Paolo Camassa

Stati KMS e stati quasi-liberi del campo scalare libero.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 451–454.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_451_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 451-454

Stati KMS e stati quasi-liberi del campo scalare libero.

PAOLO CAMASSA

Il risusltato principale della tesi consiste nella dimostrazione della proprietà di dualità di Haag per una classe di stati quasi-liberi del campo scalare libero in qualsiasi dimensione. Tale classe include gli stati KMS, che sono di particolare interesse per le possibili applicazioni in teoria di campo conforme (cf. Th. 3.3 in [1]).

1. – La teoria quantistica algebrica dei campi.

La formulazione algebrica della teoria quantistica dei campi consiste nel definire la corrispondenza che ad una regione dello spazio-tempo associa la sottoalgebra (nell'algebra di tutte le osservabili) delle osservabili localizzate in quella regione. In questo approccio, il ruolo fondamentale è giocato dalle algebre «locali» di osservabili; i campi sono dei generatori di queste algebre e scelte diverse dei campi che generano le stesse algebre dal punto di vista fisico descrivono lo stesso sistema. Pertanto, l'idea centrale dell'approccio algebrico è che la corrispondenza tra regioni e algebre locali contenga tutte e sole le informazioni fisiche della teoria.

Più specificamente, una teoria quantistica algebrica di campo è definita da un «net» di algebre, cioè una mappa $O \mapsto \mathfrak{A}(O) \subset \mathfrak{A}$ che ad ogni regione O, appartenente ad una certa classe di regioni dello spazio-tempo, associa l'algebra locale $\mathfrak{A}(O)$, sottoalgebra dell'algebra di tutte le osservabili $\mathfrak{A}$. Si assume che tutte le algebre considerate siano C*-algebre.

Uno stato del sistema è matematicamente definito da un funzionale lineare positivo normalizzato sull'algebra delle osservabili $\mathfrak{A}$. Fissato uno stato ω, ad esso corrisponde, tramite la costruzione GNS, una rappresentazione π_ω dell'algebra astratta delle osservabili $\mathfrak{A}$ come algebra di operatori su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\omega$. La chiusura delle algebre locali nella topologia debole della rappresentazione definisce un net di algebre di von Neumann $O \mapsto \mathfrak{R}_\omega(O) := \pi_\omega(\mathfrak{A}(O))''$.

Due principi fondamentali della Fisica relativistica (nessun effetto si può propagare a velocità superiore a quella della luce) e quantistica (due osservabili commutano, cioè sono compatibili, quando la misura di una non influenza la misura dell'altra) portano al principio di località, secondo il quale algebre locali associate a regioni spazialmente separate commutano. Se indichiamo con O' il complemento spaziale di O (l'insieme dei punti che non possono essere raggiunti né possono raggiungere O con una curva di tipo tempo) e con $\mathfrak{A}(O)'$ il commutante di $\mathfrak{A}(O)$ (insieme degli elementi dell'algebra $\mathfrak{A}$ che commutano con tutti gli elementi di $\mathfrak{A}(O)$), il principio di località è espresso da: $O_1 \subset O_2' \Rightarrow \mathfrak{A}(O_1) \subset \mathfrak{A}(O_2)'$.

2. – Campo libero, stati quasi-liberi e stati KMS.

Ad un qualsiasi spazio simplettico (H, σ) è canonicamente associata la C*-algebra $\mathfrak{A}(H, \sigma)$, detta algebra delle relazioni di commutazione canoniche (algebra CCR), che pu ò essere definita come l'unica (a meno di isomorfismi) C*-algebra generata dagli unitari $W(f)$, al variare di f in H, soddisfacenti le seguenti due condizioni: 1) $W(-f) = W(f)^*$; 2) $W(f)\, W(g) = W(f+g)\, e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}$. Tali unitari sono detti operatori di Weyl e, sotto opportune ipotesi, corrispondono, tramite la relazione $W(f) = e^{i\Phi(f)}$, al campo Φ, inteso come distribuzione a valori operatoriali; la seconda condizione sugli operatori di Weyl corrisponde alle relazioni di commutazioni canoniche tra i campi: $[\Phi(f), \Phi(g)] = i\sigma(f, g)$.

In teoria quantistica algebrica dei campi l'algebra delle osservabili del campo scalare libero in uno spazio-tempo minkowskiano di dimensione $d+1$ è data dall'algebra CCR $\mathfrak{A}(H, \sigma)$, dove $H := \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})/\sim$ è lo spazio simplettico delle funzioni test in $d+1$ dimensioni, modulo le funzioni di seminorma nulla, con forma simplettica $\sigma(\cdot, \cdot) := Im(\cdot, \cdot)$ data dalla parte immaginaria del prodotto scalare (semidefinito positivo) definito integrando in trasformata di Fourier rispetto all'unica misura Lorentz-invariante, $(f, g) := \int \overline{\widehat{f}(p)}\, \widehat{g}(p)\, \theta(p_0)\, \delta(p^2 - m^2)\, dp$.

La struttura locale dell'algebra è definita attraverso la struttura locale di H (funzioni test) nel modo naturale: le funzioni localizzate in una certa regione costituiscono un sottospazio «locale» di H, $H(O) := \{f \in H : supp\, f \subset O\}$, e le algebre locali sono le sottoalgebre generate dagli operatori di Weyl $W(f)$ con f a supporto in O, cioè $\mathfrak{A}(O) := \mathfrak{A}(H(O)) = \overline{span\, \{W(f) : f \in H(O)\}}$. Questo net di C*-algebre soddisfa il principio di località poiché $\sigma(f, g) = 0$ se f e g hanno supporti spazialmente separati.

Gli stati quasi-liberi sull'algebra CCR $\mathfrak{A}(H, \sigma)$ (cf. [3]) sono quegli stati per i quali le funzioni a n punti troncate sono tutte nulle eccetto la funzione a due punti $\omega(\Phi(f)\, \Phi(g))$. Dato che uno stato è univocamente definito quando è assegnato il suo valore sugli operatori di Weyl, si può dimostrare che gli stati quasi-liberi sono tutti e soli gli stati che hanno la forma $\omega_S(W(f)) = e^{-\frac{1}{4}S(f,f)}$, con S prodotto scalare reale qualsiasi (soddisfacente $|\sigma(f, g)| \leq \|f\|_S \|g\|_S$).

Una classe speciale di stati quasi-liberi è costituita dagli stati di Fock. La rappresentazione GNS associata ad uno stato quasi libero ω_S può essere ricondotta ad una rappresentazione di Fock attraverso il seguente procedimento: esiste una immersione $\varphi : H \hookrightarrow K$ dello spazio simplettico reale H in uno spazio di Hilbert complesso K, canonicamente associato alla tripla (H, σ, S), tale che $\varphi(H) + i\varphi(H)$ sia denso ed il pull-back del prodotto scalare di K coincida con la forma bilineare $S(\cdot, \cdot) + i\sigma(\cdot, \cdot)$ su H, e risulta $\pi_{\omega_S}(W(f)) = \pi_K(W(\varphi(f)))$, dove π_K è la rappresentazione di Fock dell'algebra CCR $\mathfrak{A}(K, Im(\cdot, \cdot)_K)$.

Gli stati KMS sono stati le cui funzioni a due punti soddisfano una propriet à di analiticità (rispetto ad una fissata evoluzione temporale) che, nei casi in cui è possibile definire gli stati di Gibbs, è soddisfatta esattamente da quegli stati. Per questo ed altri motivi, uno stato è considerato di equilibrio termodinamico quando soddisfa la condizione KMS, che risulta ben definita anche quando non lo sono gli stati di Gibbs (tipicamente, nel limite termodinamico). Gli stati KMS del campo libero sono noti e possono essere decomposti in stati quasi-liberi.

3. – Dualità di Haag.

La dualità di Haag è la proprietà di massimalità di un net di algebre locali rispetto al principio di località; esprime sostanzialmente il fatto che un'algebra locale, associata ad una data regione, contiene tutte le osservabili che commutano con ogni osservabile localizzata in una regione spazialmente separata da quella data. In realt à, è ragionevole aspettarsi che questa proprietà valga non per le C*-algebre ma per le algebre di von Neumann $\mathfrak{R}_\omega(O)$ ottenute come chiusura debole delle algebre locali in una data rappresentazione associata ad uno stato. Pertanto, la dualità di Haag, espressa dall'equazione $\mathfrak{R}_\omega(O')^c = \mathfrak{R}_\omega(O)$, dove $\mathfrak{R}_\omega(O'))^c = \mathfrak{R}_\omega(O')' \cap \mathfrak{R}_\omega$ è il commutante relativo in $\mathfrak{R}_\omega = \pi_\omega(\mathfrak{A})''$, è una proprietà che pu ò essere o non essere verificata per una scelta di un net di algebre locali $\mathfrak{A}(O)$, di una specifica classe di regioni O e di uno stato ω (nel caso particolare di stati puri l'equazione diventa $\mathfrak{R}_\omega(O')' = \mathfrak{R}_\omega(O)$).

La dualità di Haag è stata ampiamente studiata e provata in molti modelli; il più celebre teorema di questo tipo (Bisognano-Wichmann) stabilisce che la dualit à di Haag vale per il net di algebre (di von Neumann) locali generate da un campo di Wightman (cioè una distribuzione a valori operatoriali soddisfacente gli assiomi di Wightman) per le regioni di tipo «wedge». Nel caso del campo libero esistono diverse dimostrazioni nella rappresentazione di Fock per le regioni di tipo «doppio cono». La dimostrazione più elegante procede in due passi (cf. e.g. [4] e [2]), che nella tesi sono stati generalizzati alla famiglia degli stati quasi-liberi.

Il primo passo è la dimostrazione della dualità di Haag astratta, che connette il commutante in $\mathfrak{R}$ al complemento simplettico in H e si applica ad una qualunque algebra CCR $\mathfrak{A}(H, \sigma)$ per qualunque stato quasi-libero.

TEOREMA 1. – *(Dualità di Haag astratta) Sia ω_S uno stato quasi-libero sull'algebra CCR $\mathfrak{A}(H, \sigma)$ associato al prodotto scalare reale S, allora per il net di algebre di von Neumann $\mathfrak{R}_\omega(M) := \pi_\omega(\mathfrak{A}(M))''$ vale la proprietà*

$$\mathfrak{R}_\omega(M)^c = \mathfrak{R}_\omega(M')$$

dove M è un qualsiasi sottospazio reale di H, $\overline{H}^S$ è la chiusura di H ripsetto alla topologia indotta da S e $M' = \{f \in \overline{H}^S : \sigma(f, g) = 0 \ \forall g \in M\}$ il complemento simplettico di M in $\overline{H}^S$.

La dimostrazione si basa sul fatto che la rappresentazione GNS π_ω si riconduce ad una rappresentazione di Fock nel modo descritto sopra. Si osservi che la scelta dello stato ω_S interviene sia nella definizione delle algebre di von Neumann, attraverso la rappresentazione GNS π_ω, sia nella definizione di complemento simplettico, attraverso la S-chiusura di H. L'equazione precedente non sarebbe valida se al posto di M' avessimo considerato il complemento simplettico di M in H, cioè $M' \cap H$; si può verificare che in generale $\overline{M' \cap H}^S \neq M'$.

Il secondo passo è la dualità nello spazio ad una particella, che mette in relazione la struttura simplettica di $H = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ con la sua struttura locale. In casi significativi è possibile stabilire l'uguaglianza degli spazi $H(O')'$ e $H(O)$ a meno di chiusure rispetto alla norma indotta da un prodotto scalare S; la proprietà risulta pertanto dipendente dalla scelta di S. Per un S della forma $S(f, g) = Re(f, M_\phi g)$ (si noti che $S = Re(f, g)_H$ definisce lo stato di Fock), dove M_ϕ è l'operatore di moltiplicazione per una funzione ϕ, tale che S sia ben definito (ϕ deve essere maggiore di uno, polinomialmente limitata, etc.) e che $c(\lambda) := \left\| \frac{\phi(\lambda\cdot)}{\phi(\cdot)} \right\|_\infty$ sia una funzione continua, ho dimostrato il seguente

TEOREMA 2. – *(Dualità nello spazio ad una particella) Sia S un prodotto scalare sullo spazio simplettico (H, σ) soddisfacente le proprietà precedenti, allora per ogni doppio cono O il sottospazio locale $H(O)$ soddisfa la proprietà*

$$H(O')' = \overline{H(O)}^S.$$

Il teorema vale anche in presenza di divergenze infrarosse, non considerate nella letteratura a me nota, quando lo spazio delle funzioni test deve essere limitato alle funzioni la cui trasformata di Fourier si annulla in 0 ($H = \partial\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$). Questo fornisce una dimostrazione della dualità di Haag anche, ad esempio, per il campo libero a massa nulla in dimensione 2 nello stato di Fock (alternativa a quella nota) o in dimensione minore di 4 in uno stato KMS.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. LONGO, *Notes for a Quantum Index Theorem*, Commun. Math. Phys., **222** (2001), 45-96.

[2] P. D. HISLOP, *A simple proof of duality for local algebras in free quantum field theory*, J. Math. Phys., **27** (1986), 2542-2550.

[3] J. MANUCEAU e A. VERBEURE, *Quasi-Free States of the C.C.R.-Algebra and Bogoliubov Transformations*, Commun. Math. Phys., **9** (1968), 293-302.

[4] J.-P. ECKMANN e K. OSTERWALDER, *An Application of Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras: Duality for Free Bose Fields*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 1-12.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «Tor Vergata»
e-mail: camassa@mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma «Tor Vergata») - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Roberto Longo, Università di Roma «Tor Vergata»