Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luca Degiovanni

Nuovi aspetti della teoria dei sistemi trihamiltoniani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 483–486.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_483_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 483-486

Nuovi aspetti della teoria dei sistemi trihamiltoniani.

LUCA DEGIOVANNI

1. – Intoduzione.

Le equazioni del moto di molti sistemi integrabili godono dell'interessante proprietà di poter essere scritte utilizzando due diverse parentesi di Poisson. Questa caratteristica è stata osservata per la prima volta da F. Magri e da allora è stata oggetto di ampi studi, che hanno condotto ad interpretare pressoché tutte le proprietà rilevanti connesse all'integrabilità nei termini della geometria delle varietà dotate di due diverse strutture di Poisson. Una rassegna dei risultati di questo campo di ricerca può essere trovata in [1], mentre il lavoro [2] presenta un'applicazione al caso, particolarmente importante, delle equazioni solitoniche.

Un aspetto non ancora completamente chiarito è il legame tra l'approccio bihamiltoniano e i metodi di soluzione algebro-geometrici basati sulle proprietà di isospettralità delle equazioni di Lax [5]. Sebbene sia possibile introdurre strutture bihamiltoniane che generano in modo naturale equazioni di Lax con parametro [4], il ruolo dell'equazione caratteristica dell'operatore di Lax (la *curva spettrale*) non è stato ancora interpretato in modo soddisfacente dal punto di vista bihamiltoniano.

Il lavoro presentato nella tesi fornisce alcuni elementi nuovi sulla connessione tra sistemi multihamiltoniani e curve spettrali suggerendo che, per interpretare queste ultime in termini hamiltoniani, occorra introdurre tre strutture di Poisson indipendenti tra loro.

2. – Concetti preliminari.

La principale ragione per affrontare la formulazione intrinseca delle equazioni di Hamilton attraverso l'utilizzo delle parentesi di Poisson, anziché dal punto di vista più comune delle strutture simplettiche, è che una parentesi di Poisson permette di associare ad una funzione f un unico campo vettoriale X_f, tale che per ogni funzione g valga $\langle X_f, dg\rangle = \{f, g\}$, anche nei casi in cui la parentesi è degenere. Questo consente di estendere facilmente la nozione di campo hamiltoniano alle varietà di dimensione dispari, permettendone una notevole generalizzazione.

Nel seguito si considereranno quindi delle varietà differenziabili M, sulla cui algebra delle funzioni $\mathcal{F}(M)$ sia definita una parentesi che ha le stesse proprietà formali della parentesi di Poisson comunemente introdotta in meccanica analitica; questa parentesi $\{\cdot, \cdot\}$ gode cioè delle seguenti proprietà:

- è antisimmetrica: $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
- è una derivazione (nei due argomenti): $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$;
- soddisfa l'dentità di Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \text{perm. cicl.} = 0$.

Grazie alle prime due proprietà la parentesi può essere rappresentata tramite l'azione di un tensore antisimmetrico sui differenziali: $\{f, g\} = P(df, dg)$. Il tensore P viene detto *tensore di Poisson* e induce una *struttura hamiltoniana* sulla varietà M che prende il nome di *varietà di Poisson*. Come si è anticipato, tramite il tensore P è possibile associare ad ogni funzione f il campo vettoriale $X_f = Pdf$ tale che per ogni funzione g valga $\langle X_f, dg\rangle = \{f, g\}$, anche nel caso in cui P sia degenere. Il campo vettoriale X_f prende il nome di *campo hamiltoniano* associato a f.

Ogni varietà simplettica è anche una varietà di Poisson, il cui tensore P è l'inverso della forma simplettica e quindi è non degenere; inoltre se M è un fibrato cotangente, dotato della forma simplettica canonica, allora le parentesi definite da P sono le parentesi di Poisson classiche e il campo vettoriale X_f, che P associa ad ogni funzione f su M, è quello definito dalle equazioni di Hamilton che hanno f come hamiltoniana.

Nel caso in cui P sia un tensore degenere potranno esistere delle funzioni i cui differenziali appartengono al suo nucleo; queste funzioni sono chiamate *funzioni di Casimir*, ed essendo associate a campi vettoriali nulli sono in involuzione con tutte le altre: tutti i campi vettoriali sono quindi tangenti alle loro superfici di livello. Le superfici di livello delle funzioni di Casimir sono molto importanti nella descrizione della geometria di una varietà di Poisson e su di esse è possibile indurre una struttura simplettica [3].

L'assenza di una struttura di Poisson «naturale» su di una data varietà suggerisce la possibilità di dotarla di due distinti tensori di Poisson, legati da una qualche condizione di accoppiamento:

DEFINIZIONE 1. – *Una* varietà bihamiltoniana *è una varietà differenziabile dotata di due tensori di Poisson P e Q compatibili, tali cioè il tensore $Q - \lambda P$ sia di Poisson per ogni valore del parametro λ. Il fascio di tensori $Q - \lambda P$ si chiama* fascio di Poisson *della varietà bihamiltoniana.*

L'importanza della nozione di varietà bihamiltoniana nella teoria dei sistemi completamente integrabili deriva dal seguente teorema la cui dimostrazione, molto elegante, può essere trovata in [1]:

TEOREMA 1. – *Se su una varietà bihamiltoniana esiste una funzione di Casimir f_λ del fascio di Poisson $Q - \lambda P$, che sia (almeno formalmente) sviluppabile in serie di Taylor rispetto al parametro λ: $f_\lambda = \sum h_i \lambda^i$, allora i coefficienti h_i dello sviluppo soddisfano la relazione di ricorrenza di Lenard-Magri $Pdh_i = Qdh_{i+1}$, e risultano tutti mutuamente in involuzione rispetto ad entrambe le parentesi di Poisson associate a P e Q.*

Le funzioni di Casimir del fascio di Poisson permettono quindi di trovare un insieme di funzioni in involuzione, dotate dell'importante proprietà di avere campi hamiltoniani rispetto ad entrambi i tensori di Poisson: esse risultano cioè bihamiltoniane. Le relazioni di Lenard–Magri legano tra loro questi campi vettoriali organizzandoli in una gerarchia. Se tra le funzioni in involuzione trovate esiste un insieme sufficientemente grande di funzioni indipendenti, allora tutti i campi vettoriali della gerarchia sono completamente integrabili nel senso di Liouville.

3. – Risultati originali.

In alcuni esempi esiste più di una funzione di Casimir per il fascio di Poisson: quindi si hanno diverse gerarchie di campi bihamiltoniani slegate tra loro. Viene allora spontaneo chiedersi se sia possibile introdurre una terza struttura di Poisson, che faccia da «ponte» tra queste gerarchie, e se sia possibile ottenere tutte le hamiltoniane in questione a partire da un unico oggetto geometrico, così come tutte le hamiltoniane di una stessa gerarchia si ottengono da un'unica funzione di Casimir del fascio di Poisson. Questo si è dimostrato essere effettivamente possibile nel lavoro di tesi:

PROPOSIZIONE 1. – *Su una varietà differenziabile siano definiti tre tensori di Poisson P, Q e R ed esista una funzione $f_{\lambda\mu}$, che sia contemporaneamente una funzione di Casimir per i due fasci di Poisson $Q-\lambda P$ e $R-\mu P$. In tal caso, se la funzione $f_{\lambda\mu}$ è sviluppabile (almeno formalmente) in serie di Taylor nei due parametri: $f_{\lambda\mu}=\sum_{ij} h_{ij}\lambda^i\mu^j$, allora i coefficienti h_{ij} soddisfano le due relazioni di ricorrenza $Pdh_{ij}=Qdh_{i+1,j}$, $Pdh_{ij}=Rdh_{i,j+1}$, e inoltre risultano tutti in involuzione rispetto alle parentesi di Poisson associate a P, Q e R.*

L'approccio utilizzato nel precedente risultato, che costituisce un'estensione molto naturale di quanto vale nel caso bihamiltoniano, è più generale delle formulazioni multihamiltoniane presenti in letteratura. Sono infatti noti alcuni esempi di strutture bihamiltoniane, come ad esempio quelli presentati in [4], in cui è possibile definire degli ulteriori tensori di Poisson «iterati» $Q^{(n)}$, che però si limitano a produrre delle sottoricorrenze all'interno della gerarchia generata da P e $Q=Q^{(1)}$, secondo lo schema $Pdh_i=Q^{(n)}dh_{i+n}$, mantenendo in ogni caso un tipo di ricorrenza «unidimensionale». Il risultato precedente invece si applica anche al caso in cui le gerarchie corrispondenti a diversi valori del secondo indice sono effettivamente indipendenti tra loro: la terza struttura di Poisson produce pertanto un tipo di ricorrenza «bidimensionale».

Questo risultato potrebbe apparire una semplice «variazione sul tema», ma in un caso particolarmente interessante la funzione $f_{\lambda\mu}$ costituisce un importante legame con l'approccio geometrico-algebrico. Seguendo [4], sullo spazio vettoriale $gl(k)^n$, i cui elementi sono ennuple $(M_1,\ldots,M_n)$ di matrici $k\times k$, per ogni matrice costante A con autovalori distinti è possibile definire due tensori di Poisson P e Q che permettono di interpretare in un contesto hamiltoniano le equazioni di Lax di un'ampia classe di sistemi. Infatti i tensori P e Q legano in una ricorrenza di Lenard-Magri le tracce delle potenze dell'operatore $L_\lambda=M_n+\ldots M_1\lambda^{n-1}+A\lambda^n$, e inoltre i campi bihamiltoniani associati a queste funzioni possono essere posti nella forma di equazioni di Lax con parametro:

$$\frac{d}{dt}L_\lambda=[L_\lambda, B_\lambda]. \tag{1}$$

Per rendere più consistente il collegamento con le tecniche algebrico-geometriche normalmente utilizzate per trattare le equazioni della forma [1], è necessario introdurre il polinomio caratteristico dell'operatore di Lax L_λ, che definisce una curva algebrica nota come *curva spettrale* del problema. Un secondo risultato presentato nella tesi e in [6], permette di generare questo polinomio in modo puramente hamiltoniano, introducendo una terza struttura di Poisson.

PROPOSIZIONE 2. – *Sullo spazio vettoriale* $gl(k)^n$, *oltre alle precedenti strutture* P *e* Q, *è possibile costruire esplicitamente una terza struttura di Poisson* R, *che non produce semplici sottosequenze della sequenza delle tracce delle potenze di* L_λ, *e che risulta compatibile con le altre due strutture di Poisson. La struttura trihamiltoniana così costruita ammette come funzione di Casimir comune ai due fasci* $Q - \lambda P$ *e* $R - \mu P$ *la funzione*

$$f_{\lambda\mu} = \det(L_\lambda - \mu \mathbb{1})$$

cioè il polinomio che definisce la curva spettrale associata all'equazione di Lax con parametro [1].

Questo risultato, anche se ottenuto solo su di un caso particolare (al quale risultano comunque legati molti esempi classici di sistemi integrabili), suggerisce un'interpretazione alternativa delle curve spettrali: in quest'ottica le curve spettrali classiche sono un caso particolare del concetto più generale di funzione di Casimir comune a due fasci di Poisson, che può essere definito senza ricorrere all'apparato algebrico necessario per scrivere le equazioni di Lax (che per loro natura sono definite esclusivamente su di un'algebra di Lie). Appare dunque possibile l'estensione delle tecniche risolutive, basate sull'esistenza di una curva spettrale, direttamente alla formulazione trihamiltoniana del problema, anche nei casi in cui non ne sia nota una formulazione alla Lax.

BIBLIOGRAFIA

[1] MAGRI F., *Eight lectures on integrable systems,* Lect. Notes Phys., **495**, Springer, 1997.

[2] FALQUI G., MAGRI F., PEDRONI M., *Bi-Hamiltonian geometry, Darboux coverings, and linearization of the KP hierarchy,* Comm. Math. Phys., **197** (1998), 303-324.

[3] LIBERMAN P., MARLE C.-M., *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[4] MAGNANO G., MAGRI F., *Poisson-Nijenhuis Structures and Sato Hierarchy,* Rev. Math. Phys., **3** (1991), 403-466.

[5] GRIFFITHS P.A., *Linearizing Flows and Cohomological Interpretation of Lax Equations,* Amer. J. Math., **107** (1985), 1445-1483.

[6] DEGIOVANNI L., MAGNANO G., *Tri-hamiltonian vector fields, spectral curves and separation coordinates,* Rev. Math. Phys., **14** (2002), 1115-1163.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino; e-mail: degio@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Genova) - XIV ciclo
Direttori di ricerca: Prof. F. Magri, Università di Milano-Bicocca
Prof. G. Magnano, Università di Torino