Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Matteo Bonforte

Disuguaglianze di Sobolev, evoluzioni nonlineari e ultracontrattività

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 431–434.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_431_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 431-434

Disuguaglianze di Sobolev, evoluzioni nonlineari e ultracontrattività.

MATTEO BONFORTE

Questa tesi si propone di studiare le connessioni tra la validità di alcune disuguaglianze di tipo Sobolev e la validità di stime super o ultra-contrattive per il semigruppo associato a equazioni nonlineari di evoluzione in diversi contesti. In particolare saremo in grado di studiare le proprietà di contrattività e di regolarizzazione $L^p - L^q$ dei semigruppi definiti da equazioni di evoluzione governate dal *p-Laplaciano* $\left(\frac{du}{dt} = \triangle_p(u)\right)$, l'*Equazione dei Mezzi Porosi* $\left(\frac{du}{dt} = \triangle(u^m)\right)$, e l'*Equazione Doppiamente Nonlineare* $\left(\frac{du}{dt} = \triangle_p(u^m)\right)$.

Nel caso di evoluzioni lineari, questo tipo di connessione è ben noto. L'esempio principale è l'equazione del calore lineare, $\frac{du}{dt} = \triangle(u)$: considerando infatti la soluzione $u(t)$ dell'equazione del calore, corrispondente al dato iniziale $u_0 \in L^q$, allora vale la stima

$$\|u(t, \cdot)\|_r \leq C_{r, q} \frac{\|u_0\|_q}{t^{\left(\frac{d}{2}\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)}} \tag{1}$$

per ogni $r \geq q \in [1, +\infty]$. Questa proprietà è detta *supercontrattività* se $r < +\infty$ e *ultracontrattività* se $r = +\infty$. Nonostante questa stima sia essenzialmente .ovvia per l'equazione del calore su R^d, essa non è affatto ovvia in contesti più generali per quanto concerne i semigruppi associati a operatori uniformemente ellittici del secondo ordine. Ad esempio stime simili si possono ottenere per semigruppi associati ai sub-Laplaciani definiti da una famiglia di campi vettoriali di Hörmander su una varietà Riemanniana.

In ogni caso è ben noto che stime del tipo (1) sono equivalenti alla validità di opportune disuguaglianze di Sobolev per la forma di Dirichlet associata al generatore del semigruppo in questione, oppure a disuguaglianze di tipo Nash o a (più deboli) famiglie di disuguaglianze di Sobolev Logaritmiche (LSI in seguito) per tali forme di Dirichlet. Un'eccellente esposizione di queste tematiche nel caso lineare, corredata da una completa bibliografia sull'argomento, si può trovare nel libro di E.B. Davies [2].

La validità di una singola LSI implica la supercontrattività del semigruppo, mentre la validità di una certa famiglia di LSI implica la *ultracontrattività* del semigruppo, cioè la sua limitatezza come operatore da ogni L^p in L^∞. Questa connessione si estende anche a svariati casi infinito dimensionali. Si veda a tal proposito l'articolo di rassegna [4]. La dimostrazione di queste proprietà nel caso lineare si basa sulla teoria dei semigruppi markoviani simmetrici e anche su altre tecniche tipiche del contesto lineare, basate sul teorema spettrale, su teoremi di interpolazione e di dualità. La dipendenza dalle tecniche tipiche del contesto lineare addirittura si fortifica quando si studiano le relazioni tra la validità di disuguaglianze di Sobolev classiche (o di Nash) per una forma di Dirichlet e le proprietà di contrattività per il semigruppo ad essa associato. Questi fatti hanno portato a studiare le possibili estensioni a contesti nonlineari delle connessioni tra LSI e proprietà di contrattività dei semigruppi.

Dapprima abbiamo dimostrato alcuni risultati preliminari: le LSI nel caso di varietà Riemanniane (sia compatte che non compatte, con e senza bordo), che coinvolgono il seguente funzionale di p-energia:

$$\mathcal{E}_p(u) = \int_M |\nabla u|^p\, dx = \|\nabla u\|_p^p,$$

e alcune disuguaglianze di monotonia per il *funzionale di Entropia* (o funzionale di Young) che saranno di cruciale importanza nei contesti di varietà Riemanniane o domini Euclidei con volume infinito.

Studiamo quindi *l'Equazione dei Mezzi Porosi*, ponendoci la domanda:
È vero che le disuguaglianze di Sobolev Logaritmche implicano stime super o ultracontrattive per le soluzioni dell'equazione dei mezzi porosi?
La risposta è affermativa. Nonostante lo studio delle proprietà asintotiche delle soluzioni dell'equazione dei mezzi porosi sia largamente presente in letteratura, una connessione diretta tra la validità di LSI e tali proprietà non è mai stata studiata prima d'ora. Mostriamo che le LSI possono essere usate per studiare sia le proprietà di regolarizzazione $\mathrm{L}^q - \mathrm{L}^\infty$ sia i comportamenti asintotici (per tempi grandi e per tempi piccoli) dell' equazione dei mezzi porosi, con dati iniziali generali (non necessariamente positivi), nel contesto delle varietà Riemanniane di volume finito o infinito, senza e con bordo, nel qual caso si assumono condizioni di Dirichlet o Neumann omogenee. Grazie al nostro approccio essenzialmente analitico-funzionale, tutti i diversi casi si possono trattare quasi allo stesso modo. Il secondo capitolo della tesi è essenzialmente dedicato alla dimostrazione dei seguenti risultati:

TEOREMA 1. – *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta connessa e regolare e senza bordo, di dimensione $d \geq 3$. Sia $u(t)$ la soluzione debole del problema:*

$$\begin{cases} \dot{u} = \triangle(u^m), & in\ (0, +\infty) \times M \\ u(0, \cdot) = u_0 \in L^q(M), & in\ M \end{cases} \tag{2}$$

dove $1 \leq q \leq +\infty$, $m > 1$, e $u^m = |u|^{m-1}u = |u|^m sgn(u)$. Allora le seguenti stime ultracontrattive valgono per ogni $t \in (0, 1]$

$$\|u(t)\|_\infty \leq C \frac{\|u_0\|_q^\gamma}{t^\alpha} \tag{3}$$

dove $\alpha = \dfrac{1}{m-1}\left[1 - \left(\dfrac{q}{q+m-1}\right)^{d/2}\right]$, $\gamma = \left[\dfrac{q}{q+m-1}\right]^{d/2}$ *e C dipende solo da*

m, q, d, $\mathrm{Vol}(M)$ e dalla costante A che compare nella disuguaglianza di Sobolev

$$\|u - \overline{u}\|_{2d/(d-2)} \leqslant A\|\nabla u\|_2. \tag{4}$$

Per tempi grandi, cioè per $t > T(u_0)$, si ha inoltre, se $\overline{u} = \overline{u_0} = \mathrm{Vol}(M)^{-1} \int_M u_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \frac{C}{\left(B(t-1) + \|u_0\|_q^{-(m-1)}\right)^{\frac{\gamma}{m-1}}} \tag{5}$$

inoltre per $t > T(u_0)$ e $r \in [1, +\infty)$ esiste $B_r > 0$ tale che valga la seguente stima assoluta

$$\|u(t)\|_r \leqslant \frac{1}{(B_r t)^{\frac{1}{m-1}}}. \tag{6}$$

Se inoltre $\overline{u_0} \neq 0$ allora

$$\|u(t) - \overline{u_0}\|_\infty \leqslant K\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\|u_0 - \overline{u_0}\|_q^\gamma \tag{7}$$

vale per ogni $t > T(u_0)$, dove $\sigma \propto |\overline{u}_0/2|^{m-1}$. Lo stesso risultato vale se M non è necessariamente compatta, ma ha volume finito, curvatura limitata dal basso e raggio di iniettività strettamente positivo.

Si noti che $\alpha \to d/(2q)$ and $\gamma \to 1$ quando $m \downarrow 1$, come è logico aspettarsi confrontando questo risultato con la stima ultracontrattiva (1) valida nel caso lineare. Il prossimo teorema concerne il caso delle *varietà con volume infinito* ed è quello che evidenzia maggiormente la similitudine con il caso lineare.

TEOREMA 2. – *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e regolare e senza bordo, con volume infinito e di dimensione $d \geqslant 3$, tale che valga la disuguaglianza di Sobolev:*

$$\|u\|_{\frac{2d}{d-2}} \leqslant A^*\|\nabla u\|_2. \tag{8}$$

Sia $u(t)$ la soluzione debole del problema (2) *con $m > 1$ e dato iniziale $u_0 \in L^q(M)$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$. Allora valgono le seguenti stime ultracontrattive per ogni $t > 0$*

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant C\frac{\|u_0\|_q^\gamma}{t^\alpha} \tag{9}$$

dove $\alpha = \dfrac{d}{2q + d(m-1)}$, $\gamma = \dfrac{2q}{2q + d(m-1)}$ e C dipende solo da m, q, d e dalla costante A^* della disuguaglianza di Sobolev (8).

Notiamo solamente che questi risultati sono consistenti con quelli presenti in letteratura per nel caso Euclideo di R^n, ma senza restrizioni sul segno o sulla limitatezza del dato iniziale. Risultati analoghi ai due teoremi appena esposti valgono nei casi di *varietà Riemanniane con bordo regolare*, assumendo condizioni di Dirichlet o Neumann omogenee.

Nel terzo capitolo abbiamo ottenuto risultati analoghi a quelli del capitolo precedente per il semigruppo governato dal p-Laplaciano, su varietà Riemanniane compatte. Le stime ultracontrattive ottenute sono analoghe a quelle ottenute nel Teorema 1. Per motivi di brevità non li riportiamo esplicitamente.

Nel quarto e ultimo capitolo abbiamo studiato l'equazione doppiamente nonlineare, nel contesto dei domini Euclidei (con e senza bordo, di misura finita o infinita), con condizioni di Dirichlet omogenee e dati iniziali generali. Detta $u(t)$ la soluzione debole dell'equazione doppiamente nonlineare

$$\begin{cases} \dot{u} = \triangle_p(u^m) := \nabla\cdot(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m) \\ u(0,\cdot) = u_0 \in L^q(M) \\ u(t,x) = 0, \qquad \text{if} \quad t>0 \ \text{ e } \ x\in\partial M \end{cases} \tag{10}$$

dove $M \subseteq R^d$ è un dominio aperto e connesso e $p>1$, $m>0$, $m(p-1)\geqslant 1$, $q\geqslant 1$, allora valgono le seguenti stime super ($\varrho<\infty$) e ultra ($\varrho=\infty$) contrattive:

$$\|u(t)\|_\varrho \leqslant C\frac{\|u_0\|_q^\gamma}{t^\alpha} \tag{11}$$

dove $\varrho > q \geqslant 1$, α, γ, C sono costanti positive e esplicitamente calcolate. Gli esponenti α, γ sono gli unici possibili affinchè delle stime di questo tipo valgano.

La trattazione di questo problema è basata su un recente risultato di M. Del-Pino e J. Dolbeault [3] sulla validità di LSI Euclidee con costanti ottimali, per il funzionale $\mathcal{E}_p$. Di conseguenza abbiamo potuto affrontare questo problema in un generico aperto Euclideo $M \subseteq R^n$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CIPRIANI F. e GRILLO G., *Uniform bounds for solutions to quasilinear parabolic equations*, J. Differential Equations, **177** (2001), 209-234.

[2] E.B. DAVIES, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press (1989).

[3] M. DEL PINO e J. DOLBEAULT, *The optimal Euclidean Sobolev logarithmic inequality*, J. Funct. Anal., **197** (2003), 151-161.

[4] L. GROSS, *Logarithmic Sobolev Inequalities and Contractive Properties of Semigroups*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **1563** (1994).

Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino
e-mail: bonforte@calvino.polito.it
Dottorato di Ricerca in Matematica e Applicazioni
(sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Gabriele Grillo, Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino