Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Daniela Calvo

Classi di Gevrey multi-anisotrope e problema di Cauchy

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 447–450.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_447_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 447-450

Classi di Gevrey multi-anisotrope e problema di Cauchy.

DANIELA CALVO

Argomento della tesi è lo studio di alcune generalizzazioni delle classi di Gevrey, e la trattazione in quest'ambito funzionale del problema di Cauchy per operatori alle derivate parziali lineari e sistemi del primo ordine.

Per introdurre la problematica, incominciamo con il richiamare alcuni risultati noti. Consideriamo il problema di Cauchy per un operatore differenziale lineare di tipo Kowalevskiano in $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} Pu(t, x) = D_t^m u(t, x) + \sum_{|\nu| + j \leq m,\, j \neq m} a_{\nu j}(t, x)\, D_x^\nu D_t^j u(t, x) = 0 \\ D_t^j u(0, x) = u_j(x), \quad j = 0, \ldots, m-1 \end{cases}.$$

L'operatore P si dice debolmente iperbolico se il simbolo principale:

$$\text{(2)} \qquad P(t, x, \lambda, \xi) = \lambda^m + \sum_{\substack{|\nu| + j = m \\ j \neq m}} a_{\nu j}(t, x)\, \xi^\nu \lambda^j$$

ha solo radici reali $\lambda(t, x, \xi)$ per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ e ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$; quando le radici sono reali e distinte si dice che P è strettamente iperbolico.

Nella tesi è stato considerato anche il caso più generale di sistemi differenziali e pseudodifferenziali del primo ordine a coefficienti variabili, che accenneremo soltanto per motivi di brevità.

Per operatori differenziali a coefficienti analitici, il teorema di Cauchy-Kowalevski assicura la buona positura del problema di Cauchy (1) per dati analitici, cioè se le funzioni $u_j(x)$ sono analitiche in un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^n$, allora esiste un'unica soluzione $u(t, x)$ analitica in un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$. Passando invece a considerare l'insieme delle funzioni infinitamente differenziabili C^∞, la debole iperbolicità non è sufficiente a garantire la buona positura del problema di Cauchy in C^∞. Infatti, partendo da un operatore differenziale omogeneo a coefficienti costanti, per cui si ha la buona positura in C^∞, essa viene meno se si aggiungono termini di ordine inferiore (ad esempio l'operatore del calore) o si ammettono coefficienti variabili (cf. Colombini-Spagnolo). Riguardo alle condizioni che assicurano la buona positura del problema di Cauchy in C^∞, ricordiamo i lavori di Ivrii, Mizohata, Komatsu, Leray e Ohya. Un' altra analisi mira a stabilire in quali classi di funzioni il problema di Cauchy sia ben posto per operatori debolmente iperbolici. In quest'ambito, svolgono un ruolo fondamentale le classi di Gevrey G^s ($s \in \mathbb{R}$, $s \geq 1$), spazi intermedi tra le funzioni analitiche e C^∞, che intervengono in diverse problematiche relative agli operatori differenziali. Si ha in particolare $G^s \subset C^\infty$ per ogni s e G^1 è l'insieme delle funzioni analitiche. Per un'estesa trattazione ci riferiamo alla monografia [5]. Più precisamente, per operatori debolmente iperbolici a coefficienti in G^s, se M denota la molteplicità massima delle radici del polinomio caratteristico (3), il problema di Cauchy è ben posto nelle classi di Gevrey G^s se $1 \leqslant s \leqslant \dfrac{M}{M-1}$. Questo risultato fu provato da Larsson e Cattabriga [2] per operatori a coefficienti costanti, da Steinberg e Bronstein per sistemi a coefficienti variabili e da Kajitani nel caso nonlineare. Sotto ipotesi aggiuntive sulla parte pricipale e sui termini di ordine inferiore, si può ampliare l'intervallo degli indici Gevrey per cui si ha buona positura, cf. Leray e Ohya.

Il lavoro svolto nella tesi va in questa direzione, presentando alcune condizioni sufficienti ad assicurare la buona positura del problema di Cauchy nelle classi di Gevrey multi-anisotrope e in quelle inomogenee, che ampliano l'insieme delle funzioni Gevrey standard. La prima parte della tesi è quindi dedicata allo studio di questi ambiti funzionali. Le classi di Gevrey multi-anisotrope sono basate sulla nozione di poliedro multi-quasi-ellittico, o completo, e sono state studiate da vari autori, tra cui Friberg, Gindikin-Volevich [4], Cattabriga [2], Kazharyan, Hakobyam-Markaryan, Bouzar-Chaili, Corli e Zanghirati.

DEFINIZIONE 1. – *Un poliedro completo in $\mathbb{R}^n$ è un poliedro convesso $\mathcal{P}$ contenuto in $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0\}$ tale che: i) i vertici di $\mathcal{P}$ hanno coordinate intere o razionali; ii) l'origine appartiene a $\mathcal{P}$; iii) $\mathcal{P}$ ha un vertice su ciascun asse coordinato; iv) le componenti dei vettori normali di ciascuna faccia esterna hanno componenti strettamente positive.*

Per la teoria successiva dobbiamo introdurre alcune notazioni; denotando con $\mathcal{N}_1(\mathcal{P})$ l'insieme dei vettori normali relativi alle facce esterne del poliedro completo $\mathcal{P}$ e con $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ l'insieme dei suoi vertici, definiamo:

$\mu = \max\limits_{\nu \in \mathcal{N}_1(\mathcal{P})} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \dfrac{1}{\nu_j}$ l'ordine formale di $\mathcal{P}$,

$k(\alpha, \mathcal{P}) = \inf\{t > 0 : t^{-1}\alpha \in \mathcal{P}\}$,

$|\xi|_{\mathcal{P}} = \left(\sum\limits_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \xi^{2v}\right)^{1/2\mu}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, la funzione peso associata a $\mathcal{P}$.

Dato un poliedro completo $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^n$, per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e ogni numero reale $s > 1$ diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 2. – *Diciamo che una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$* sta nella classe di Gevrey multi-anisotropa di ordine s associata al poliedro completo $\mathcal{P}$, $G^{s,\mathcal{P}}(\Omega)$, se per ogni sottoinsieme compatto K di Ω esiste una costane $C > 0$ tale che

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1}(\mu k(\alpha, \mathcal{P}))^{s\mu k(\alpha, \mathcal{P})}, \qquad \forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Inoltre definiamo $G_0^{s,\mathcal{P}}(\Omega) = G^{s,\mathcal{P}}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$ l'insieme delle funzioni di Gevrey multi-anisotrope a supporto compatto.

Esempi rilevanti sono forniti dalle classi di Gevrey standard $G^s(\Omega)$ e dalle Gevrey multi-anisotrope $G^{s,\mathcal{P}}$ per ogni poliedro completo $\mathcal{P}$ e ne rappresentano un esempio rilevante, insieme alle classi di Gevrey anisotrope (in cui l'insieme $\mathcal{N}_1(\mathcal{P})$ contiene un solo elemento) studiate da Pini, Barozzi, Gindikin-Volevich [4], Zanghirati e altri. Si osservi inoltre che $G^s(\Omega) \subset G^{s,\mathcal{P}}(\Omega)$ per ogni poliedro completo $\mathcal{P}$.

Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier e dei poliedri completi, è stato possibile provare una caratterizzazione equivalente delle funzioni di Gevrey multi-anisotrope a supporto compatto, in analogia con il caso Gevrey standard.

TEOREMA 1. – *Una distribuzione a supporto compatto $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ appartiene a $G_0^{s,\mathcal{P}}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se esistono due costanti C, $\varepsilon > 0$ per cui la trasformata di Fourier $\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\, u(x)\, dx$ soddisfa*

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C \exp\left(-\varepsilon |\xi|_{\mathcal{P}}^{1/s}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Vengono quindi analizzate le proprietà algebriche e topologiche delle classi di Gevrey multi-anisotrope; in particolare osserviamo che $G^{s,\mathcal{P}}$ non è chiuso rispetto alla moltiplicazione puntuale se $\mathcal{P}$ ha un vertice al di fuori degli assi coordinati (caso non anisotropo). Associato ad ogni poliedro completo $\mathcal{P}$ esiste un poliedro completo $\mathcal{P}^*$, detto poliedro complementare di $\mathcal{P}$, tale che $G^{s,\mathcal{P}^*} \cdot G^{s,\mathcal{P}} \subset G^{s,\mathcal{P}}$ e se $G^{r,\mathcal{P}'} \not\subseteq G^{s,\mathcal{P}^*}$ allora $G^{r,\mathcal{P}'} \cdot G^{s,\mathcal{P}} \not\subseteq G^{s,\mathcal{P}}$.

Abbiamo studiato una ulteriore generalizzazione delle classi di Gevrey multi-anisotrope: le classi di Gevrey inomogenee introdotte da Liess e Rodino, in cui sono state ambientate le stesse problematiche. Passando al problema di Cauchy, consideriamo in dettaglio il caso degli operatori differenziali a coefficienti costanti, per cui abbiamo definito gli operatori differenziali multi-quasi-iperbolici di ordine $s > 1$ associati a un poliedro completo $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^n$, che generalizzando la teoria sviluppata da Larsson e Cattabriga [2] nel caso Gevrey standard. Più precisamente, diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3. – *Un operatore $P(D)$ a coefficienti costanti si dice multi-quasi-iperbolico di ordine $s > 1$ rispetto a $\mathcal{P}$ se esiste una costante $C > 0$ per cui vale la seguente condizione:*

$$P(\lambda, \xi) = \lambda^m + \sum_{\substack{|\nu| + j \leq m \\ j \neq m}} a_{\nu j} \xi^\nu \lambda^j = 0 \Rightarrow \Im \lambda \geq -C |\xi|_{\mathcal{P}}^{1/s}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Gli operatori multi-quasi-iperbolici sono debolmente iperbolici. Sono poi state studiate diverse condizioni sufficienti di multi-quasi-iperbolicità, che coinvolgono ipotesi di tipo Levi sui termini di ordine inferiore, e sono stati forniti diversi esempi.

Passiamo quindi ad enunciare il relativo risultato di buona positura del problema di Cauchy.

TEOREMA 2. – *Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti in* $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, *sia* $\mathcal{P}$ *un poliedro completo in* $\mathbb{R}^n$ *e* $s > 1$. *Se* $P(D)$ *è multi-quasi-iperbolico di ordine r rispetto a* $\mathcal{P}$, $1 < r < s$ *e se* $u_j \in G^{r, \mathcal{P}}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 0, \ldots, m-1)$, *allora il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} P(D)\, u = D_t^m u + \sum\limits_{|\nu| + j \leq m,\, j \neq m} a_{\nu j} D_x^\nu D_t^j u = 0 \\ D_t^j u(0, x) = u_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $u \in C^\infty([-T, T], G^{r, \mathcal{P}}(\mathbb{R}_x^n))$, *per ogni* $T > 0$.

Se $r = s$, la soluzione è solo locale nel tempo. Sotto le ipotesi del Teorema 2 abbiamo ottenuto anche una regolarità Gevrey multi-anisotropa globale rispetto alle variabili spazio-tempo. Le dimostrazioni sono basate su risultati classici riguardanti gli operatori a coefficienti costanti, sulle proprietà della trasformata di Fourier e delle classi di Gevrey multi-anisotrope. Il precedente risultato è stato successivamente generalizzato al caso di sistemi differenziali e pseudodifferenziali iperbolici del primo ordine a coefficienti variabili. La tecnica utilizzata è la quasi-simmetrizzazione di sistemi iperbolici di tipo Sylvester introdotta da D'Ancona-Spagnolo [3] e Jannelli, ed utilizzata qui per la prima volta in abbinamento a condizioni di tipo Levi sui termini di ordine inferiore, cf. [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] D. CALVO, *Cauchy problem in multi-anisotropic Gevrey classes for weakly hyperbolic operators, accettato su* Boll. Un. Mat. It., Sez. B.

[2] L. CATTABRIGA, *Alcuni problemi per equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti*, Quad. Un. Mat. It., Pitagora, Bologna, 24 (1983).

[3] P. D'ANCONA e S. SPAGNOLO, *Quasi-symmetrization of hyperbolic systems and propagation of the analytic regularity*, Boll. Un. Mat. It., **1-B** (1998), 165-185.

[4] G. GINDIKIN e L. R. VOLEVICH, *The method of Newton's polyhedron in the theory of partial differential equations*, Mathematics and its applications, Soviet Series, **86** (1992).

[5] L. RODINO, *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*, World Scientific Publishing Co., Singapore (1993).

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa. E-mail: calvo@dm.unipi.it

Dottorato di Ricerca in Matematica

(sede amministrativa: Università di Pisa) - Ciclo XIV

Direttore di Ricerca: Prof. Luigi Rodino, Università di Torino.