Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Causin

Formulazioni ad elementi finiti misti-ibridi di tipo Galerkin e Petrov-Galerkin in meccanica dei continui

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 463–466.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_463_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 463-466

Formulazioni ad elementi finiti misti-ibridi di tipo Galerkin e Petrov-Galerkin in meccanica dei continui.

PAOLA CAUSIN

Nella Tesi vengono studiati, analizzati matematicamente e implementati a calcolatore schemi agli elementi finiti misti-ibridi di tipo Galerkin e Petrov-Galerkin per la simulazione di problemi in meccanica dei continui. Tali formulazioni si rivelano appropriate quando l'obiettivo della simulazione è una rappresentazione accurata del campo di sforzo, quale è il caso dell'applicazione presentata nell'ultima parte della Tesi.

Un primo contributo del lavoro è costituito dallo sviluppo e dall'analisi matematica di una formulazione mista-ibrida proposta originariamente in [3], il metodo Discontinuo Petrov-Galerkin (DPG). Tale metodo, per le sue peculiari caratteristiche di discontinuità e per la presenza di incognite di interfaccia, può essere interpretato sia come un approccio di tipo ibrido sia come un particolare approccio di tipo Discontinuo Galerkin. La formulazione DPG discreta del problema ellitico modello con condizioni al contorno di Dirichlet su Γ_D e di Neumann su Γ_N è: trovare $(\sigma_h, u_h, \lambda_h, \mu_h) \in (\Sigma_h \times U_h \times \Lambda_{h, g_D} \times M_{h, g_N})$ tali che per ogni $T \in \mathcal{T}_h$ si abbia

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_T \nu^{-1} \sigma_h \cdot \tau_h \; dx + \int_T u_h \operatorname{div} \tau_h \, dx - \int_{\partial T} \lambda_h \tau_h \cdot n \, ds = 0 & \forall \tau_h \in W_h(K), \\ \displaystyle\int_T \sigma_h \cdot \nabla v_h \, dx - \int_T f v_h \, dx - \int_{\partial T} v_h \mu_h \, ds = 0 & \forall v_h \in V_h(K). \end{cases}$$

dove ν, f sono funzioni assegnate. Lo spazio locale ad elementi finiti di grado $k \geq 0$, indicato con DPG_h^k, è definito come

$$(2) \qquad \mathrm{DPG}_h^k(K) = \{(\sigma_h, u_h, \lambda_h, \mu_h; v_h, w_h) \in (\mathcal{U}_h(K) \times \mathcal{V}_h(K)) \ \forall K \in \mathcal{K}_h\},$$

dove $\mathcal{U}_h(K) = \Sigma_h(K) \times U_h(K) \times \Lambda_{h, g_D}(\partial K) \times M_{h, g_N}(\partial K)$, $\mathcal{V}_h(K) = W_h(K) \times V_h(K)$. Tali spazi discreti sono funzioni polinomiali definiti per ogni elemento K della triangolazione $\mathcal{V}_h$. Nel seguito si discute la scelta di grado $k = 0$, rimandando alla Tesi per la trattazione del caso generale. Gli spazi locali per le variabili interne e per le funzioni test sono $\Sigma_h(K) = (P_0(K))^2$, $U_h(K) = P_0(K)$, $W_h(K) = RT_0(K)$, $V_h(K) = P_1(K)$, dove P_k è lo spazio dei polinomi di grado k e RT_k è lo spazio di Raviart-Thomas di grado k. Gli spazi corrispondenti per le variabili di interfaccia sono $\Lambda_h(\partial K) = R_0(\partial K)$, $\Lambda_{h, g_D}(\partial K) = \{\lambda_h \in \Lambda_h(\partial K) \,|\, \lambda_h = \mathcal{P} g_D \text{ on } \partial K \cap \Gamma_D\}$, $M_h(\partial K) = R_0(\partial K)$, $M_{h, g_N}(\partial K) = \{\mu_h \in M_h(\partial K) \,|\, \mu_h = \mathcal{P} g_N \text{ on } \partial K \cap \Gamma_N\}$, dove $R_k(\partial K)$ è lo spazio dei polinomi di grado k su ciascun lato di ∂K, $\mathcal{P}$ è la proiezione L^2 su $R_k(\partial K)$ e g_D e g_N sono i dati di Dirichlet e di Neumann, rispettivamente.

Nella Tesi si dimostra, per semplicità nel caso del problema di Dirichlet omogeneo, l'unicità della soluzione del problema (1), e in particolare vengono mostrate le seguenti stime a priori dell'errore

LEMMA 1. – *Sia* (u, σ) *la soluzione del problema ellittico modello con* $\sigma = \nu \nabla u$ *e* (u_h, σ_h) *la soluzione di* (1). *Se* $\sigma \in (H^1(\Omega))^2$, *allora esiste una costante positiva* C *indipendente da* h *tale che*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch(|u|_{1,\Omega} + |\sigma|_{1,\Omega}), \quad \|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch|\sigma|_{1,\Omega}. \tag{3}$$

Se inoltre $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *e* u_h^* *è l'unico polinomio lineare non conforme che rileva* λ_h *sulle interfacce della triangolazione, vale*

$$\|u - u_h^*\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 |u|_{2,\Omega}. \tag{4}$$

La (4) può essere considerata come la controparte per la formulazione DPG di un analogo risultato provato in [1] nel caso per la formulazione duale-mista con ibridizzazione. Dalla (4) è possibile mostrare il risultato di superconvergenza per λ_h

LEMMA 2. – *Sia* (u, σ) *la soluzione del problema ellittico modello con* $\sigma = \nu \nabla u$ *e* $\sigma \in (H^1(\Omega))^2$, $\operatorname{div} \sigma \in H^1(\Omega)$. *Allora si ha*

$$\|\varrho_h^0 u - \lambda_h\|_{1/q, p, \partial K} \leq Ch^{2/p}\big(|\sigma|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \sigma|_{1,\Omega}\big) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{5}$$

dove $\varrho_h^0 u$ *è la proiezione* L^2 *del valore assunto dalla soluzione* u *sulle interfacce della triangolazione e* $4/3 < p < 2$.

È interessante osservare come la soluzione della formulazione (1) condivida caratteristiche proprie dei metodi misti sia di tipo primale che duale.

LEMMA 3. – *Sotto le assunzioni dei Lemmi precedenti e sotto l'ipotesi che la funzione* f *sia costante a tratti su* $\mathcal{T}_h$, *si ha*

$$\mu_h = \sigma_h^{DM} \cdot n \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \tag{6}$$

$$\sigma_h = \tilde{\nu}^{-1} \nabla u_h^* \quad \text{in } K, \ \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{7}$$

dove si è indicato con σ_h^{DM} *il campo di sforzo calcolato con il metodo duale-misto standard* [4] *e dove* $\tilde{\nu}^{-1}$ *è la media armonica di* ν.

Diversi casi test sono riportati a conferma delle stime teoriche. Il metodo DPG è poi applicato alla soluzione del problema di convezione-diffusione e ne viene discussa a livello preliminare l'implementazione senza un'opportuna forma di stabilizzazione, aspetto che è attualmente in fase di studio.

Si affronta successivamente la risoluzione del problema dell'elasticità lineare mediante due metodologie miste-ibride in grado di trattare secondo una formulazione unificata sia il caso comprimibile che il caso incomprimibile. Il primo approccio rappresenta un'estensione del metodo DPG al problema dell'elasticità, mentre il secondo è una variante del metodo PEERS [2], denominata metodo Dual-Mixed-Hybrid (DMH). Si tratta, in entrambi i casi, di formulazioni agli sforzi-spostamenti opportunamente modificate con l'introduzione di due moltiplicatori di Lagrange. Il primo moltiplicatore è un parametro di pressione che permette di trattare problemi in regime puramente incomprimibile (problema di Stokes); infatti, in quest'ultimo caso, con sole condizioni di Dirichlet, per garantire l'unicità della soluzione è necessario imporre la cosiddetta *side condition* [2]. L'introduzione del parametro di pressione all'interno della formulazione PEERS consente di imporre in modo semplice questa condizione mantenendo a livello discreto la medesima approssimazione dello sforzo del caso comprimibile. Il secondo moltiplicatore rappresenta invece il tensore di rotazione infinitesima e consente di imporre in modo debole il vincolo di simmetria del tensore degli sforzi. Per brevità nel seguito verrà illustrata la sola formulazione DMH nel caso dell'elasticità lineare isotropa, rimandando il trattamento del caso ortotropo e della formulazione DPG alla Tesi. Si definiscono i seguenti spazi funzionali: $\Sigma_h = \{\tau \mid \tau^K \in RT_0(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, $V_h = \{v \mid v^K \in (P_0(K))^2\, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, $\Lambda_h = \{\mu \mid \mu_{\partial K} \in (R_0(\partial K))^2\, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, $W_h = \{\theta \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \theta^K \in P_1(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, $Q_h = \{q \mid q^K \in P_0(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, $\widehat{M}_h = V_h \times \Lambda_h \times W_h$, $M_h = \widehat{M}_h \times Q_h$. Inoltre, siano $\tilde{\tau}_h \equiv \tau_h \in \Sigma_h$, $\widehat{v}_h = (v_h, \mu_h, \theta_h) \in \widehat{M}_h$, $\tilde{v}_h = (\widehat{v}_h, q_h) \in M_h$ e si introducano le forme bilineari continue $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$ e $c(\cdot,\cdot)$, definite rispettivamente su $\Sigma_h \times \Sigma_h$, $\Sigma_h \times M_h$ e $M_h \times M_h$ come:

$$
(8) \qquad \begin{cases}
a(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = \dfrac{1}{2\widehat{\mu}} \displaystyle\int_\Omega \sigma : \tau \, dx, \qquad b(\tilde{v}, \tilde{\tau}) = b_1(\tilde{v}, \tilde{\tau}) + b_2(\tilde{v}, \tilde{\tau}), \\[2ex]
b_1(\tilde{v}, \tilde{\tau}) = \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v \cdot \operatorname{div} \tau \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mu \cdot (\tau n)\, ds + \int_\Omega \theta \ \operatorname{as}(\tau)\, dx, \\[2ex]
b_2(\tilde{v}, \tilde{\tau}) = \displaystyle\int_\Omega \frac{\varrho_{\hat{\lambda}}}{2} q \ \operatorname{tr} \tau \, dx, \qquad c(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_\Omega \varrho_{\hat{\lambda}}\, p\, q\, dx,
\end{cases}
$$

dove $\widehat{\lambda}$ e $\widehat{\mu}$ sono i coefficienti di Lamé del materiale e $\varrho_{\hat{\lambda}} = \widehat{\lambda}/(\widehat{\mu}(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}))$. La formulazione discreta DMH è:

trovare $(\tilde{\sigma}_h \equiv \sigma_h, \tilde{u}_h = (u_h, \lambda_h, \gamma_h, p_h)) \in (\Sigma_h \times M_h)$, tali che

$$
(9) \qquad \begin{cases}
a(\tilde{\sigma}_h, \tilde{\tau}_h) + b(\tilde{u}_h, \tilde{\tau}_h) = 0 & \forall\, \tilde{\tau}_h \in \Sigma_h, \\[2ex]
b(\tilde{v}_h, \tilde{\sigma}_h) + c(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) = -\displaystyle\int_\Omega f v_h \, dx & \forall\, \tilde{v}_h \in M_h.
\end{cases}
$$

Si osserva che un ulteriore moltiplicatore di Lagrange λ_h è stato introdotto per rilassare il vincolo di continuità della componente normale del tensore degli sforzi. Ciò permette di operare una condensazione statica delle incognite a livello di ciascun elemento e di ridursi ad un sistema nelle sole variabili $(\lambda_h, \gamma_h, p_h)$ $((\lambda_h, \gamma_h)$ nel caso comprimibile). Nella Tesi viene provata l'unicità della soluzione di (9) e la stima dell'errore

LEMMA 4. – *Sia* $(\tilde{\sigma}, \tilde{u})$ *la soluzione del problema elastico lineare isotropo e sia* $(\tilde{\sigma}_h, \tilde{u}_h)$ *la soluzione di* (9). *Se* $\sigma \in (H^1(\Omega))^4$, $p \in (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ *and* $\gamma \in H^1(\Omega)$, *allora esiste una costante positiva C indipendente da h tale che*

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch(|\sigma|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |\gamma|_{1,\Omega}),$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch(|\sigma|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |u|_{1,\Omega} + |\gamma|_{1,\Omega}),$$

$$\|\gamma - \gamma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch(|\sigma|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |\gamma|_{1,\Omega}), \tag{10}$$

$$\|P_h^0 u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2(|\sigma|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |\mathrm{div}\,\sigma|_{1,\Omega} + |\gamma|_{1,\Omega}),$$

$$\|\varrho_h^0 \lambda - \lambda_h\|_{1/q,p,\partial K} \leq Ch^{2/p}(|\sigma|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} + |\mathrm{div}\,\sigma|_{1,\Omega} + |\gamma|_{1,\Omega}) \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h,$$

dove $4/3 < p < 2$, $1/p + 1/q = 1$ e si rimanda alla Tesi e a [1] per le definizioni degli spazi funzionali e delle norme adottate.

L'ultima parte della Tesi è dedicata alla simulazione numerica tramite le metodologie precedentemente proposte del processo industriale di ossidazione termica per la produzione di semiconduttori di silicio. Si tratta di un problema meccanico in cui i materiali coinvolti nel processo fisico possono essere rappresentati come materiali elastici (il wafer di silicio e la mascheratura protettiva) e come un fluido incomprimibile (l'ossido cresciuto in seguito alla reazione dell'ambiente saturo di ossigeno con il silicio). Il codice di calcolo che è stato implementato tratta il problema dell'analisi del campo di sforzo in tutti i materiali secondo la formulazione unificata DMH. A conclusione del lavoro di Tesi sono presentati i risultati ottenuti con il codice di cui sopra riguardanti la simulazione di un processo di ossidazione in condizioni realistiche.

BIBLIOGRAFIA

[1] D.N. ARNOLD e F. BREZZI, *Mixed and Nonconforming Finite Element Methods: Implementation, Postprocessing and Error Estimates*, Math. Modeling and Numer. Anal., **19-1** (1985), 7-32.

[2] D.N. ARNOLD, F. BREZZI e J. DOUGLAS, *PEERS: A New Mixed Finite Element for Plane Elasticity,* Japan J. Appl. Math., **1** (1984), 347-367.

[3] C.L. BOTTASSO, S. MICHELETTI e R. SACCO, *The Discontinuous Petrov-Galerkin Method for Elliptic Problems,* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **191** (2002), 3391-3409.

[4] L.D. MARINI, *Evaluation of the Raviart-Thomas method,* SIAM J. Numer. Anal., **22-3** (1985), 493-496.

INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau
78150 Le Chesnay Cedex - Rocquencourt, France. E-mail: paola.causin@inria.fr
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Università degli Studi di Milano) - XV Ciclo
Direttore di ricerca: Prof. Riccardo Sacco
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano