Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Erika Damian

Algebre di Lie loop con una struttura di $sl_2(C)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 479–482.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_479_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 479-482

Algebre di Lie loop con una struttura di $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-modulo.

ERIKA DAMIAN

Golod e Šafarevič in un celebre lavoro, [3], mostrarono che una algebra associativa che abbia una presentazione $\mathcal{P}$ con d generatori e al più $r = (d-1)^2/4$ relazioni ha necessariamente dimensione infinita. Successivamente Vinberg, [7], migliorò il teorema di Golod-Šafarevič sostituendo $d^2/4$ a $(d-1)^2/4$. Nel 1977 H. Koch, [5], estese il risultato all'ambito delle algebre di Lie.

Un problema naturale in questo contesto è la costruzione di presentazioni di algebre di dimensione finita con «poche» relazioni, cioè tali che r/d^2 sia il minore possibile. Il miglior risultato in questa direzione è dovuto a J. Wisliceny. Infatti in [8] viene costruita una successione di algebre di Lie di dimensione finita $\{L(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{r(L(n))}{d(L(n))^2} = 1/4$ mostrando in tal modo la correttezza asintotica di questo valore; sucessivamente, [9], Wisliceny ha mostrato un analogo risultato nell'ambito delle algebre associative.

Il teorema di Golod-Šafarevič è stato riformulato, usando il concetto di entropia di un'algebra, in un lavoro di M. F. Newman, C. Schneider e A. Shalev, [6]. Sia $A = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} A_n$ una k-algebra graduata (associativa o di Lie) su un campo arbitrario k, $H(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dim_k A_n}$ è detta entropia di A. Il risultato ottenuto dagli autori è il seguente: sia $\mathcal{P}$ la presentazione di una k-algebra (associativa o di Lie) contenente d generatori e r relazioni omogenee di grado almeno due tale che $r < d^2/4$; se A è la k-algebra presentata da $\mathcal{P}$ allora $H(A) > 1$.

Si osservi che una k-algebra ha entropia zero se e solo se è finito-dimensionale. Inoltre un'algebra di dimensione infinita ha almeno entropia uno. Esempi di algebre associative di entropia uno si ottengono considerando algebre graduate finitamente generate che siano associative e commutative. Per quanto riguarda le algebre di Lie, esempi di algebre di entropia uno si hanno considerando algebre thin, algebre di classe massimale oppure (sottoalgebre di) algebre loop di algebre di Lie di dimensione finita.

Un'algebra loop si definisce nel modo seguente. Sia S un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso k e sia $\sigma : L \to L$ un automorfismo di ordine finito, $\sigma^p = \mathrm{id}$. Ne segue che L si decompone in somma diretta di autospazi rispetto a σ: $L = \bigoplus\limits_{m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} L_m$. Si definisce *twisted loop algebra* $\tilde{L} \subset L \otimes k[t, t^{-1}]$

$$\tilde{L} = \left\{ \sum_j a_j t^j \,\middle|\, a_j \in L_{\bar{j}} \text{ ove } \bar{j} = j \bmod p \right\}.$$

Il prodotto di Lie in $\tilde{L}$ è definito $[a \otimes t^m, b \otimes t^n] := [a, b] \otimes t^{m+n}$. Chiaramente

$\widetilde{L}$ ha una graduazione naturale su $\mathbb{Z}$ ottenuta imponendo che gli elementi $a \otimes t^n$ siano omogenei di grado n. Si noti che un'analoga costruzione si ha sostituendo $k[t]$ a $k[t, t^{-1}]$; in tal caso l'algebra $\widehat{S}$ ottenuta è una sottoalgebra della twisted loop di S con una graduazione naturale su $\mathbb{N}$. Si osservi che $\widehat{S} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \widehat{S}_n$ ha una struttura periodica, ossia la funzione $f_{\widehat{S}}(n) = \dim_k \widehat{S}_n$ è definitivamente periodica (i.e. esiste N, $h \in \mathbb{N}$ tale che $f_{\widehat{S}}(n) = f_{\widehat{S}}(n+h)$ per ogni $n \geq N$). È evidente che un'algebra che abbia una struttura periodica ha entropia uno.

Il primo problema affrontato in questo lavoro riguarda la costruzione di esempi di algebre di Lie finitamente presentate con d generatori e $\left\lfloor \frac{d^2}{4} \right\rfloor + 1$ relazioni che abbiano una struttura periodica.

Traendo spunto da una particolare classe di presentazioni (*Quasierhöhungsyseme*) descritta da Wisliceny in [9] si definisce una classe di presentazioni di algebre di Lie $\mathcal{C}(d)$ nel modo seguente.

Siano $d \in \mathbb{N}$, $X = \{x_1, \dots x_d\}$ un insieme, $R = \{r_1, \dots, r_l\}$ un sottoinsieme dell'algebra di Lie libera $L(X)$ generata da X,

$$\mathcal{M}_d := \{[x_i, x_j] : i, j \in \{1, \dots, d\},\ i \neq j, \},$$
$$\mathcal{H}_d := \{[x_i, x_j] - [x_s, x_t] : i, j, s, t \in \{1, \dots, d\},\ |\{i, j, s, t\}| \geq 3\}.$$

Una presentazione $(X|R)$ appartiene a $\mathcal{C}(d)$ se:
$l = \lfloor d^2/4 \rfloor + 1$, $R \subset \mathcal{M}_d \cup \mathcal{H}_d$, e per ogni $[x_i, x_j] \in \mathcal{M}_d$, vale una e una sola delle seguenti:

(a) $[x_i, x_j] \in R$,
(b) $[x_j, x_i] \in R$,
(c) esiste ed è unico $[x_s, x_t] \in \mathcal{M}_d$ tale che $[x_i, x_j] - [x_s, x_t] \in R \cap \mathcal{H}_d$,
(d) esiste ed è unico $[x_s, x_t] \in \mathcal{M}_d$ tale che $[x_j, x_i] - [x_s, x_t] \in R \cap \mathcal{H}_d$.

Per semplificare l'analisi di queste presentazioni si è ritenuto utile associare ad ogni presentazione $(X|R) \in \mathcal{C}(d)$ un grafo $\mathcal{G}(d, R)$ che ha X come insieme di vertici e in cui l'insieme di lati è $E(d, R) = \{\{x_i, x_j\} : [x_i, x_j] \in R \text{ o } [x_j, x_i] \in R\}$. È facile mostrare che se $(X|R) \in \mathcal{C}(d)$ allora $|R \cap \mathcal{M}_d| = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2$, quindi $\mathcal{G}(d, R)$ è un grafo con d vertici e $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2$ lati.

L'utilità della scelta di associare un grafo ad ogni presentazione è chiarita dal seguente risultato.

TEOREMA 1. – *Sia* $(X|R) \in \mathcal{C}(d)$ *e sia* $S \subset \mathcal{M}_d$ *tale che* $(S \cap \mathcal{M}_d^+) \cap \{[x_i, x_j] : [x_j, x_i] \in S \cap \mathcal{M}_d^-\} = \emptyset$. *Si supponga che esista un isomorfismo di grafi* $\phi : \mathcal{G}(d, R) \to \mathcal{G}(d, S)$. *Sia* $T := \{[\phi(x_i), \phi(x_j)] - [\phi(x_s), \phi(x_t)] : [x_i, x_j] - [x_s, x_t] \in R_{\mathcal{H}_d}\}$, *allora* $(X|S \cup T) \in \mathcal{C}(d)$ *e le algebre di Lie presentate da* $(X|R)$ *e* $(X|S \cup T)$ *sono isomorfe.*

Si noti ora che se $\mathcal{A}(d)$ è l'insieme dei grafi non isomorfi con d vertici e $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2$

lati, il teorema permette di restringere l'analisi a presentazioni $(X|R) \in \mathcal{C}(d)$ tali che $\mathcal{G}(d, R) \in \mathcal{A}(d)$. Tale restrizione ci permette di descrivere le algebre di Lie che abbiano una presentazione in $\mathcal{C}(d)$ con $d = 3, 4$ e di ottenere informazioni sulle algebre di Lie con una presentazione in $\mathcal{C}(5)$.

TEOREMA 2. – *Se* $(X|R) \in \mathcal{C}(3)$, *allora l'algebra di Lie presentata da* $(X|R)$ *è un'algebra di Lie abeliana di dimensione tre. Se* $(X|R) \in \mathcal{C}(4)$, *allora l'algebra di Lie presentata da* $(X|R)$ *è un'algebra di Lie metabeliana di dimensione* 5 *oppure è estensione centrale di un'algebra di Lie libera* 2*-generata.*

Ne segue che non esistono algebre di entropia uno che abbiano una presentazione in $\mathcal{C}(d)$ con $d = 3, 4$. Per quanto riguarda $\mathcal{C}(5)$ si riesce a ridurre l'analisi a sei presentazioni e ad avere evidenza computazionale che una di queste è la presentazione di un'algebra con una struttura periodica che ha le componenti omogenee di grado dispari di dimensione 5 e quelle di grado pari di dimensione 3. Il problema da risolvere a questo punto è la descrizione di quest'algebra di Lie.

Usando software quali GAP [2] e Anu-p-Quotient [4] è facile ottenere evidenza computazionale che l'algebra in esame è isomorfa a una sottoalgebra dell'algebra loop di sl_3 rispetto alla sua naturale graduazione su $\mathbb{Z}_2$; il nostro obbiettivo è dimostrare tale isomorfismo. Più precisamente, sia $\mathcal{L}$ l'algebra di Lie presentata da $(X|Rel) \in \mathcal{C}(5)$ ove $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $Rel := \{[x_1, x_2], [x_1, x_4], [x_2, x_3], [x_4, x_5], [x_3, x_5] - [x_2, x_4], [x_3, x_1] - [x_5, x_2], [x_3, x_4] - [x_5, x_1]\}$. Sia $\mathrm{sl}_3(k)$ l'algebra di Lie delle matrici di ordine 3 a coefficienti in un campo algebricamente chiuso k con traccia nulla su cui si fissa la base $\{w_1, w_0, w_{-1}, v_i\colon\ -2 \geqslant i \geqslant 2\}$ ove

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w_{-1} = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = 4\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = -\sqrt{2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_0 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, v_{-1} = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, v_{-2} = 4\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha $\mathrm{sl}_3(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2} V_i$, ove $V_0 = \bigoplus_{-1 \leqslant i \leqslant 1} kw_i$ e $V_1 = \bigoplus_{-2 \leqslant i \leqslant 2} kv_i$, e da questa graduazione si costruisce $\widehat{\mathrm{sl}}(3, k) = \mathrm{sl}_3(k) \otimes k[t]$. Si osservi che V_0 è una sottoalgebra di $\mathrm{sl}_3(k)$ isomorfa a $\mathrm{sl}_2(k)$ e che V_1 è un V_0-modulo irriducibile. Ne segue che $\widehat{\mathrm{sl}}(3, k)$ è un $\mathrm{sl}_2(k)$-modulo e che le componenti omogenee di grado dispari sono $\mathrm{sl}_2(k)$-moduli irriducibili di dimensione 5 e quelle di grado pari sono $\mathrm{sl}_2(k)$-moduli irriducibili di dimensione 3. Queste osservazioni suggeriscono di dare una struttura di $\mathrm{sl}_2(k)$-modulo all'algebra $\mathcal{L}$ cercando poi di sfruttare la teoria delle rappresentazioni di $\mathrm{sl}_2(k)$ per costruire l'isomorfismo cercato. Poiché nel caso $k = \mathbb{C}$ si ha che ogni $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-modulo è completamente riducibile e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un'unica classe di isomorfismo di $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-moduli irriducibili di dimensione n (cfr [1]) si è scelto di restringere l'attenzione a questo caso.

Sia ora V il $\mathbb{C}$-modulo generato da X, è possibile rendere V un $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-modulo irriducibile di dimensione 5, tale azione si estende in modo naturale all'algebra di Lie libera $L(X)$ generata da X. Inoltre in questo caso è possibile definire tale azione in modo da rendere $I(Rel)$, l'ideale generato da Rel in $L(X)$, un $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-sottomodulo di $L(X)$; ne segue che $\mathcal{L} = L(X)/I(Rel)$ è un $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-modulo. Da questa costruzione segue facilmente che $\widehat{\mathrm{sl}}(3, \mathbb{C})$ è immagine epimorfa di $\mathcal{L}$; è da notare che l'epimorfismo costruito è un epimorfismo di algebre di Lie che rispetta la struttura di $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-modulo. Dimostrare che tale epimorfismo è iniettivo è più complicato e si sfrutta in maniera determinante la teoria delle rappresentazioni di $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ e in particolare come si decompongono in irriducibili prodotti tensoriali e prodotti esterni di $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-moduli. Il risultato che si ottiene può essere enunciato come segue.

TEOREMA 3. – *Sia V un $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-modulo irriducibile di dimensione 5 e sia $L(V) := \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i(V)$, l'algebra di Lie libera generata da una base di V con la sua graduazione naturale su $\mathbb{N}$. Sia R un $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-sottomodulo irriducibile di dimensione 7 di $L_2(V)$. Si consideri $\mathcal{L}(V) = L(V)/S$ ove S è il minimo ideale di $L(V)$ contenente R. Allora $\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_i(V)$ è $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-isomorfo a $\widehat{\mathrm{sl}}(3, \mathbb{C})$ come algebra di Lie.*

BIBLIOGRAFIA

[1] WILLIAM FULTON e JOE HARRIS, *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[2] THE GAP GROUP, *GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.3*, 2002. (http://www.gap-system.org).

[3] E. S. GOLOD e I. R. ŠAFAREVIČ, *On the class field tower*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **28** (1964), 261-272.

[4] GEORGE HAVAS, M. F. NEWMAN, e M. R. VAUGHAN-LEE, *A nilpotent quotient algorithm for graded Lie rings*, J. Symbolic Comput., **9(5-6)** (1990), 653-664. Computational group theory, Part 1.

[5] H. KOCH *Erzeugenden- und Relationenrang für endlich dimensionale nilpotente Liesche Algebren*, Algebra i Logika, **16(3)** (1977), :364-374, 378.

[6] M. F. NEWMAN, CSABA SCHNEIDER, e ANER SHALEV, *The entropy of graded algebras*, J. Algebra, **223(1)** (2000), 85-100.

[7] È. B. VINBERG, *On the theorem concerning the infinite-dimensionality of an associative algebra*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **29** (1965), 209-214.

[8] JÜRGEN WISLICENY, *Zur Darstellung von Pro-p-Gruppen und Lieschen Algebren durch Erzeugende und Relationen*, Math. Nachr., **102** (1981), 57-78.

[9] JÜRGEN WISLICENY, *Konstruktion nilpotenter assoziativer Algebren mit wenig Relationen*, Math. Nachr., **147** (1990), 75-82.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Brescia
e-mail: erika.damian@ing.unibs.it
Dottorato in matematica (sede amministrativa:
Università degli Studi di Trento) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Andrea Caranti, Università degli Studi di Trento