BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

GIANLUCA ALLEMANDI

# Simmetrie di Noether ed entropia dei buchi neri

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 427–430.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_427_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 427-430

# Simmetrie di Noether ed entropia dei buchi neri.

GIANLUCA ALLEMANDI

La tesi di Dottorato elaborata si presenta come una rete di idee e di differenti teorie che convergono allo scopo finale di definire e calcolare l'entropia di una soluzione di buco nero delle equazioni di Einstein, quantità considerata come un parametro termodinamico macroscopico, di cui sia data una ben definita interpretazione geometrica. Gli argomenti che vengono trattati e sviluppati, a differenti livelli di approfondimento, sono tutti finalizzati alla comprensione della teoria che lega il teorema di Noether all'interpretazione geometrica dell'entropia e della termodinamica dei buchi neri.

La definizione dell'entropia per soluzioni di buco nero delle equazioni di Einstein e l'analogia tra le proprietà geometriche dello spaziotempo e la termodinamica classica hanno assunto negli ultimi decenni un ruolo fondamentale. Questi argomenti forniscono informazioni riguardo al comportamento termodinamico di un buco nero, considerato come un sistema termodinamico macroscopico, che possono servire inoltre come verifica per una eventuale teoria quantistica della Gravità. Non esiste attualmente un'unica descrizione quantistica microscopica della gravità in grado di soddisfare contemporaneamente le condizioni di accettabilità da un punto di vista sia matematico che fisico. Ogni teoria che si proponga come candidata al fine di una descrizione quantistica della relatività dovrà tuttavia riprodurre gli stessi risultati della teoria macroscopica classica, perlomeno in approssimazione di bassa energia. Questo in particolare dovrà verificarsi per il calcolo dell'entropia dei buchi neri.

È nostra profonda convinzione che ogni teoria che si proponga come candidata per descrivere la teoria dell'entropia dei buchi neri, legata a fenomeni di larga scala dello spaziotempo, debba soddisfare i principi fondamentali imposti dalla Relatività Generale ad ogni passo della costruzione. Pertanto l'approccio utilizzato per definire le quantità conservate dello spaziotempo è un approccio geometrico globale e covariante e ogni quantità ha un ben definito significato geometrico, che rispetta la struttura geometrica *naturale* dello spaziotempo imposta dalla Relatività Generale. Questo è equivalente, da un punto di vista fisico, a richiedere l'indipendenza dall'osservatore delle quantità fisicamente misurabili. A tal fine, quando la teoria della Relatività è considerata in interazione con campi di gauge, si deve imporre l'invarianza di gauge della teoria, che trova la sua struttura geometrica portante nel contesto delle cosiddette teorie gauge naturali. L'utilizzo di strumenti e teorie matematiche, quali i fibrati di getti e i morfismi variazionali, nonché la teoria dei fibrati naturali e gauge-naturali, permettono infatti di ottenere i risultati desiderati.

Il teorema di Noether, generalizzato al caso di teorie di campo globali, è generalmente assunto come il mezzo naturale per costruire quantità conservate, in relazione alle simmetrie dello spazio tempo o, più in generale, alle simmetrie dello spazio delle configurazioni (se si stanno considerando teorie non naturali). Le quantità conservate costruite semplicemente per mezzo del teorema di Noether non possono tuttavia essere utilizzate per definire le quantità fisicamente misurabili, in quanto sussistono alcuni problemi di definizione sia dal punto di vista fisico che matematico, che conducono a risultati non fisici. Le cariche di Noether, infatti, risultano non essere uniche e per di più esse dipendono inevitabilmente dalla scelta di un *background* per la teoria di campo. Questo comporta il ben noto problema del fattore anomalo per la Relatività Generale (ovvero le cariche calcolate teoricamente non concordano con quelle fisicamente attese), che è a sua volta in relazione con la scelta non banale di un livello zero per le quantità conservate in teoria dei campi.

Un ulteriore problema è presente nelle teorie gauge naturali; le quantità conservate sono definite rispetto a un vettore sullo spazio delle configurazioni, che si assume essere il rilevamento di un generatore infinitesimo di diffeomorfismi, di cui non conosciamo tuttavia la forma a priori.

Questo suggerisce una rianalisi della definizione delle quantità conservate ottenute per mezzo del teorema di Noether. Il cosiddetto metodo *ADM covariante* è utile al fine di correggere il problema del fattore anomalo e suggerisce una definizione della variazione delle quantità conservate piuttosto che una definizione delle quantità conservate assolute, cosa che permette di aggirare il problema della definizione della soluzione di background. Le variazioni delle quantità conservate così ottenute sono dotate di proprietà omologiche che le rendono indipendenti dalla regione (omologicamente equivalente) di spaziotempo su cui vengono valutate.

L'Hamiltoniana della teoria può di conseguenza essere definita, da un punto di vista noetheriano, come la quantità conservata relativa a un campo vettoriale trasverso a una ipersuperficie di Cauchy del fogliettamento $(3+1)$ dello spaziotempo rispetto ad un vettore di tipo tempo. Questo permette una ridefinizione del problema delle quantità conservate in un formalismo hamiltoniano simplettico per mezzo di un approccio alla Regge-Teitelboim.

Da un punto di vista prettamente fisico questo è in relazione con la scelta di un osservatore e con la scelta di un tempo proprio per tale osservatore. Una scelta particolare di tale tempo proprio potrebbe sembrare un'incongruenza in un formalismo globale e covariante, tuttavia scaturisce da considerazioni puramente fisiche. Infatti le quantità fisicamente misurabili sono legate giocoforza a un processo di misura fisico effettuato da un particolare osservatore e pertanto ad uno splitting $3+1$ dello spaziotempo relativo al tempo proprio dell'osservatore. La definizione dell'Hamiltoniana del sistema permette di definire naturalmente la variazione dell'energia (e delle altre quantità conservate) rispetto alla superficie di Cauchy su cui *localmente* vive l'osservatore, che è ricca di informazioni fisiche e si presta ad immediate applicazioni.

La teoria sviluppata in un formalismo lagrangiano ed Hamiltoniano per definire le quantità conservate si può applicare sia a teorie naturali (Relatività Generale e teoria di Einstein-Maxwell) che a teorie gauge naturali (teorie di Yang-Mills in interazione con la gravità e teorie di Chern-Simons in dimensione dispari). I risultati ottenuti offrono un quadro completo ed esauriente della definizione e del significato delle quantità conservate in teorie di campo in accordo anche con i risultati preesistenti.

Notevole applicazione del formalismo matematico sviluppato consiste nell'indagare la definizione dell'entropia di una soluzione di buco nero delle equazioni di Einstein, sia nel vuoto che in interazione con campi di gauge. Per mezzo di una definizione macroscopica dell'entropia di un buco nero, introdotta inizialmente da Bekenstein, si stabiliscono una relazione e un'analogia tra le proprietà geometriche di uno spazio tempo singolare e il comportamento del sistema come sistema termodinamico.

Si definisce l'entropia come il fattore di integrazione nel primo principio della termodinamica dove l'energia, il momento angolare e la carica sono definite come le cariche di Noether relative alle opportune simmetrie dello spazio delle configurazioni, mentre la temperatura e il momento angolare sono parametri profondamente legati alla natura termodinamica microscopica dello spaziotempo.

Tale definizione, che corrisponde alla definizione di Clausius in termodinamica classica, è dotata di importanti proprietà:

- presenta proprietà omologiche: è indipendente dalla superficie su cui è valutata che appartenga alla stessa classe di omologia dell'infinità di tipo spazio;
- non richiede che la soluzione sia asintoticamente piatta;
- è indipendente dall'aggiunta di termini di bordo alla lagrangiana della teoria;
- i contributi che derivano da soluzioni di background sono sotto controllo;
- si applica a una ricca gamma di soluzioni di buco nero (anche non stazionari) e in particolare a orizzonti rigidamente rotanti.

Provvisti di tale definizione siamo in grado di calcolare esplicitamente l'entropia e di stabilire il primo principio della termodinamica per un buon numero di soluzioni classiche; ad esempio per le soluzioni di Schwarzschild e di Schwarzshild-de Sitter, la soluzione di BTZ in spazi tridimensionali, sia come soluzioni delle equazioni di campo di Einstein che come soluzioni delle equazioni di campo di Chern-Simons. Per di più tale definizione di entropia permette di analizzare in dettaglio la struttura dei buchi neri di Kerr-Newmann e di Kerr in relazione ai gradi di libertà rotazionali, ovvero la cosiddetta entropia di spin [4].

Risultato di rilievo è stato quello definire le quantità conservate e l'entropia per la soluzione di Taub-Bolt, in relazione alla geometria e alla topologia altamente non banale dello spazio tempo.

Il formalismo sviluppato si applica e si estende alla definizione della termodinamica dei cosiddetti orizzonti isolati, recentemente introdotti da Ashtekar, che generalizzano la definizione di orizzonte degli eventi a situazioni fisicamente più rilevanti [3].

La definizione delle quantità conservate e la trattazione geometrica della termodinamica dei buchi neri si estende inoltre a teorie puramente affini (e pertanto gauge-naturali) come la teoria di Chern-Simons [2]. In tale contesto è possibili trattare la gravità di Lovelock e calcolare e stabilire il primo principio della termodinamica per soluzioni della teoria di Gauss-Bonnet [1].

## BIBLIOGRAFIA

[1] G. Allemandi, M. Francaviglia e M. Raiteri, *Charges and energy in Chern-Simons theories and Lovelock grravity*, Class. Quant. Grav., **20** (2003), 5103-5120.
[2] G. Allemandi, M. Francaviglia e M. Raiteri, *Covariant charges in Chern-Simons AdS3 gravity*, Class. Quant. Grav., **20** (2003), 483-506.
[3] G. Allemandi, M. Francaviglia e M. Raiteri, *Energy in Einstein-Maxwell theory and the first law of isolated horizons via the Noether theorem*, Class. Quant. Grav., **19** (2002), 2633-2655.
[4] G. Allemandi, M. Francaviglia e L. Fatibene, *Spin Entropy for Kerr Black Holes*, GRG, 3 (8) (2001), 1371-1380.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino. E-mail: allemandi@dm.unito.it
Dottorato in Matematica ed Applicazioni
(sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Mauro Francaviglia
Dipartimento di Matematica, Università di Torino