
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ALESSIA CATTABRIGA

(1,1)-nodi e gruppi ciclicamente presentati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2004), n.3, p. 459–462.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_459_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

(1,1)-nodi e gruppi ciclicamente presentati.

ALESSIA CATTABRIGA

Una presentazione bilanciata di un gruppo

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 \dots, r_n \rangle$$

è detta ciclica se esiste una parola w nel gruppo libero F_n generato da x_1, \dots, x_n tale che $r_k = \theta_n^{k-1}(w)$, per $k = 1, \dots, n$, dove $\theta_n: F_n \rightarrow F_n$ è l'automorfismo definito da $\theta_n(x_i) = x_{i+1}$ (indici mod n), per $i = 1, \dots, n$.

Negli ultimi anni, diversi autori hanno messo in evidenza le relazioni esistenti tra rivestimenti ciclici di nodi in \mathbf{S}^3 e varietà il cui gruppo fondamentale ammette una presentazione ciclica. Con lo scopo di studiare tali relazioni, M. J. Dunwoody ha definito in [1] una classe di 3-varietà dipendenti da sei parametri interi con gruppo fondamentale ciclicamente presentato. In [2], si dimostra che tali varietà sono in effetti rivestimenti fortemente ciclici di spazi lenticolari (eventualmente \mathbf{S}^3) ramificati su (1, 1)-nodi. Inoltre, in [3], si dimostra che ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato di un (1, 1)-nodo ammette una decomposizione di Heegaard che induce una presentazione ciclica per il gruppo fondamentale.

In questa tesi si studiano le proprietà degli (1, 1)-nodi ed in particolare i loro legami con i gruppi ciclicamente presentati.

Questo studio viene affrontato introducendo una rappresentazione algebrica degli (1, 1)-nodi che utilizza gli elementi di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$, il mapping class group puro del toro 2-puntato. In termini di tale rappresentazione, vengono calcolati alcuni invarianti come ad esempio il gruppo fondamentale. Come rilevante applicazione viene trovata esplicitamente la rappresentazione delle due più importanti classi di (1, 1)-nodi in \mathbf{S}^3 : i nodi torici e i nodi a due ponti.

Nella seconda parte si studiano i rivestimenti fortemente ciclici ramificati degli (1, 1)-nodi. Si trovano le condizioni di esistenza ed unicità e, partendo da un elemento di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ che rappresenta un (1, 1)-nodo K , si ottiene la parola che determina la presentazione ciclica del gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ramificato di K . Inoltre, si dimostra che il polinomio di Alexander di un (1, 1)-nodo $K \subseteq \mathbf{S}^3$ coincide con il polinomio associato alla presentazione ciclica del rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli ramificato di K , per n sufficientemente grande.

Nell'ultima parte della tesi si dimostra che ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato di un (1, 1)-nodo è una varietà di Dunwoody. Questo risultato, insieme al teorema di Grasselli-Mulazzani precedentemente citato, dimostra che la classe dei rivestimenti fortemente ciclici ramificati degli (1, 1)-nodi coincide con quella delle varietà di Dunwoody. Infine viene descritto un algoritmo che, per

ogni $n > 1$, permette di trovare i parametri che determinano la varietà di Dunwoody che è rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli di un nodo torico in S^3 .

1. - (1,1)-nodi e loro rappresentazione.

Con $L(p, q)$ sarà denotato ogni spazio lenticolare, inclusi $S^1 \times S^2 = L(0, 1)$ e $S^3 = L(1, 0)$. Inoltre, per semplificare le notazioni, le classi di omologia ed omotopia saranno denotate con lo stesso simbolo usato per il ciclo o il coppia da esse rappresentate.

Un nodo K in una 3-varietà N^3 è detto un (1,1)-nodo se esiste una decomposizione di Heegaard di genere uno, detta (1,1)-decomposizione:

$$(N^3, K) = (H, A) \bigcup_{\varphi} (H', A'),$$

dove H e H' sono tori solidi, A e A' sono archi banali propriamente immersi in, rispettivamente, H e H' e $\varphi : (\partial H', \partial A') \rightarrow (\partial H, \partial A)$ è un omeomorfismo d'incollamento. Ovviamente N^3 sarà uno spazio lenticolare.

Sia ora T un toro e sia $\mathcal{F}(T, 2)$ il gruppo degli automorfismi $h : T \rightarrow T$ che conservano l'orientazione e tali che $h(P_1) = P_1$ e $h(P_2) = P_2$, con P_1, P_2 punti fissati su T . Allora $PMCG_2(T)$, *il mapping class group puro del toro 2-puntato*, è il gruppo delle classi di isotopia di $\mathcal{F}(T, 2)$ (che ovviamente non dipende dalla scelta di $P_1, P_2 \in T$). Per semplicità, useremo la stessa notazione per un elemento di $\mathcal{F}(T, 2)$ e per la sua classe di isotopia.

Un insieme di generatori per $PMCG_2(T)$ è dato dai Dehn twists $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$ lungo le curve, rispettivamente, α, β, γ illustrate in Figura 1.

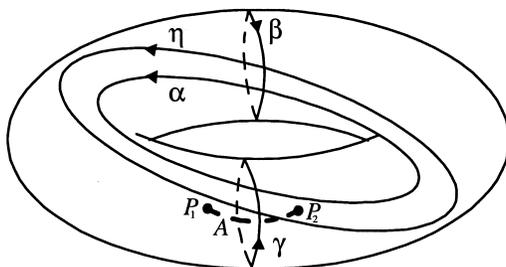


Fig. 1. - Le curve $\alpha, \eta, \beta, \gamma$.

TEOREMA 1. - Sia $\mathcal{K}_{(1,1)}$ la classe di tutti gli (1,1)-nodi. Allora esiste un'applicazione suriettiva $\Theta : PMCG_2(T) \rightarrow \mathcal{K}_{(1,1)}$ che associa ad ogni elemento $\psi \in PMCG_2(T)$ un (1,1)-nodo che indicheremo con K_ψ . Inoltre se K è un (1,1)-nodo in $L(p, q)$, esistono $\psi', \psi'', \psi_{p,q} \in PMCG_2(T)$ tali che $K = K_{\psi' \psi_{p,q}} = K_{\psi'' \psi_{p,q}}$, dove $\psi_{p,q}$ è contenuto nel sottogruppo di $PMCG_2(T)$ generato da t_α e t_β e dipende unicamente da $L(p, q)$, mentre ψ', ψ'' sono elementi appartenenti al nucleo dell'epimorfismo naturale

$$\Omega : PMCG_2(T) \rightarrow MCG(T) \cong SL(2, \mathbb{Z}).$$

Tale nucleo inoltre è generato liberamente dagli elementi $\tau_m = t_\beta t_\gamma^{-1}$ e $\tau_l = t_\eta t_\alpha^{-1}$, dove η è la curva disegnata in Figura 1, e si ha $t_\eta = \tau_m^{-1} t_\alpha \tau_m$.

Utilizzando tale rappresentazione otteniamo i seguenti risultati.

PROPOSIZIONE 1. – Sia K_ψ un (1, 1)-nodo in $L(p, q)$. Si ha:

$$(1) \quad \pi_1(L(p, q) - K_\psi, *) = \langle \alpha, \gamma \mid r(\alpha, \gamma) = i\psi(\beta) \rangle,$$

dove $i: \pi_1(\partial H - \partial A, *) \rightarrow \pi_1(H - A, *)$ è l'omomorfismo indotto dall'inclusione $\partial H - \partial A \subseteq H - A$;

$$(2) \quad H_1(L(p, q) - K_\psi) = \langle \alpha, \gamma \mid pa + q''\gamma \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\gcd(p, q'')},$$

dove q'' è determinato dalla relazione omologica $\psi(\beta) = pa + q'\beta + q''\gamma$.

Si ottengono le seguenti rappresentazioni per i nodi torici ed i nodi a due ponti in \mathbb{S}^3 .

TEOREMA 2. – Il nodo torico $\mathbf{t}(k, h) \subseteq \mathbb{S}^3$ è l'(1, 1)-nodo K_ψ con:

$$\psi = \prod_{i=1}^h (\tau_m^{[(i-1)k/h] - [ik/h]} \tau_l^{-1}) t_\beta t_\alpha t_\beta,$$

dove $[x]$ denota la parte intera di x .

Il nodo a due ponti $\mathbf{b}(l, t) \subseteq \mathbb{S}^3$ con parametri di Conway $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$ è l'(1, 1)-nodo K_ψ con:

$$\psi = t_\beta t_\alpha t_\beta \tau_m^{-b_n} t_\varepsilon^{a_n} \dots \tau_m^{-b_1} t_\varepsilon^{a_1},$$

dove ε è un opportuno cappio su T tale che $t_\varepsilon = \tau_l^{-1} \tau_m \tau_l \tau_m^{-1}$.

2. – Rivestimenti fortemente ciclici e varietà di Dunwoody.

Un rivestimento ciclico ad n -fogli di una 3-varietà N^3 ramificato su un nodo K è detto *fortemente ciclico* se l'indice di ramificazione lungo K è n (i. e. la fibra di ogni punto di K contiene un unico punto). Si osservi che nel caso di \mathbb{S}^3 ogni rivestimento ciclico è anche fortemente ciclico.

TEOREMA 3. – Sia K_ψ un (1, 1)-nodo in $L(p, q)$. Allora esiste un rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli ramificato di K_ψ se e solo se d divide q'' , dove $d = \gcd(p, n)$ e q'' è unicamente determinato dalla relazione omologica $\psi(\beta) = pa + q'\beta + q''\gamma$. In tal caso esistono esattamente d rivestimenti di questo tipo, a meno di equivalenza.

TEOREMA 4. – Sia $C_{n, \omega}(K_\psi)$ il rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli ramificato su K_ψ con monodromia ω e sia $r(x, \gamma) = x^{\varepsilon_1} \gamma^{\delta_1} \dots x^{\varepsilon_s} \gamma^{\delta_s}$, con $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s, \delta_1, \dots, \delta_s \in \mathbb{Z}$, il relatore della presentazione del gruppo fondamentale di K_ψ ottenuto effettuando la sostituzione $\alpha = x\gamma^{\omega(\alpha)}$ in (1). Allora il gruppo fondamentale di $C_{n, \omega}(K_\psi)$ ammette la presentazione ciclica $G_n(w)$, con:

$$w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_s}^{\varepsilon_s}$$

(indici mod n), dove $i_k \equiv 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \pmod{n}$, per $k = 1, \dots, s$.

Accenniamo ora alla costruzione delle varietà di Dunwoody. Per una definizione rigorosa si veda [1]. Siano a, b, c, n, r, s interi tali che $a, b, c \geq 0, n \geq 1$ e $a + b + c > 0$. Per opportuni valori di a, b, c, n, r, s , chiamati ammissibili, si dimostra che il grafo trivalente illustrato in Figura 2, (in figura i varia da 1 a n) con la regola d'attaccamento che identifica C'_i con C''_{i+s} (indici mod n) tramite l'incollamento dei vertici con la stessa numerazione, per $i = 1, \dots, n$, è un diagramma di Heegaard. La 3-varietà chiusa e orientabile da esso determinata, è detta *varietà di Dunwoody* di tipo (a, b, c, n, r, s) .

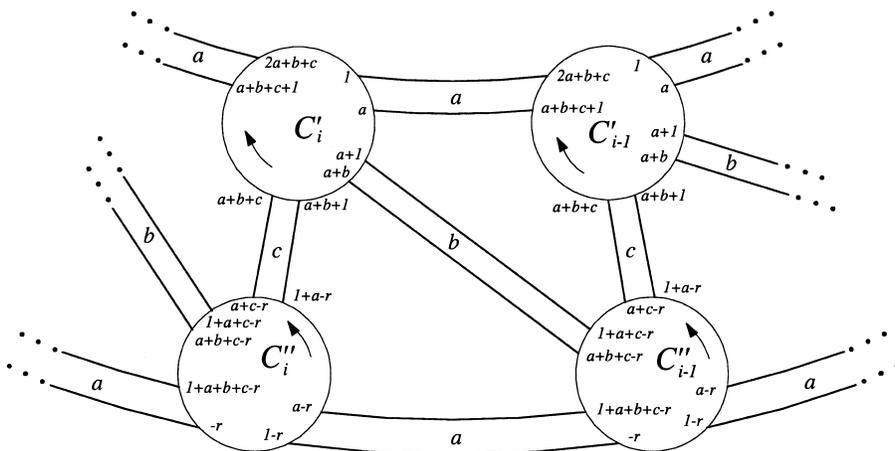


Fig. 2. - Costruzione della varietà di Dunwoody di tipo (a, b, c, n, r, s) .

TEOREMA 5. - *Ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato di un $(1, 1)$ -nodo è una varietà di Dunwoody.*

Quindi i rivestimenti fortemente ciclici ramificati di $(1, 1)$ -nodi e le varietà di Dunwoody sono due diverse rappresentazioni degli stessi oggetti topologici.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUNWOODY M. J. , *Cyclic presentations and 3-manifolds*, Groups-Korea '94. Proceedings of the International Conference, 8 (1998), 1-23.
 [2] GRASSELLI L. e MULAZZANI M., *Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds*, Forum Math., 13 (2001), 379-397.
 [3] MULAZZANI M., *Cyclic presentation of groups and cyclic branched coverings of $(1, 1)$ -knots*, Bull. Korean Math. Soc., 40 (2003), 101-108.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna. E-mail: cattabri@dm.unibo.it
 Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Cielo XV
 Direttore di ricerca: Prof. Michele Mulazzani, Università di Bologna