, che vengono chiamate combinazioni Booleane finite delle formule di partenza. Ad esempio, in questo modo, a partire dalla formule atomiche si ottengono le formule che vengono dette *senza quantificatori*.

c) In effetti, l'altra strada per costruire nuove formule coinvolge i quantificatori $\exists$ (*esiste*) e $\forall$ (*per ogni*) ma – e questo è il punto qualificante della Logica del Primo Ordine – soltanto sulle variabili degli elementi della struttura. Così, premettendo alla formula $v^2 = 1$ il quantificatore $\exists v$, otteniamo $\exists v(v^2 = 1)$.

I due procedimenti (costruzione di combinazioni Booleane finite, uso dei quantificatori) possono essere alternati per costruire formule sempre più complicate. Ma solo attraverso di essi si possono produrre formule, non sono consentiti altri procedimenti: in particolare, non è permesso quantificare su sottoinsiemi della struttura.

Magari possiamo usare alcune familiari abbreviazioni per snellire la notazione: ad esempio, per α e β formule, possiamo convenire di scrivere $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ per significare rispettivamente $\neg\alpha \vee \beta$, $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

Vediamo alcuni esempi di formule nel caso particolare dei numeri reali, col linguaggio L. Ricordiamoci che la struttura $(\boldsymbol{R}, +, \cdot, -, \leqslant, 0, 1)$ costituisce un campo ordinato; ebbene, tutti gli assiomi di campo ordinato si scrivono facilmente come formule di L, ad esempio, il fatto che somma e prodotto di elementi non negativi resta non negativo si traduce

$$\forall v_0 \forall v_1 (v_0 \geqslant 0 \wedge v_1 \geqslant 0 \to v_0 + v_1 \geqslant 0 \wedge v_0 \cdot v_1 \geqslant 0).$$

Invece la formula

$$\forall v_0 (v_0 \geqslant 0 \leftrightarrow \exists v_1 (v_0 = v_1^2))$$

(con v_1^2 che abbrevia, ovviamente, $v_1 \cdot v_1$) dice che gli elementi non negativi coincidono con i quadrati (una proprietà ben nota dei reali). L'altra condizione che ogni polinomio di grado dispari $2n + 1$ ammette una radice si scrive con infinite formule. Infatti, possiamo enunciarla separatamente per ogni naturale n e restringerla a polinomi monici. Ricordiamo poi che, da un punto di vista algebrico formale, un polinomio di grado $2n + 1$ si può intendere come la sequenza ordinata finita dei suoi $2n + 2$ coefficienti, dal termine noto a quello di grado massimo $2n + 1$; tra l'altro, se il polinomio è monico, quest'ultimo coefficiente è 1. Così, per un n fissato, la quantificazione «per ogni polinomio (monico) di grado $2n + 1$» si può scrivere dicendo «per ogni sequenza di $2n + 1$ elementi» (l'ultimo è 1); così la nostra proposizione si esprime

$$\forall v_0 \ldots \forall v_{2n} \exists v(v^{2n+1} + v_{2n} \cdot v^{2n} + \ldots + v_1 \cdot v + v_0 = 0).$$

Ricordiamo che le due ultime condizioni (il fatto che gli elementi non negativi coincidano con i quadrati e che ogni polinomio di grado dispari ammetta una radice) caratterizzano, tra i campi ordinati, quelli che si chiamano *reali chiusi*. I numeri reali formano un campo reale chiuso.

Comunque, allo stato attuale, quel che ci interessa mettere in evidenza è che tutte le espressioni che abbiamo fin qui scritto sono formule di L. Ad essere pignoli, infatti, analizzare il loro significato e la loro eventuale validità tra i reali ci fa sconfinare nel terreno della verità (di una formula in una struttura), argomento che dobbiamo ancora trattare.

Gli esempi proposti hanno un'altra caratteristica comune: in ciascuno di essi ogni variabile compare sotto l'influenza di un quantificatore che la riguarda. Simili formule si chiamano *enunciati*. In generale una occorrenza di una variabile v in una formula α si dice *vincolata* se è sotto l'influenza di un quantificatore $\forall v$ o $\exists v$, *libera* altrimenti; α si chiama un *enunciato* se, appunto, ogni occorrenza di una variabile in α è vincolata. Quando invece scriviamo $\alpha(\vec{v})$ al posto di α, vogliamo mettere in evidenza che le variabili che occorrono liberamente in α si trovano nella sequenza $\vec{v}$.

Mostriamo adesso come questa nozione di formula presenta alcune serie limitazioni espressive. Ad esempio, rammentiamoci un'altra proprietà del campo ordinato dei reali: la sua *completezza*, il fatto cioè che

per ogni insieme X di reali, se X è superiormente limitato, allora X ammette un estremo superiore.

Come sappiamo da Hilbert, si tratta di una caratteristica così importante da caratterizzare i reali a meno di isomorfismi: qualunque campo ordinato completo è isomorfo ai reali. Non si può tuttavia scrivere, almeno in questa forma, al primo ordine.

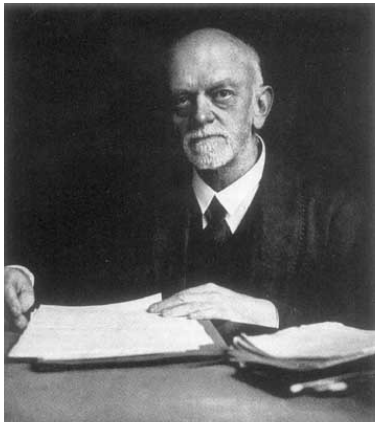

Fig. 3. – David Hilbert nel 1932.

Questo non esclude che possano esistere condizioni equivalenti alla completezza esprimibili al primo ordine, tuttavia la situazione che si sta creando, insieme alla conseguente limitazione, può apparire assai spiacevole e, se permanesse, richiederebbe un attimo di riflessione sull'opportunità di accettare simili rinunce espressive. D'altra parte, si possono citare altri esempi analoghi di famosi enunciati matematici che non si scrivono (almeno direttamente) al primo ordine. Ne ricordiamo due, entrambi riguardanti i numeri naturali. Dapprima consideriamo la struttura $(\boldsymbol{N}, s, 0)$, il *Principio di Induzione* dice

per ogni insieme X di naturali, se $0 \in X$ e X è chiuso per s, allora $X = \boldsymbol{N}$.

Si tratta di una proprietà fondamentale che, come già osservato, caratterizza $(\boldsymbol{N}, s, 0)$ a meno di isomorfismi insieme alle altre due semplici condizioni

a) s è iniettiva,

b) 0 non è nell'immagine di s;

eppure, almeno nel modo in cui lo abbiamo appena proposto, il Principio di Induzione non si può tradurre al primo ordine perché quantifica su sottoinsiemi della struttura. Lo stesso accade al *Principio del Minimo* che riguarda l'ordine dei naturali, dunque la struttura $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$, ed afferma

per ogni insieme X di naturali, se X non è vuoto,
allora X ha un minimo elemento.

Il Principio del Minimo non è così forte da caratterizzare $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$ a meno di isomorfismi (ed è anzi condiviso da tutti quegli insiemi che si dicono *bene ordinati*). Tuttavia non si può esprimere, almeno nella versione appena citata, nella Logica del Primo Ordine.

Per completare la nostra descrizione della Logica del Primo Ordine, ci resta da introdurre una nozione di verità, che ci chiarisca quando un enunciato di un linguaggio L è vero in una struttura $\mathcal{A}$ o, più in generale, quando una sequenza $\vec{a}$ in A rende una formula $\phi(\vec{v})$ vera in $\mathcal{A}$. Questa definizione si può dare in modo tanto naturale quanto noioso, tale comunque da esprimere esattamente quel che l'intuizione suggerisce. Ne omettiamo i dettagli, consigliando agli interessati di ricorrere ai manuali di Logica [2]. Del resto gli esempi già svolti sui reali possono illustrare adeguatamente l'idea. Semmai approfittiamo di questo punto della nostra trattazione per insinuare due osservazioni che saranno utili nel seguito. Notiamo anzitutto che, secondo quanto il senso comune suggerisce e la (omessa) definizione di verità conferma, la formula $\alpha \vee \beta$ (con α e β formule) equivale a $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, invece la formula $\forall v\alpha$ sta per $\neg\exists v \neg\alpha$. Così possiamo trascurare il connettivo $\vee$ ed il quantificatore $\exists$ ed introdurre $\alpha \vee \beta$ e $\forall v\alpha$ come abbreviazioni, come abbiamo già fatto, ad esempio, con $\alpha \to \beta$. In questa prospettiva, tutte le formule sono ottenute da quelle più semplici (quelle atomiche) col solo uso di $\neg$, $\wedge$ e $\exists$.

L'altra osservazione da fare è già implicita in quello che abbiamo appena detto. Ad esempio le due formule $\forall w\alpha(w, \vec{v})$, $\neg\exists w \neg\alpha(w, \vec{v})$ (formalmente diverse) sono soddisfatte dalle stesse sequenze in qualunque struttura del loro linguaggio. Può capitare in moltissimi altri casi che due formule esteriormente differenti $\beta(\vec{v})$ e $\gamma(\vec{v})$ di un linguaggio L siano tuttavia soddisfatte dalle stesse sequenze in una data struttura $\mathcal{A}$ di L, o in una classe $\mathcal{K}$ di strutture di L, o addirittura in ogni struttura di L. Diremo allora che $\beta(\vec{v})$ e $\gamma(\vec{v})$ sono *equivalenti* rispetto ad $\mathcal{A}$, o a $\mathcal{K}$, o ad L, e spesso identificheremo $\beta(\vec{v})$ e $\gamma(\vec{v})$ intendendole – nell'ambito opportuno – come una stessa formula, anche se formalmente non lo sono.

Finalmente, un po' di notazione: per L linguaggio, $\mathcal{A}$ struttura di L, α enunciato di L, diciamo che $\mathcal{A}$ è modello di α (e scriviamo $\mathcal{A} \models \alpha$) quando α è vero in $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ è modello di un insieme S di enunciati di L quando è modello di ogni enunciato di S. Studiare i modelli di un insieme di enunciati è, appunto, il proposito dichiarato della Teoria dei Modelli, almeno secondo il punto di vista di Tarski citato all'inizio del paragrafo.

3. – Perché la Logica del Primo Ordine.

Cerchiamo adesso di motivare e spiegare la scelta del linguaggio del I ordine, soprattutto in considerazione dei suoi numerosi limiti espressivi, già messi in evidenza nell'ultimo paragrafo. Un formidabile strumento tecnico che appunto qualifica e caratterizza la Logica del Primo Ordine è il *Teorema di Compattezza*. Vi si afferma quanto segue.

TEOREMA DI COMPATTEZZA. – Sia S un insieme infinito di enunciati di un linguaggio L. Supponiamo che ogni sottoinsieme finito di S ammetta un modello. Allora anche S ha un modello.

(Quando ogni sottoinsieme finito di S ammette un modello, si dice che S è finitamente soddisfacibile).

Notiamo che l'implicazione inversa è banalmente vera, perché un modello di S è modello anche di ogni sottoinsieme, finito o infinito, di S. Ma il nostro teorema assicura che, se ogni porzione *finita* di S ha il suo specifico modello (dunque porzioni distinte possono eventualmente avere modelli distinti), allora c'è comunque un modello globale che soddisfa tutti gli enunciati di S. Vedremo presto situazioni in cui è difficile immaginare un modello generale di S, ma riesce relativamente semplice dotare ogni sottoinsieme finito di S di un suo modello; ebbene, in tutti questi casi, il Teorema di Compattezza si applica e garantisce l'esistenza di una struttura che soddisfa tutto S.

Esistono vari possibili modi di provare il Teorema di Compattezza. Agli amanti dei fondamenti potrà interessare sapere che l'Assioma della Scelta fa capolino in ognuna di queste dimostrazioni (almeno per linguaggi più che numerabili). Tra le possibili prove, ce n'è una che ottiene un modello per S a partire dai modelli dei suoi sottoinsiemi finiti come loro *ultraprodotto*, dunque con una esplicita costruzione algebrica. In un altro classico approccio dovuto a Henkin, invece il modello $\mathcal{A}$ per S è prodotto in modo artificiale, a partire dall'insieme delle costanti di L e di quanto se ne costruisce con l'uso dei simboli di operazioni di L (allo stesso modo in cui da 0, 1, nel caso dei reali, si ottengono $2 = 1 + 1$, -1, e in generale tutti gli interi). Ogni costante di L è interpretata in se stessa, ed ogni espressione, che dalle costanti si determina nel modo appena descritto, viene rappresentata allo stesso modo.

La situazione corrisponde dunque, nel paragone teatrale sopra azzardato, al caso limite in cui Amleto stesso recita Amleto. Operazioni e relazioni sono introdotte in modo adeguato e complessivamente producono il modello cercato $\mathcal{A}$. Quello che è notevole in questo approccio è la possibilità di stimare la cardinalità di $\mathcal{A}$: infatti, si verifica che non può eccedere il massimo tra la cardinalità di L e $\aleph_0$, ed è dunque finita o numerabile se L è finito o numerabile. Ma torneremo più tardi su questo punto. Adesso vediamo conseguenze, difetti e pregi del nostro Teorema, e, tra gli ultimi, applicazioni notevoli ad altri rami della Matematica.

COMMENTI AL TEOREMA DI COMPATTEZZA. – 1. Alla fine del Seicento Leibniz e Newton diedero un decisivo sviluppo al Calcolo Differenziale per garantire un adeguato sostegno matematico allo studio di grandezze fisiche della meccanica come la velocità e l'accelerazione. Per sviluppare la loro teoria, furono talora costretti a coinvolgere con molta prudenza il concetto di *infinitesimo*; in effetti, secondo il dettato Aristotelico (del resto condiviso secoli dopo Aristotele, ed anche dopo Leibniz e Newton, da Gauss), l'infinito attuale (e dunque l'infinitesimo) non si possono trattare in Scienza e in Matematica come elementi effettivi. Così i nostri dovettero introdurre gli infinitesimi con molti equilibrismi, parlandone come di quantità che è come se ci fossero, ma non ci sono. Questo non risparmiò loro critiche e sarcasmi, come quelli pesanti di Berkeley, che ironizzò sul concetto, definendo gli infinitesimi *«fantasmi di entità evanescenti»*. Eppure, come il Teorema di Compattezza ci mostra, gli infinitesimi esistono, ed hanno pieno diritto di cittadinanza come elementi «reali».

Fig. 4. – Isaac Newton.

Consideriamo infatti il campo reale $(\boldsymbol{R}, +, \cdot, -, \leqslant, 0, 1)$, magari arricchiamone la struttura considerando ogni numero reale, e non solo 0 e 1, come elemento privilegiato. Siano L_0 il relativo linguaggio (con una costante per ogni reale, e dunque della cardinalità del continuo), S_0 l'insieme di tutti gli enunciati del primo ordine di L_0 veri nella nostra struttura. Aggiungiamo a L_0 una nuova costante c, ottenendo un linguaggio L, e consideriamo l'insieme di enunciati di L

$$S = S_0 \cup \{0 < c\} \cup \left\{c < \frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N},\, n \neq 0\right\}.$$

Ogni porzione finita di S può essere inclusa in

$$S_0 \cup \{0 < c\} \cup \left\{c < \frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N},\, 0 < n < N\right\}$$

per N naturale abbastanza grande, e dunque ha un modello, costituito proprio dalla struttura dei reali purché si interpreti la nuova costante c in un qualunque numero reale positivo $< \frac{1}{N}$, come $\frac{1}{2N}$. Applichiamo il Teorema di Compattezza e deduciamo che anche S ha un suo modello: se vi dimentichiamo c e la sua interpretazione, otteniamo una struttura di L che soddisfa tutti gli enunciati dei reali (e solo quelli, come è facile vedere); l'elemento che interpretava c nella struttura ampliata resta comunque presente, ed è minore di tutti gli inversi degli interi positivi, dunque è infinitesimo.

Su questa base si può fondare uno sviluppo alternativo dell'analisi reale, usualmente chiamato *Analisi non standard*, nel quale gli infinitesimi sono elementi «reali» e non solo virtuali: i risultati ottenuti in riferimento a questa diversa prospettiva sono, a tutti gli effetti, «teoremi» di Analisi, e solo l'approccio e la conseguente tecnica di dimostrazione sono diversi. In realtà l'introduzione dell'analisi non standard è assai più elaborata e complessa [8], e quanto abbiamo fatto in queste brevi righe è piuttosto la costruzione di un campo ordinato reale chiuso (come il campo reale) ma non archimedeo (a differenza dei reali). Comunque l'esempio mostra l'uso decisivo del Teorema di Compattezza. Quanto all'Analisi non standard, vale la pena di ricordare che ci sono addirittura manuali universitari che la usano come strumento per l'introduzione dell'Analisi 1 e 2 agli studenti [4].

2. Se da un lato il Teorema di Compattezza permette di costruire nuove strutture con particolari proprietà, dall'altro rappresenta la ragione di forti limitazioni espressive della Logica del Primo Ordine. Infatti, come sua conseguenza, si deduce che alcune proprietà come il Principio di Induzione e il Principio del Minimo per i numeri naturali non si possono esprimere in nessun modo al primo ordine, neppure attraverso formulazioni equivalenti. Le relative dimostrazioni si trovano su un qualsiasi libro di Logica: riportiamo comunque la trattazione completa di almeno un esempio, e precisamente quello del Principio del Minimo.

Consideriamo allora il linguaggio $L = \{\leqslant\}$ e, in L, la struttura $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$. Sia S l'insieme di tutti gli enunciati di L veri in $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$. Ammettiamo per assurdo che tra questi enunciati ve ne sia uno, o magari anche un qualche sottoinsieme, che riesca a tradurre il Principio del Minimo al primo ordine in L. Aggiungiamo al linguaggio un'infinità numerabile di costanti c_n (con n naturale), ottenendo un linguaggio L' più ricco. Formiamo l'insieme

$$S' = S \cup \{c_n > c_{n+1} \colon n \in \boldsymbol{N}\}.$$

Per ogni sottoinsieme finito S'_0 di S', si può trovare un naturale N tale che

$$S'_0 \subseteq S \cup \{c_n > c_{n+1} \colon n \leqslant N\}.$$

Ne segue che S'_0 ha modello: basta considerare proprio la struttura $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$, che è modello di S, interpretare $c_0, c_1, \ldots, c_N$ nei naturali $N > N-1 > \ldots > 0$ e le rimanenti costanti c_n (con $n > N$) in elementi arbitrari (tanto, non ci sono condizioni che esse debbano soddisfare in S'_0). Applichiamo a questo punto il Teorema di Compattezza. Siccome ogni sottoinsieme finito di S' ha modello, anche S' deve avere un modello $\mathcal{A}' = (A, \leqslant, a_n (n \in \boldsymbol{N}))$. Se riduciamo di nuovo il linguaggio da L' a L ed estraiamo da $\mathcal{A}'$ la struttura $(A, \leqslant)$ di L, otteniamo finalmente il modello di S cercato. Ora, le costanti c_n sono sparite da L, ma gli elementi a_n di A che le interpretavano restano, e continuano a soddisfare $a_n > a_{n+1}$ per ogni naturale n: dunque l'insieme di questi elementi a_n non ha minimo, e questo è assurdo perché $(A, \leqslant)$, in quanto modello di S, dovrebbe rispettare anche il Principio del Minimo. Dunque questo principio non si può tradurre in nessun modo al primo ordine.

Possiamo interpretare la precedente dimostrazione anche nel senso seguente: l'insieme S di tutti gli enunciati veri in $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$ è condiviso anche da altre strutture di L che non obbediscono al Principio del Minimo (e dunque non sono bene ordinate).

Dimostriamo ora un altro caso in cui la logica del I ordine rivela limitazioni espressive: esso è legato al concetto di finitezza. Consideriamo infatti una classe $\mathcal{K}$ di strutture finite di un fissato linguaggio L e supponiamo che, per ogni naturale N, ci sia qualche struttura $\mathcal{A}_N$ in $\mathcal{K}$ che (è finita ma) ha almeno N elementi. Esempi di queste classi sono: gli insiemi finiti (nel linguaggio vuoto), i gruppi finiti (ci sono gruppi finiti in ogni possibile cardinalità), i campi finiti (per ogni primo p, ed anzi per ogni potenza p di primo, c'è un campo finito che ha p elementi). Supponiamo che ci sia un insieme S di enunciati di L tale che i modelli di S sono esattamente le strutture di $\mathcal{K}$. Ad S aggiungiamo per ogni naturale n l'enunciato

$$\sigma_n\colon \exists v_0 \ldots \exists v_n \Big(\bigwedge_{i<j\leqslant n} \neg (v_i = v_j) \Big)$$

che dice che ci sono almeno $n+1$ elementi distinti. Sia S' l'insieme risultante:

$$S' = S \cup \{\sigma_n\colon n \in \boldsymbol{N},\, n < N\}.$$

Proviamo che l'insieme S' è finitamente soddisfacibile. Sia infatti S'_0 un qualunque sottoinsieme finito di S', e sia N un numero naturale maggiore di tutti gli n tali che $\sigma_n \in S'$. Allora

$$S'_0 \subseteq S \cup \{\sigma_n\colon n \in \boldsymbol{N},\, n < N\}.$$

Quindi ci basta trovare un modello di $S \cup \{\sigma_n\colon n \in \boldsymbol{N},\, n < N\}$. Ma un tale modello esiste: è sufficiente prendere una struttura di $\mathcal{K}$ con almeno $N+1$ elementi. Allora S'_0 ha un modello (per ogni sottoinsieme S'_0 di S'), quindi S' è finitamente soddisfacibile. Per il Teorema di Compattezza, S' ha modello: una struttura di L che condivide tutti gli enunciati di S (e dunque sta in $\mathcal{K}$ ed è finita), ma soddisfa anche i σ_n (quindi ha almeno $n+1$ elementi per ogni n naturale); la struttura è conseguentemente infinita. Questa contraddizione prova che il concetto di finitezza non si può catturare al primo ordine.

In altre parole insiemi di enunciati che hanno modelli finiti arbitrariamente grandi devono anche avere modelli infiniti. Può essere interessante descrivere questi strani modelli infiniti che si accompagnano alle strutture finite di partenza. Nel caso dei campi, ad esempio, Ax ha dato un'elegantissima assiomatizzazione al primo ordine di questi modelli (i campi infiniti che soddisfano gli stessi enunciati dei campi finiti). Essi sono chiamati *campi pseudofiniti*: il lettore incuriosito potrà trovare in [6] (ad esempio) qualche ulteriore notizia a loro riguardo.

3. Ma il Teorema di Compattezza, nonostante le limitazioni espressive che causa, afferma qualcosa di assolutamente ragionevole e condivisibile in Matematica. Una sua possibile formulazione (e comunque un diretto corollario) afferma infatti quanto segue. Diciamo che un enunciato α di un linguaggio L è *conseguenza* di un insie-

me di enunciati S di L se tutti i modelli di S sono anche modelli di α. Allora col Teorema di Compattezza si prova che, per ogni S e α come sopra,

α è conseguenza di S

se e solo se α è conseguenza di un sottoinsieme finito di S.

Infatti è facile notare che α è conseguenza di S se e solo se $S \cup \{\neg \alpha\}$ non ha modello. Ma, per il Teorema di Compattezza, questo equivale a dire che qualche sottoinsieme finito di $S \cup \{\neg \alpha\}$ non ha modello, e non c'è nulla di male a supporre che questo sottoinsieme finito contenga $\neg \alpha$ (aggiungere enunciati non facilita la ricerca del modello, semmai la complica) e dunque sia della forma $S_0 \cup \{\neg \alpha\}$ con S_0 sottoinsieme finito di S. Dunque la condizione di partenza equivale all'esistenza di un sottoinsieme finito S_0 di S tale che $S_0 \cup \{\neg \alpha\}$ non ha modello, cioè α è conseguenza di S_0.

Ora, questo corollario del Teorema di Compattezza afferma qualcosa di assolutamente naturale, e cioè che le dimostrazioni matematiche hanno un carattere finitario: ogni prova utilizza un numero finito di ipotesi. Sappiamo infatti da un Teorema chiamato di Completezza, strettamente legato a quello di Compattezza e comunque valido nella Logica del Primo Ordine, che questa nozione (semantica) di *conseguenza* corrisponde ad un concetto sintattico di *dimostrabilità*: è possibile compilare una lista effettiva di enunciati (chiamati *assiomi*) e di *regole di deduzione* (che derivano formule da altre formule) tale che, per ogni S e α, α è conseguenza di S (nel senso della precedente definizione) se e solo se esiste una sequenza *finita* di enunciati $\beta_0, \dots, \beta_m$ di L tali che β_m è proprio α e ciascun β_i $(i \leqslant m)$ è un assioma, oppure appartiene a S, oppure si ottiene da enunciati precedenti della sequenza con una regola di deduzione (diciamo allora che α è *dimostrabile* da S). Ora, è ovvio che α è dimostrabile da S se e solo se è dimostrabile da un sottoinsieme finito di S. La corrispondenza tra dimostrabilità e conseguenza asserita dal Teorema di Completezza non regge se anche il concetto di conseguenza non ha un'analoga proprietà, e dunque, in definitiva, se non vale il Teorema di Compattezza.

4. Ci sono poi brillanti applicazioni in campo algebrico del Teorema di Compattezza e, tra queste, la prova originale di profondi risultati di Geometria Algebrica complessa, o p-adica (principalmente dovuti ad Ax e Ax-Kochen). Ad esempio Ax-Kocken utilizzarono il teorema di Compattezza nel dare una prova asintotica della *congettura di Artin* sui campi p-adici $\boldsymbol{Q}_p$ (con p primo). Tale congettura afferma: se n, d sono interi positivi con $n > d^2$, ogni polinomio in n variabili di grado d in $\boldsymbol{Q}_p$ ha una soluzione non banale in $\boldsymbol{Q}_p$, per ogni primo p. Ax-Kocken provarono che, fissati n, d, la proposizione di Artin è vera in ogni $\boldsymbol{Q}_p$, salvo al più un numero finito di primi p. Siccome la congettura ha anche qualche controesempio (come osservato da Terjanian), il risultato di Ax-Kochen fornisce, in un qualche senso, la migliore risposta possibile. Rimandiamo nuovamente a [6] per maggiori dettagli.

Un altro brillante esempio di applicazione del Teorema di Compattezza, stavolta riferito alla Geometria Algebrica complessa, è descritto da un altro risultato di Ax che stabilisce la suriettività di un qualunque morfismo iniettivo definito su varietà algebriche complesse (richiameremo tra breve la nozione di varietà algebrica).

Ritorniamo alla dimostrazione di Henkin del Teorema di Compattezza: abbiamo un insieme S di enunciati capace di trovare un modello ad ogni sottoinsieme finito, e fabbrichiamo un modello complessivo per S attingendo ad un insieme astratto di simboli del linguaggio L di S. Questa costruzione ci dà informazioni anche sulla cardinalità del modello risultante e la fissa in particolare $\leqslant max\{\aleph_0, |L|\}$, dunque finita o numerabile se L è finito o numerabile. In effetti, otteniamo così un secondo teorema fondamentale della Logica del Primo Ordine (usualmente attribuito a Löwenheim e Skolem, anche se il problema della genesi e paternità di questi risultati è assai discusso, e qualcuno preferisce riferirli anche a Tarski, Henkin, Malcev ed altri).

TEOREMA DI LÖWENHEIM-SKOLEM ALL'IN GIÙ. – Se S è un insieme di enunciati di un linguaggio L ed S ha modello, allora S ha un modello di cardinalità $\leqslant max\{\aleph_0, |L|\}$.

COMMENTO. – Il Teorema appena enunciato è fonte di nuove limitazioni espressive per la Logica del Primo Ordine. Ad esempio, abbiamo prima discusso il campo ordinato dei reali e la sua proprietà di completezza: qualunque insieme di reali superiormente (o inferiormente) limitato deve avere *sup* (o *inf*). Abbiamo sottolineato come questa condizione caratterizzi il campo reale a meno di isomorfismi; in particolare, qualunque campo ordinato (reale chiuso) che la soddisfi deve avere la potenza del continuo. Ma allora la completezza non si può esprimere al primo ordine, neppure tramite un insieme infinito di enunciati del linguaggio (finito) dei campi ordinati, perché altrimenti avrebbe anche modelli finiti o numerabili (e dunque non isomorfi ai reali).

Queste considerazioni (e quelle svolte in precedenza sul Teorema di Compattezza) introducono un'ovvia questione: perché lavorare nella Logica del Primo Ordine, se le sue proprietà sono motivo di forti limitazioni espressive? Perché non preferire la logica che viene chiamata del Secondo Ordine, permette di quantificare anche su sottoinsiemi e, conseguentemente, di scrivere il Principio del Minimo, quello di Induzione, la completezza dei reali (ma purtroppo, come seconda faccia della stessa medaglia, perde i teoremi di Compattezza e di Löwenheim-Skolem all'in giù)? O magari, scegliere ulteriori logiche improntate a maggiori libertà e minori restrizioni? Il fatto si è che, come abbiamo prima sottolineato, Compattezza e Löwenheim-Skolem all'in giù sono proprietà assai condivisibili e naturali (almeno la prima). D'altra parte, soltanto rinunciandovi si può aumentare l'espressività di una logica, anzi:

TEOREMA DI LINDSTRÖM. – Una *«logica»* che soddisfa i Teoremi di Compattezza e di Löwenheim-Skolem all'in giù *«è»* la Logica del Primo Ordine.

Naturalmente, la formulazione che abbiamo dato dell'ultimo teorema è forzatamente imprecisa, e richiede che si specifichi preliminarmente che cosa è una logica, e quando due logiche sono uguali [1]. Pur tuttavia, il senso del discorso ci pare chiaro, e ribadisce lo slogan già anticipato: in un qualche senso, la Logica del Primo Ordine è la migliore possibile, l'unica a soddisfare le proprietà di Compattezza e Löwenheim-Skolem all'in giù.

A riguardo di quest'ultima proposizione (Löwenheim-Skolem all'in giù), va detto che, ancora sulla base del Teorema di Compattezza (e della sua dimostrazione secondo Henkin), si può dedurre lo speculare Teorema di Löwenheim-Skolem all'in su, che dice che il nostro S, se ha modello infinito, ne ha anche in ogni cardinalità $\geqslant max\{\aleph_0, |L|\}$ ed in definitiva affermare

TEOREMA DI LÖWENHEIM-SKOLEM. – Se S è un insieme di enunciati di un linguaggio L e S ha un modello infinito, allora S ha un modello in ogni cardinalità infinita $\geqslant |L|$.

Ad evitare che l'ipotesi di esistenza di un modello infinito sembri eccessiva, vale la pena di ricordare che un insieme di enunciati che ha modelli finiti di cardinalità arbitrariamente grande deve anche ammettere, appunto, un modello infinito. Dunque, per escludere che il Teorema di Löwenheim-Skolem si applichi, dobbiamo ridurci a classi di strutture finite *di cardinalità limitata*: condizione che merita senz'altro considerazione, specie in campo applicativo e informatico, e, del resto, ha una sua specifica Teoria dei Modelli (finiti) a farle da supporto, ma che è lontana dal contesto che vogliamo studiare.

4. – Insiemi definibili.

Non appena si parla di strutture, di formule e di verità, il concetto di insieme definibile emerge in modo naturale. Dati un linguaggio L, una struttura $\mathcal{A}$ di L, una formula $\phi(\vec{v}, \vec{w})$ di L e, magari, una sequenza $\vec{b}$ di elementi di A (lunga quanto $\vec{w}$), possiamo andare a cercare le sequenze $\vec{a}$ di A che soddisfano ϕ insieme a $\vec{b}$, formando (per n uguale alla lunghezza di $\vec{v}$) l'insieme:

$$\phi(\mathcal{A}^n, \vec{b}) = \{\vec{a} \in A^n \colon \mathcal{A} \models \phi(\vec{a}, \vec{b})\}.$$

Questo è quel che si intende per *insieme definibile* in $\mathcal{A}$. Diremo che la formula ϕ e la sequenza $\vec{b}$ (di *parametri*) lo definiscono, e lo chia-

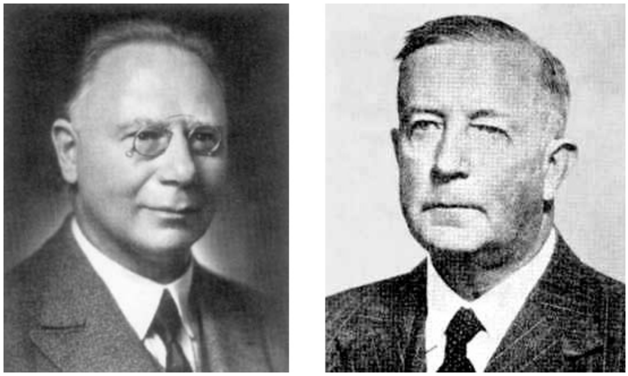

Fig. 5. – Leopold Löwenheim e Thoralf Skolem.

meremo X-definibile se X è un sottoinsieme di A che include i parametri $\vec{b}$ (e vogliamo sottolineare, appunto, che i parametri provengono da X): così, ad esempio, $\emptyset$-definibile significa che di parametri non c'è bisogno, e A-definibile equivale a definibile (in $\mathfrak{A}$). È poi forse superfluo aggiungere che la formula ϕ e la sequenza $\vec{b}$ non sono uniche, ma sono determinate a meno di equivalenza di formule (con parametri). Tutte queste considerazioni sembrerebbero confinate all'astrazione dell'ambito logico. Ma, se andiamo ad esaminare quali sono gli insiemi definibili in certe specifiche strutture «concrete», ci troviamo spesso ad incontrare oggetti matematicamente assai rilevanti.

Esempio. – Consideriamo un qualunque polinomio $p(\vec{x})$ a coefficienti reali (tanto il grado d quanto il numero n delle variabili del polinomio sono arbitrari). L'insieme delle radici reali del polinomio, cioè dei punti di $\boldsymbol{R}^n$ che lo annullano, è definibile: la formula che lo determina è appunto $p(\vec{v}) = 0$, che si può esprimere nel linguaggio del campo ordinato dei reali, magari con l'aiuto di parametri (i coefficienti del polinomio). In questo modo vediamo che sono esempi di insiemi definibili (nel campo reale, ma in qualunque altro campo) le rette (che corrispondono a polinomi di grado 1 in due variabili), le coniche ($d = 2$, $n = 2$), le curve algebriche ($n = 2$), i piani ($d = 1$, $n = 3$), e così via.

Ora è ovvio che unioni, intersezioni e complementari di insiemi definibili restano definibili (le formule che li definiscono sono rispettivamente le congiunzioni, le disgiunzioni e le negazioni delle formule che definiscono gli insiemi base). In particolare:

- quel che in Geometria Algebrica si chiama una *varietà algebrica*, e cioè l'insieme delle radici di un sistema finito di polinomi, ovvero ancora la intersezione degli insiemi delle radici dei singoli polinomi, è definibile;
- quel che in Geometria Algebrica si chiama un *insieme costruibile*, e cioè una qualunque combinazione Booleana finita di varietà algebriche, è definibile.

Fin qui non abbiamo però ancora coinvolto nelle formule di definizione i quantificatori: è dunque possibile, ed anzi presumibile, che esistano (nel caso del campo reale e nel caso di qualunque altro campo) molti altri insiemi definibili. Nel caso specifico poi del campo *ordinato* dei reali, dobbiamo considerare anche la relazione di ordine $\geqslant$ e, conseguentemente, non solo equazioni $p(\vec{v}) = 0$, ma anche disequazioni $p(\vec{v}) \geqslant 0$, gli insiemi che esse definiscono (come i semipiani, o i cerchi), le loro combinazioni Booleane (che in Geometria Algebrica reale si chiamano *insiemi semialgebrici*), e così via.

Torniamo al caso di strutture arbitrarie $\mathcal{A}$, e agli insiemi definibili che vi si possono incontrare.

1. $\emptyset$ e A^n (per ogni intero positivo n) sono definibili in $\mathcal{A}$ (ad esempio tramite $\neg(v_1 = v_1)$ e $v_1 = v_1$ rispettivamente). Visto poi che il simbolo di uguaglianza contribuisce comunque a comporre formule, *diagonali* come $\{\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n\colon\ a_i = a_j\}$ per $1 \leqslant i < j \leqslant n$ sono definibili in $\mathcal{A}$ (tramite la formula $v_i = v_j$). Più in generale, tutte le relazioni di $\mathcal{A}$ – intese come sottoinsiemi dell'appropriato A^n – sono definibili in $\mathcal{A}$, così come tutti i grafici di operazioni di $\mathcal{A}$ e i singoletti costituiti dagli elementi privilegiati in $\mathcal{A}$ (le une e gli altri corrispondono alle formule atomiche del linguaggio, senza bisogno di scomodare parametri).

2. Come già osservato nell'esempio precedente, la definibilità si preserva per unioni, intersezioni (finite) e complementari. Se vogliamo esprimere questo fatto usando una terminologia algebrica uffi-

ciale, possiamo asserire che i sottoinsiemi definibili formano una sottoalgebra dell'algebra di Boole di tutti i sottoinsiemi di A^n (al variare di n).

3. Gli insiemi definibili si preservano per *fibre*. In altre parole, se D è sottoinsieme definibile di A^{n+m} per qualche intero positivo m – tramite $\phi(\vec{v}, \vec{v}', \vec{b})$ – e per $\vec{a}' \in A^m$ formiamo

$$D' = \{\vec{a} \in A^n : (\vec{a}, \vec{a}') \in D\},$$

allora anche D' risulta definibile (grazie alla formula $\phi(\vec{v}, \vec{a}', \vec{b})$ con i nuovi parametri $\vec{a}'$).

4. La definibilità si preserva anche per *proiezioni*. In altre parole, se D è un sottoinsieme definibile di A^n (tramite $\phi(\vec{v}, \vec{b})$, con $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ e $n > 1$), allora la proiezione di D sulle prime $n-1$ coordinate

$$D' = \{(a_1, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1} : \vec{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in D \text{ per qualche } a_n \in A\}$$

(e, in realtà, qualunque proiezione di D su sue coordinate) resta definibile: basta fare finalmente intervenire il quantificatore $\exists$, e specificamente considerare la formula $\exists v_n \phi(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, \vec{b})$.

5. Naturalmente i precedenti procedimenti (combinazioni Booleane finite, proiezioni, e così via) si possono applicare successivamente per costruire (almeno a priori) insiemi definibili sempre più complicati.

6. Tutti i sottoinsiemi finiti di A^n sono definibili. Infatti ci basta osservare che, per ogni $\vec{a} \in A^n$, il singoletto formato da $\vec{a}$ è definibile – tramite $\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} (v_i = a_i)$ – e poi ricordarci che ogni insieme finito è unione di singoletti e applicare 2. Alternativamente, potremmo determinare in A^{2n} con l'aiuto di 1 e 2 l'insieme definito da $\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} v_i = v_{n+i}$ e, fissato $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ in A^n, estrarne con l'uso di 3 la fibra $\{\vec{a}\}$ grazie alla formula $\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} v_i = a_i$. Possiamo in ogni caso dedurre da 2 che anche i sottoinsiemi *cofiniti* di A^n (quelli complementari di insiemi finiti) sono definibili.

La precedente osservazione ci dice che, per strutture finite, il concetto di definibilità non presenta niente di interessante perché tutti i sottoinsiemi (essendo finiti) sono definibili. Ma a noi interessano, come detto già in precedenza, strutture $\mathcal{A}$ infinite, ed in questo ambito gli insiemi definibili sono solo alcuni tra i possibili sottoinsiemi di $\mathcal{A}$. A prescindere dagli esempi concreti che discuteremo tra poco, c'è infatti un semplice argomento di aritmetica cardinale che mette in evidenza questa situazione: i sottoinsiemi di A sono $2^{|A|}$, mentre quelli tra di loro che sono definibili non possono eccedere quanto a cardinalità le coppie formate dalle formule del linguaggio L di A che li definiscono e dalle sequenze finite di parametri di A che occorrono in tali formule, e dunque sono $\leqslant max\{|L|, |A|\}$. Come Cantor ci insegna, allora, i sottoinsiemi definibili sono «molto meno» di tutti i sottoinsiemi possibili in $\mathcal{A}$ (almeno per $|L| \leqslant |A|$ e comunque per L contabile).

In realtà le proprietà appena osservate (in particolare le prime 4) determinano perfettamente i sottoinsiemi definibili di una struttura arbitraria $\mathcal{A}$, nel senso della seguente proposizione.

TEOREMA. – La classe dei sottoinsiemi definibili in $\mathcal{A}$ è la minima classe D di sottoinsiemi di $\bigcup_n A^n$ tale che, per ogni intero positivo n, se D_n denota la collezione dei sottoinsiemi di A^n in D, allora

1. $A^n \in D_n$;

2. le relazioni n-arie di $\mathcal{A}$ e, per $n > 1$, i grafici di operazioni $(n$-$1)$-arie di $\mathcal{A}$ sono in D_n;

3. per ogni scelta di i e j tra $1, \ldots, n$, $\{\vec{a} \in A^n: a_i = a_j\}$ è in D_n;

4. D_n è chiuso per $\cup$, $\cap$, $-$;

5. se $X \in D_{n+m}$ per qualche intero positivo m e $\vec{a}\,' \in A^m$, allora $\{\vec{a} \in A^n: (\vec{a}, \vec{a}\,') \in X\}$ è in D_n;

6. se $X \in D_n$ e $1 \leqslant m < n$, l'immagine di X nella proiezione di A^n su m fissate coordinate è in D_m.

In effetti, se vogliamo far riferimento all'introduzione informale del concetto di formula fatta nel paragrafo 2, possiamo osservare che 1, 2, 3 descrivono quanto è definito da una formula atomica, 4 corrisponde alla costruzione delle combinazioni Booleane finite, 6 all'uso dei quantificatori e 5, finalmente, alla possibilità di coinvolgere parametri.

Dunque, la classe degli insiemi definibili in $\mathcal{A}$ è la chiusura rispetto alle operazioni Booleane, alle proiezioni e alle fibre della classe formata da A e dalle potenze cartesiane, da $=$ e da (i grafici del) le operazioni e dalle relazioni di $\mathcal{A}$. Anzi, da un punto di vista moderno, che certamente trascende l'ambito delineato da Tarski e ricordato all'inizio del primo paragrafo, una *struttura* si potrebbe introdurre come un insieme A con una collezione di sottoinsiemi che soddisfa le proprietà 1 e 3-6 appena elencate, e Teoria dei Modelli si potrebbe definire come lo studio delle strutture, intese in questo senso: la parte logica riguardante formule e verità (e dunque quanto in una struttura viene definito) è riassunta, appunto, nelle condizioni 1-6. Chi non ama i dettagli logici non potrà non apprezzare questo nuovo punto di vista.

Ma adesso cerchiamo di vedere in esempi concreti quali sono gli insiemi definibili. In questa analisi prenderemo a prestito alcuni classici risultati di Algebra, sui quali non abbiamo qui il tempo di attardarci, e anticiperemo alcuni concetti e teoremi importanti di Teoria dei Modelli, sui quali avremo modo di tornare in maggior dettaglio in seguito (magari nella seconda parte di questo lavoro).

ESEMPI. – Iniziamo con tre casi classici, anche se tutto meno che banali. Proseguiremo poi con esempi magari più semplici, che ribadiranno comunque per certi versi quel che osserveremo in queste prime situazioni.

1. (*Il campo complesso* $\boldsymbol{C}$) Consideriamo un generico campo $\mathcal{K}$. Come già ricordato, in Geometria Algebrica si considerano le *varietà algebriche* di K^n (per n intero positivo): si tratta degli insiemi delle radici in K^n di un sistema finito di polinomi $f_0(\vec{x}), \dots, f_t(\vec{x})$ in $K[\vec{x}]$ ($\vec{x}$ denota qui la sequenza $(x_1, \dots, x_n)$). L'insieme delle varietà algebriche di K^n contiene $\emptyset$ e K^n, è chiuso per unioni finite, e per intersezioni anche infinite (per il *Teorema della Base di Hilbert*); non è invece chiuso per complementi. Si considerano allora gli *insiemi*

costruibili di K^n, e cioè le combinazioni Booleane finite di varietà algebriche di K^n. In Teoria dei Modelli, possiamo considerare $\mathcal{K}$ come struttura del linguaggio $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Allora si osserva facilmente (come abbiamo fatto poche righe fa) che ogni varietà algebrica di K^n e, più in generale, ogni insieme costruibile di K^n è definibile, ed anzi gli insiemi costruibili di K^n sono esattamente gli insiemi definibili grazie a formule $\varphi(\vec{v}, \vec{w})$ **senza quantificatori** (usando combinazioni Booleane e fibre ma non proiezioni). Naturalmente, quando $\mathcal{K}$ è un campo arbitrario, il riferimento ai quantificatori (e alle proiezioni) può creare nuovi insiemi definibili, di complessità via via crescente (è quanto osserveremo tra poche righe a proposito del campo razionale). Limitiamoci però adesso al campo complesso, e più in generale ai campi $\mathcal{K}$ che condividono con il campo complesso la proprietà che va sotto il nome di *Teorema Fondamentale dell'Algebra*: ogni polinomio in una indeterminata e di grado $\geqslant 1$ ammette almeno una radice. Questi campi si dicono *algebricamente chiusi*. Per un Teorema di Tarski-Chevalley, sotto questa ipotesi,

$$\textit{costruibile} = \textit{definibile}.$$

Infatti Tarski [9] dimostrò intorno al 1940 (e forse già nel 1931) che, nel campo complesso, ogni formula di L è equivalente ad una formula senza quantificatori e quindi ogni insieme definibile può essere ottenuto con una formula, appunto, senza quantificatori: combinazioni Booleane e fibre (cioè parametri) bastano a determinare tutti gli insiemi definibili, e non c'è bisogno di ricorrere alle proiezioni. In altre parole, ogni proiezione di un insieme costruibile resta costruibile, come provato da Chevalley nell'ambito della Geometria Algebrica. Le proprietà del campo complesso che Tarski usò nella sua dimostrazione si riducono in realtà, oltre a comuni strumenti validi per ogni campo, al Teorema Fondamentale dell'Algebra. Dunque la conclusione di Tarski si applica altrettanto bene ad ogni campo algebricamente chiuso. In tutti questi casi, la classe degli insiemi definibili è, tutto sommato, relativamente elementare e va a coincidere con quella degli insiemi costruibili (cioè con le combinazioni Booleane finite delle varietà). Nel caso poi di sottoinsiemi definibili di K (cioè per $n = 1$), si ha una situazione ancora più semplice. Infatti ogni polinomio in una indeterminata (e grado $\geqslant 1$) ammette solo un numero finito di radici in K (ed anzi, per $\mathcal{K}$ algebricamente chiuso, tante radici quanto è il suo grado, purché contiamo ogni radice con la sua molteplicità): non è difficile dedurne che, per $\mathcal{K}$ algebricamente chiuso e $n = 1$,

$$\textit{definibile} = \textit{finito o cofinito}$$

(la caratterizzazione più facile che riusciamo a immaginare). Naturalmente questa semplicità non si trasmette a dimensioni maggiori $n \geqslant 2$ (dove incontriamo varietà algebriche complicate come curve, superfici e così via), ma resta tuttavia notevole e da meditare.

2. Consideriamo adesso il campo ordinato dei reali, ma anche, più generalmente, un qualunque campo ordinato $\mathcal{K}$. Come già abbiamo avuto modo di ricordare, in Geometria Algebrica si dice *insieme semialgebrico* di K^n una combinazione Booleana finita di insiemi di radici di disequazioni $f(\vec{x}) \geqslant 0$ per $f(\vec{x}) \in K[\vec{x}]$. Si verifica agevolmente che gli insiemi semialgebrici includono anche quelli costruibili. In Teoria dei Modelli, un campo ordinato (in particolare il campo reale) può essere visto come struttura del linguaggio $L = \{+, -, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$. Possiamo allora considerarne i sottoinsiemi definibili. È facile osservare che, per ogni campo ordinato $\mathcal{K}$,

$$\textit{semialgebrico} = \textit{definibile grazie a formule senza quantificatori}.$$

Per un teorema di Tarski degli anni quaranta (gemello di quello relativo ai numeri complessi o, se preferiamo, suo fratello maggiore, visto che presenta assai maggiori complicazioni e che l'altro ne risulta solo un semplice «corollario», neppure citato esplicitamente da Tarski), quando $\mathcal{K}$ è il campo reale, o anche uno dei campi ordinati che si chiamano reali chiusi (quelli che condividono con il campo reale le due proprietà che ogni elemento positivo è un quadrato e che ogni polinomio in una indeterminata di grado dispari deve ammettere una radice), allora nel linguaggio L ogni formula è equivalente ad una formula senza quantificatori e conseguentemente

$$\textit{definibile} = \textit{semialgebrico}.$$

Dunque neppure stavolta c'è bisogno di far riferimento alle proiezioni; in effetti, per $\mathcal{K}$ reale chiuso, la proiezione di un insieme semialgebrico rimane semialgebrica. Quando poi ci limitiamo al caso $n = 1$ e dunque a sottoinsiemi di K, non possiamo più sperare di incontrare soltanto esempi finiti e cofiniti come nel caso complesso. Infatti, dobbiamo tenere conto della relazione di ordine $\leqslant$ e dunque prevedere anche intervalli (aperti, semiaperti o chiusi, eventualmente singoletti, oppure anche con estremi infiniti – come una semiretta, o l'intera retta –): ciascuno di essi è facilmente definito come combinazione Booleana di formule $v \leqslant a$ con a parametro di K. Tuttavia il Teorema di Tarski, coadiuvato da alcuni classici risultati algebrici sui campi reali chiusi, assicura che non dobbiamo aspettarci niente di maggiormente complicato: anzi, per $n = 1$,

$$\textit{definibile} = \textit{unione finita di intervalli}$$

(dove *intervallo* va inteso nel senso lato sopra ricordato). Addizione, moltiplicazione e sottrazione è come se non ci fossero: una conclusione notevole e da ricordare, anche se, ovviamente, non la si può estendere a definibili in dimensioni maggiori $n \geqslant 2$. In conclusione, anche in questo caso gli insiemi definibili formano una classe relativamente semplice (che non ha bisogno di coinvolgere direttamente l'operazione di proiezione) e di forte interesse matematico (perché coincide con la nozione geometrica di *insieme semialgebrico*).

3. Ma non sempre le cose vanno in modo così liscio. Consideriamo infatti i numeri naturali, come struttura $(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$ del linguaggio $L = \{+, \cdot\}$. Anzitutto in questo caso gli insiemi definibili si usano chiamare anche *aritmetici*

$$\textit{definibile} = \textit{aritmetico},$$

e chi ricorda i Teoremi di Incompletezza di Gödel e comunque ha un po' di familiarità con la teoria della ricorsività ricorderà che gli insiemi aritmetici includono (propriamente) tutti quelli ricorsivamente enumerabili e, tra di loro, quelli ricorsivi. In altre parole, si può provare che, tutte le volte che abbiamo un insieme S di naturali ed esiste un algoritmo capace di riconoscere gli elementi di S e distinguerli da quelli fuori di S (dunque S è ricorsivo), oppure anche solo un algoritmo capace di elencare effettivamente gli elementi di S (e dunque S è ricorsivamente enumerabile), allora S si può definire col solo uso di $+$, $\cdot$. Si tratta di un risultato tanto sorprendente e imprevedibile quanto profondo, che genera una gerarchia di crescente complessità all'interno degli insiemi definibili; in effetti le operazioni di unione, intersezione, complementazione, alternate con le proiezioni, creano insiemi definibili sempre nuovi, e sempre più complicati. La situazione non è più così chiara e stimolante come negli esempi precedenti, ma piuttosto farraginosa. Del resto, il tutto si riflette nei fenomeni di incompletezza e di indecidibilità osservati da Gödel e Tarski in questo ambito.

La situazione osservata per i naturali si trasmette ad altri importanti strutture numeriche, quali gli *interi* e i *razionali*. Vediamo perché.

4. Consideriamo dapprima l'anello degli interi $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ ancora come struttura del linguaggio $L = \{+, \cdot\}$. Ebbene, c'è un classico teorema di Teoria dei Numeri dovuto a Lagrange, e dunque di molto precedente la Teoria dei Modelli, che dice che i numeri interi non negativi (e dunque, con le appropriate identificazioni, i naturali) si riconoscono tra gli interi perché coincidono esattamente con le somme di 4 quadrati: con la nostra terminologia, potremmo dire che $\boldsymbol{N}$ è definibile in $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ grazie alla formula

$$\phi(v): \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4 (v = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2).$$

D'altra parte, anche le operazioni di addizione e moltiplicazione in $\boldsymbol{N}$ sono le restrizioni ai naturali delle analoghe operazioni degli interi, e dunque i loro grafici sono anch'essi definibili in $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$. In con-

Fig. 6. – Tarski insieme a Kurt Gödel.

clusione, l'intera struttura $(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$ risulta *definibile* (nel senso ovvio) in $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$, e dunque le trasmette tutti i suoi insiemi definibili e la loro complessità. Di conseguenza, non ci sono ragionevoli speranze di riuscire a classificare in modo comprensibile gli insiemi definibili negli interi.

5. La stessa situazione si registra, come già anticipato in 1, a proposito del campo razionale $(\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$. Infatti, come provato da Julia Robinson in un celebre teorema del 1949, i naturali risultano definibili (come insieme e come struttura) anche nei razionali, che di conseguenza ereditano tutta la loro complessità.

Come vedremo, non sono questi ultimi gli ambiti che interessano la Teoria dei Modelli, così come la si intende oggi. Per fortuna, infatti, ci sono altri contesti nei quali si manifesta la stessa attraente situazione osservata nei primi due esempi (quelli dei complessi e dei reali).

6. Cominciamo con un esempio così semplice che più semplice non si può. Consideriamo infatti insiemi infiniti A, senza ulteriore struttura, nel linguaggio vuoto $\emptyset$. Non sarà per il lettore una sorpresa sapere che gli insiemi definibili nei vari A^n non richiedono l'impiego delle proiezioni e si esauriscono, a partire dall'unico simbolo che possiamo coinvolgere e cioè $=$, con l'uso dei parametri (dunque delle fibre) e delle solite operazioni Booleane; di più, per $n = 1$, si osserva la banale situazione

$$\textit{definibile} = \textit{finito o cofinito},$$

la stessa dunque dei complessi e dei campi algebricamente chiusi (dove certamente procura più forte meraviglia).

Fig. 7. – Julia Robinson.

7. La medesima proprietà si riscontra anche per un'altra classe di strutture algebriche di assai maggiore interesse, e cioè per gli spazi vettoriali (su un dato campo contabile $\mathcal{K}$). La caratterizzazione degli insiemi definibili è infatti regolata, nella più ampia classe dei moduli su un anello fissato, da un teorema, originato dal lavoro di Wanda Szmielew negli anni cinquanta sui gruppi abeliani e attribuito, nella sua versione più generale, a Baur e Monk [6]. Nel caso del gruppo abeliano $(\boldsymbol{Z}, +)$ (e dunque anche di $\boldsymbol{Z}$ inteso come modulo su se stesso), ci dice che ogni sottoinsieme definibile degli interi (dunque per $n = 1$) è una combinazione Booleana finita di classi laterali dei sottogruppi $m\boldsymbol{Z}$, al variare di m tra i naturali. La stessa conclusione si applica (sempre per $n = 1$) ai gruppi $(\boldsymbol{Q}, +)$, $(\boldsymbol{R}, +)$, $(\boldsymbol{C}, +)$ e dunque, in conclusione, ai razionali, ai reali ed ai complessi intesi come spazi vettoriali su $\boldsymbol{Q}$, ma in questi contesti si banalizza perché tutti questi gruppi sono *divisibili*: $rR = R$ per ognuno R di essi, e per ogni elemento $r \neq 0$ di R. Dunque per $n = 1$ un sottoinsieme definibile è una combinazione Booleana finita di classi laterali di $\{0\}$ (per $r = 0$) e R (in tutti gli altri casi), in altre parole

$$\textit{definibile} = \textit{finito o cofinito}.$$

Naturalmente per $n \geqslant 2$ la classificazione si complica e comunque presenta maggiore complessità rispetto al caso precedente degli insiemi. In questo contesto più ampio il Teorema di Baur-Monk afferma che ogni insieme definibile è una combinazione booleana finita di classi laterali di opportuni sottogruppi, e specifica che questi sottogruppi sono proiezioni di insiemi di soluzioni di sistemi lineari omogenei a coefficienti nel campo o nell'anello cui si fa riferimento.

8. Quando la struttura considerata coinvolge una relazione di ordine totale, e il linguaggio contiene conseguentemente un simbolo per tale relazione, le cose diventano ovviamente più elaborate. Tra gli insiemi definibili dobbiamo infatti prevedere gli intervalli (nella accezione generale data a questo termine nell'esempio 2). Nel caso del campo ordinato dei reali, comunque, nonostante la struttura algebrica derivante dalle operazioni di somma e prodotto, i sottoinsiemi definibili 1-ari si riducono alle unioni finite di questi intervalli, e

dunque $\leqslant$ è l'unico simbolo rilevante nel costruirli. La stessa situazione si osserva in altri contesti, magari più semplici, tra cui quelli costituiti da ordini lineari densi, come quello dei razionali e dei reali $(\boldsymbol{Q}, \leqslant)$ e $\boldsymbol{R}, \leqslant)$, oppure discreti, come $(\boldsymbol{N}, \leqslant)$ e $(\boldsymbol{Z}, \leqslant)$. Classici risultati di Langford del 1927, ribaditi da Tarski [3] poco tempo dopo, implicano infatti che, per tutte queste strutture, ogni formula $\phi(\vec{v})$ con almeno una variabile libera – e quindi con $\vec{v}$ non vuota – è equivalente ad una formula senza quantificatori. Se ne deduce quasi immediatamente che, per $n = 1$,

$$\textit{definibile} = \textit{unione finita di intervalli}.$$

Altri e più profondi esempi positivi, analoghi al caso del campo complesso o del campo ordinato reale saranno descritti in un articolo successivo.

Per il momento osserviamo che tutti i casi citati, sia quelli negativi dei naturali, degli interi e dei razionali (rispetto a somma e prodotto), sia gli altri *«positivi»*, possono essere la base ragionevole per una riflessione su quello che è adesso, nel 2004, quasi 50 anni dopo Tarski, la Teoria dei Modelli. Abbiamo già visto che i vecchi punti di vista su che cosa è una struttura, e la rigida definizione che vi coinvolge relazioni, operazioni e costanti, possono essere superati da una visione nuova, che pone un maggior accento su una struttura vista come una collezione di sottoinsiemi chiusi sotto semplici operazioni di carattere algebrico e insiemistico. Abbiamo anche osservato che la gerarchia degli insiemi *«definibili»* che in questo modo si ottiene può talora perdersi nei meandri di complicazioni sempre maggiori che, alternando combinazioni booleane, proiezioni ed altro, producono insiemi sempre nuovi in un crescendo di difficoltà che pare sfuggire ad ogni controllo, e del resto si collega a famosi fenomeni di indecibilità e incompletezza: è questo il caso, già commentato, di naturali, interi e razionali (con addizione e moltiplicazione). Lo studio di questi insiemi interessa la Teoria della Recursione, o anche la Teoria Descrittiva degli Insiemi; non riguarda direttamente, invece, la Teoria dei Modelli, almeno come adesso la intendiamo.

La Teoria dei Modelli guarda, invece, agli altri casi elencati, nei quali gli insiemi definibili formano una classe non sempre semplice, tuttavia chiara, ben delineata e di rilevante interesse matematico. Anzi, in ciascuno di questi casi, gli insiemi definibili costituiscono l'ambiente adeguato per sviluppare buona e nitida matematica: la geometria algebrica complessa nel caso algebricamente chiuso, la geometria algebrica reale nel caso reale chiuso, e ancora analisi reale o geometria algebrica differenziale in altri esempi che avremo modo di discutere nella seconda parte del lavoro. In alcuni di questi casi, lo studio matematico (algebrico, analitico e geometrico) precede e in qualche modo ispira l'approccio con la Teoria dei Modelli: questo è quanto capita, ad esempio, nei campi complesso e reale. Talora, invece, è la Teoria dei Modelli a indirizzare lo studio matematico, come potremo presto osservare.

Così la Teoria dei Modelli si può definire come la

«*geografia della matematica docile*»

per usare un fortunato slogan coniato alcuni anni fa da Lou Van den Dries e Ehud Hrushovski: la classificazione degli ambienti e delle strutture in cui si può sviluppare buona matematica, lontana da fenomeni di incompletezza e indecidibilità, e lo studio delle nozioni e degli strumenti astratti che permettono di sviluppare in generale questa classificazione. Questo punto di vista, se ha perso parte del primitivo entusiasmo che lo ispirava qualche anno fa e pare oggi per certi versi un po' superato, descrive bene l'evoluzione della Teoria dei Modelli rispetto all'ambito delineato da Tarski, e comunque ricorda le sue recenti molteplici applicazioni ad altri rami della matematica e l'interesse che, di conseguenza, ha meritato. Ma di queste applicazioni (che corroborano e confermano la predizione di Abraham Robinson ricordata all'inizio di questi appunti) avremo modo di parlare nel successivo articolo dedicato al nostro tema. Per adesso ci accontentiamo di aver tracciato alcune linee della storia della Teoria dei Modelli nei suoi 50 anni di vita, dagli albori (e dalla rigida terna strutture/formule/verità) ai recenti sviluppi sulla nozione di definibile ed alle conseguenti aperture ad Algebra e Geometria. Dell'utilità di queste ultime applicazioni avremo modo di parlare nell'articolo futuro già preannunciato.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] J. BARWISE - S. FEFERMAN, *Model theoretic logics*, Springer, Part A (1985), 1-120.

[2] P. CINTIOLI - C. TOFFALORI, *Logica Matematica*, McGraw-Hill Italia (2000).

[3] J. DONER - W. HODGES, *Alfred Tarski and decidable theories*, J. Symbolic Logic, **53** (1988), 20-135.

[4] H. J. KEISLER, *Elementi di Analisi Matematica*, Piccin (1982).

[5] C. MANGIONE - S. BOZZI, *Storia della Logica*, Garzanti, Milano (1993).

[6] A. MARCJA - C. TOFFALORI, *A guide to classical and modern Model Theory*, Kluwer (2003).

[7] A. ROBINSON, *Introduzione alla Teoria dei Modelli e alla metamatematica dell'algebra*, Boringhieri (1974).

[8] A. ROBINSON, *Nonstandard analysis*, North Holland (1974).

[9] A. TARSKI, *A decision problem for elementary algebra and geometry*, University of California Press (1951).

[10] A. TARSKI, *Contributions to the theory of models*, Indag. Math., **16** (1954), 572-581 e 582-588.

[11] R. VAUGHT, *Model theory before 1945, Proceedings of Tarski Symposium*, Amer. Math. Soc. (1974), 153-172.

Carlo Toffalori, Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino, Via Madonna delle Carceri, 62032 Camerino, Italy.
E-mail: carlo.toffalori@unicam.it

Stefano Leonesi, Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino, via Madonna delle Carceri, 62032 Camerino, Italy.
E-mail: stefano.leonesi@unicam.it

Sonia L'Innocente, Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino, via Madonna delle Carceri, 62032 Camerino, Italy.
E-mail: sonia.linnocente@unicam.it