**Bollettino Unione Matematica Italiana**

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

Stefania Maria Buccellato

# Sistema di equazioni di un gas viscoso barotropico per il moto dell'atmosfera con la forza di Coriolis

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 443–446.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_443_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 443-446

# Sistema di equazioni di un gas viscoso barotropico per il moto dell'atmosfera con la forza di Coriolis.

STEFANIA MARIA BUCCELLATO

Oggetto della tesi è studiare un sistema di equazioni per un fluido viscoso comprimibile e barotropico che può essere considerato un modello matematico del moto dell'atmosfera terrestre. Poiché la forza gravitazionale e la forza centrifuga possono essere espresse da $-\varrho\nabla\Phi$ con un potenziale $\Phi$ (nel sistema di coordinate che ruota assieme alla Terra), si considera un dominio $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \ |\mathbf{x}| < r_1, \Phi_0 < \Phi(\mathbf{x}) < \Phi_1\}$, dove $\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0\}$ corrisponde alla superficie terrestre, mentre $\Phi_1$ e, quindi, $\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \Phi(\mathbf{x}) = \Phi_1\}$ si sceglie in modo opportuno. In questo sistema di coordinate la forza di Coriolis assume l'espressione $-2\varrho\omega \times \mathbf{u}$. Perciò dal sistema di equazioni generali per un fluido viscoso barotropico ([5], [6], [7]) si deduce il seguente sistema di equazioni

$$\varrho\partial_t \mathbf{u} + \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} - \lambda\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + 2\varrho\omega \times \mathbf{u} = -h\nabla\varrho^{\gamma} - \varrho\nabla\Phi \quad su \quad \Omega \times \mathbf{R}^+, \tag{1}$$

$$\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho\mathbf{u}) = 0 \quad \text{su} \quad \Omega \times \mathbf{R}^+, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}_{|t=0} = \mathbf{u}_0(x), \qquad \varrho_{\,|t=0} = \varrho_0(x) \quad \text{su} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}_{|\Gamma_0} = 0, \quad \mathbf{u}\cdot\vec{n}_{|\Gamma_1} = \sum_{j=1}^{3} n_i \tau_j \partial_{x_i} u_{j|\Gamma_1} = 0 \quad \forall\vec{\tau} \perp \vec{n} \quad \text{o} \quad \mathbf{u}_{|\Gamma_1} = 0, \tag{4}$$

dove $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$ è la velocità del fluido, $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$ è la densità, $\omega$ è la velocità angolare della Terra, $\mu$, $\lambda$ sono i coefficienti di viscosità (costanti positive, $\lambda \geqslant \frac{1}{3}\mu$), $\gamma$ è una costante tale che $1 \leqslant \gamma < 2$, $h$ una costante positiva.

I risultati principali consistono nella prova dell'esistenza ed unicità della soluzione locale nel tempo e della soluzione globale nel tempo (sotto l'ipotesi di piccolezza dei dati iniziali) e nella prova della convergenza asintotica della soluzione allo stato di equilibrio $(0, \varrho_{eq})$ sia nel caso in cui $\gamma = 1$ che $\gamma > 1$. Per enunciare i risultati, poniamo

$\mathcal{V}_0 = \{u \in C^{\infty}(\Omega) : u$ verifica le condizioni al contorno$\}$,

$V_0 = \overline{\mathcal{V}_0}^{H^2(\Omega)}$: chiusura di $\mathcal{V}_0$ nella topologia di $H^2(\Omega)$.

Allora si dimostrano i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. – *Supponiamo che $u_0 \in V_0$, $\varrho_0 \in H^2(\Omega)$, $0 < \alpha_0 \leqslant \varrho_0(x) \leqslant \beta_0 < \infty$ $\forall x \in \Omega$ (con $\alpha_0$ e $\beta_0$ costanti) e che $1 \leqslant \gamma < 2$. Allora esistono un numero positivo $\overline{T}$ e due costanti positive $\alpha$ e $\beta$ tali che nell'intervallo di tempo $[0, \overline{T}]$ il problema*

(1)-(4) *ammette una ed una sola soluzione nella classe*

$$u \in L^2(0, \overline{T}; H^3(\Omega) \cap V_0) \cap L^\infty(0, \overline{T}; H^2(\Omega)),$$

$$\partial_t u \in L^2(0, \overline{T}; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \overline{T}; L^2(\Omega)),$$

$$\varrho \in L^\infty(0, \overline{T}; H^2(\Omega)), \quad 0 < \alpha \leqslant \varrho(x, t) \leqslant \beta < \infty .$$

TEOREMA 2. – *Sia* $\gamma = 1$, $J(x, t) = \dfrac{\varrho(x, t)}{\varrho_{eq}(x)}$, *(*$\varrho_{eq}(x)$ *densità in equilibrio). Allora esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che, se* $u_0 \in V_0$ *e se* $\|u_0\|_{H^2}^2 + \|\log J(\cdot, 0)\|_{H^2}^2 \leqslant \delta$, *il problema* (1)-(4) *ammette, in tutto l'intervallo di tempo* $[0, \infty[$, *una ed una sola soluzione nella classe*

$$u \in L^2(0, \infty; H^3(\Omega) \cap V_0) \cap L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega));$$

$$\partial_t u \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)); \quad \varrho \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)).$$

*Inoltre la soluzione* $(u, \varrho)$ *tende a* $(0, \varrho_{eq})$ *per* $t \to \infty$ *con*

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1}^2 + \|\sqrt{\varrho_{eq}}\,\partial_t u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\log J(\cdot, t)\|_{H^2}^2 \leqslant ce^{-\varepsilon_0 t}, \quad \varepsilon_0 > 0 .$$

TEOREMA 3. – *Supponiamo che* $1 < \gamma < 2$. *Allora esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che, se* $u_0 \in V_0$ *e* $\|u_0\|_{H^2}^2 + \|\varrho_0 - \varrho_{eq}\|_{H^2}^2 \leqslant \delta$, *il problema* (1)-(4) *ammette, in tutto l'intervallo di tempo* $[0, \infty[$, *una ed una sola soluzione nella classe*

$$u \in L^2(0, \infty; H^3(\Omega) \cap V_0) \cap L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)),$$

$$\partial_t u \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad \varrho \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)),$$

*e la soluzione* $(u, \varrho)$ *tende a* $(0, \varrho_{eq})$ *per* $t \to \infty$ *e verifica la disuguaglianza*

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1}^2 + \|\sqrt{\varrho_{eq}}\,\partial_t u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\varrho(\cdot, t) - \varrho_{eq}\|_{H^2}^2 \leqslant ce^{-\varepsilon_0 t}, \quad (c > 0)$$

*con una costante* $\varepsilon_0 > 0$.

Dal punto di vista tecnico, la dimostrazione di tali teoremi utilizza tecniche sviluppate in [1], [2], [3].

**Idea della dimostrazione del Teorema 1.**

Si procede con la linearizzazione delle equazioni

$$\varrho \partial_t u - \mu \Delta u - \lambda \nabla(\nabla \cdot u) + 2\varrho\omega \times u = -\varrho(\overline{u} \cdot \nabla)\, u - h\nabla\varrho^\gamma - \varrho\nabla\Phi ,$$

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho\overline{u}) = 0, \quad \varrho_{|t=0} = \varrho_0(x),$$

dove $\overline{u}$ si suppone nota, e con l'applicazione del principio del punto fisso di Schauder. È cruciale la costruzione dell'insieme

$$B_T = \{\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) : M(\varphi; T) \leq \bar{r}_0,\ N(\varphi; T) \leq R_0\},$$

$$M(\varphi; T) = \max(\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^3)}, \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^2)}, \|\partial_t \varphi\|_{L^2(0,T;H^1)}, \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2)}),$$

$$N(\varphi; T) = \left(\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;\tilde{H}^1)} + \|\partial_t \varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\partial_t \varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|\partial_t \varphi\|^2_{L^2(0,T;\tilde{H}^1)}\right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{\tilde{H}^1} = \langle u, u\rangle^{1/2}_{\tilde{H}^1}, \quad \langle u, v\rangle_{\tilde{H}^1} = \int_\Omega \left[\mu \sum_{j,k=1}^{3} \partial_{x_j} u_k\, \partial_{x_j} v_k + \lambda(\nabla\cdot u)(\nabla\cdot v)\right] dx,$$

con particolare scelta di $R_0$ e $\bar{r}_0$.

**Idea della dimostrazione dei Teorema 2 e 3.**

Con stime *a priori* della soluzione del sistema di equazioni (1), si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \mathcal{D}(t) \leq k_0(\sigma)\,\mathcal{D}(t) \sum_{j=1}^{m} c_j(\mathcal{L}(t))^{\nu_j}, \tag{2}$$

dove, se $\gamma = 1$,

$$\mathcal{L}(t) = \Lambda_1\left(\frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho}u\|^2_{L^2} + h\int_\Omega \frac{q^2}{2\,\bar{\varrho}}\,dx\right) + \Lambda_2\|u\|^2_{\tilde{H}^1} + \Lambda_3\|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|^2_{L^2} + \Lambda_4\|\sigma\|^2_{L^2} + \Lambda_5\|\nabla\cdot\sigma\|^2_{L^2},$$

$$\mathcal{D}(t) = \|u\|^2_{\tilde{H}^1} + \|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|^2_{L^2} + \|\partial_t u\|^2_{\tilde{H}^1} + \|\sigma\|^2_{L^2} + \|\nabla\cdot\sigma\|^2_{L^2} + \|\Delta u\|^2_{L^2} + \|\Delta u\|^2_{L^4},$$

e, se $1 < \gamma < 2$,

$$\mathcal{L}(t) = \Lambda_1\left(\frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho}u\|^2_{L^2} + \frac{h\gamma}{2}\int_\Omega \bar{\varrho}^{\gamma-2} q^2\,dx\right) + \Lambda_2\|u\|^2_{\tilde{H}^1} + \Lambda_3\|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|^2_{L^2} + \Lambda_6\|\nabla Q\|^2_{L^2} + \Lambda_7\|\Delta Q\|^2_{L^2},$$

$$\mathcal{D}(t) = \|u\|^2_{\tilde{H}^1} + \|\sqrt{\varrho}\partial_t u\|^2_{L^2} + \|\partial_t u\|^2_{\tilde{H}^1} + \|\Delta u\|^2_{L^2} + \|\Delta u\|^2_{L^4} + \|\nabla Q\|^2_{L^2} + \|\Delta Q\|^2_{L^2},$$

$$\sigma(x,t) = \nabla \log J(x,t), \quad q(x,t) = \varrho(x,t) - \varrho_{eq}(x), \quad Q(x,t) = \varrho(x,t)^{\gamma-1} - \varrho_{eq}(x)^{\gamma-1},$$

$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(x, t)$ è un valore tra $\varrho(x, t)$ e $\varrho_{eq}(x)$, mentre $\Lambda_i$ sono costanti scelte in modo opportuno.

Per ottenere la (2), per la velocità $u$ si usano tecniche di stime *a priori* per le equazioni di tipo parabolico, mentre per la densità $\varrho$ è essenziale stimarla mediante le stime di $\sigma(x, t)$ (nel caso $\gamma = 1$) o di $Q(x, t)$ e $q(x, t)$ (nel caso $1 < \gamma < 2$) qui sopra definite, utilizzando anche il teorema di traccia ([LM]). Inoltre l'uguaglianza dell'energia viene espressa in modo opportuno con l'uso di $\overline{\varrho}$ (come nel lavoro [Pad3]).

Una volta ottenuta la (2), si vede facilmente che esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\mathcal{L}(t) \leqslant \delta \;\Rightarrow\; k_0(\sigma) \sum_{j=1}^{m} (\mathcal{L}(t))^{\nu_j} \leqslant \frac{1}{2},$$

e, quindi,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{D}(t) \leqslant 0.$$

Di conseguenza, se $\mathcal{L}(0) \leqslant \delta$, allora si ha $\mathcal{L}(t) \leqslant \delta \; \forall t \geqslant 0$. Perciò applicando ripetutamente il teorema 1, si può prolungare la soluzione $(u, \varrho)$ in $[0, \infty[$. L'unicità della soluzione globale segue dall'unicità della soluzione locale.

Inoltre, dall'espressione di $\mathcal{L}(t)$ e di $\mathcal{D}(t)$ si deduce che esiste una costante $k_0$ tale che $\mathcal{L}(t) \leqslant k_0 \mathcal{D}(t)$. Perciò, posto $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2k_0} > 0$, se $\mathcal{L}(0) \leqslant \delta$, si ha $\dfrac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \varepsilon_0 \mathcal{L}(t) \leqslant 0$, e quindi si ha $\mathcal{L}(t) \leqslant \mathcal{L}(0) e^{-\varepsilon_0 t}$. Ciò significa che la soluzione $(u, \varrho)$ tende asintoticamente a $(0, \varrho_{eq})$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] R. BENABIDALLAH, *Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans l'espace entier avec une force extérieure dérivant d'un potentiel*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **94** (1995), 245-274.

[2] R. BENABIDALLAH, *Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans le demi-espace avec une force extérieure dérivant d'un potentiel*, J. Math. Univ. Kyoto, **38** (1998), 1-20.

[3] R. BENABIDALLAH, *Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans un domaine extérieur assujetti à une grande force dérivant d'un potentiel*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **7** (1998), 599-625.

[4] L. D. LANDAU, E. M. LIFCHITZ, *Mécanique des fluides, Physique théorique, Tome VI)* terza edizione, in russo, Nauka, (1986; traduzione francese, Mir, (1989).

[5] J.-L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Paris, (1968).

[6] P.-L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics*, vol. I, II, Oxford, (1996, 98).

[7] M. PADULA, *Stedy flows of barotropic viscous fluids,* Classical problems in mechanics (Quaderno di Mat. II Univ. Napoli, **I**, 253-345, Caserta, (1997).

[8] M. PADULA, *On direct Lyapunov method in continuum theories,* Intern. Math. Series, Nonlin. Probl. in Math. Phys. Rel. Topics, In honor of O. A. Ladyzhenskaya, **1** (2002), 271-283 (in russo), 289-302 (in inglese).

Dipartimento di Matematica, Università di Palermo. E-mail: bucci@math.unipa.it
Dottorato in Matematica, (sede amministrativa: Università di Palermo) - Ciclo XIII
Direttore di ricerca: Prof. Vetro, Università di Palermo.